教 育 部 高 等 教 育 司 推 荐
国外优秀信息科学与技术系列教学用书

工程电路分析

（第六版）

Engineering Circuit Analysis, Sixth Edition

William H. Hayt, Jr.
［美］Jack E. Kemmerly 著
Steven M. Durbin
王大鹏 沈世洪 张爱民 等译
徐安士 审校





電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
www.phei.com.cn

工程电路分析（第六版）

Engineering Circuit Analysis, Sixth Edition

《工程电路分析》长期以来一直致力于帮助学生培养一种对线性电路分析的直观理解。新出的第六版延续了这一传统，并且坚持认为解题可以成为一件快乐的事情。本书通过许多实例的使用，以及对重要内容的详尽解释和增加的新内容，更加清晰地将电气工程的基本概念展现给读者。

第六版的一些重要特点：

- 基本直流电路分析部分，由原来的两章大幅度扩充为现在的六章，并新加进了一章有关运算放大器的内容。
- 加进了几个新的小节，包括如何在书中介绍的几种电路分析方法中做出选择，以及从音频应用的观点设计基本滤波电路的讨论。
- 每一章都加入了“实际应用”一节，为理论与现实世界建立了联系。
- 对部分内容进行了重新组织，使概念更加清晰。内容包括复频率、拉普拉斯变换、正弦稳态响应和时域分析。
- 在许多章的适当位置引入了PSpice和MATLAB的实例。计算机辅助工具仅作为培养解题技巧的一种帮助，而不是替代。在一些课后作业中也引入了计算机辅助分析的内容，以鼓励学生进行手算与仿真结果的比较。
- 每一章的“本章要点”帮助读者在进入下一章前，掌握本章最重要的概念。
- 书中还特别标出了一些关键点和常见错误。
- 在本书中附加了一个称为“虚拟教授”的补充光盘。“虚拟教授”是用来帮助学生掌握书中一些重要而难以理解的概念。在“虚拟教授”光盘中含有10个教学软件，内容包括利用KCL和KVL分析简单电路和时域分析问题，利用PSpice的电路分析，相量分析问题，等等。
- 本书的“在线服务中心”位于http://www.mhhe.com/hayt6e。“在线服务中心”备有供教师使用的解答，重要图表的PowerPoint幻灯片，网络分析教学软件，考试复习问题和勘误表等（需注册，详情请参见书后所附的“教学支持说明”）。

作者简介

William H. Hayt, Jr.：在美国普度大学获得学士和硕士学位，在伊利诺伊大学获得博士学位，在工业界工作四年之后作为教授和电气工程学院院长加入普度大学，直到1986年退休。除了《工程电路分析》一书外，Hayt教授还编写了其他三本教材，包括现已在McGraw-Hill出版公司作为第六版出版的《工程电磁学》。Hayt教授所参加的专业协会有*Eta Kappa* Nu、Tau Beta Pi、Sigma Xi和Sigma Delta Chi，此外他还是IEEE、ASEE和NAEB的会员

Jack E. Kemmerly：以优等成绩获得美国天主教大学学士学位，丹佛大学硕士学位和普度大学的博士学位。Kemmerly教授最初在普度大学授课，而后到福特汽车公司航空部任主任工程师，后来又到加州州立大学任电气工程系主任直到退休。Kemmerly教授所参加的专业协会有Eta Kappa Nu、Tau Beta Pi、Sigma Xi、ASEE和IEEE（高级会员）

Steven M. Durbin：分别在普度大学、西拉斐特大学和印地安那大学获得学士、硕士和博士学位。此后在佛罗里达A&M大学和佛罗里达州立大学任教。他是Eta Kappa Nu、IEEE、电子器件协会、美国物理协会和新西兰皇家协会的会员









责任编辑：李秦华
封面设计：毛惠庚

ISBN 7-5053-7633-0/TN · 1594　定价：59.00元（含光盘）

教 育 部 高 等 教 育 司 推 荐
国外优秀信息科学与技术系列教学用书

工程电路分析

（第六版）

Engineering Circuit Analysis
Sixth Edition

William H. Hayt, Jr.
［美］ Jack E. Kemmerly 著
Steven M. Durbin

王大鹏 沈世洪 张爱民 等译
徐安士 审校

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内容简介

本书是电路分析方面的一本经典著作，三位作者（其中两位已经过世）分别来自普度大学、加利福尼亚州立大学和坎特伯雷大学。书中内容取材自作者在普度大学、加利福尼亚州立大学、佛罗里达州立大学以及坎特伯雷大学的授课教材。本书从基本电路元件、电压电流定律等基本概念出发，介绍了节点和网孔分析、叠加原理和电源置换等常用分析方法。对于交流电路，也是从*RLC*电路的正弦稳态分析入手，然后讲解交流功率和磁耦合电路。为了适应现代发展趋势，作者充实了频域分析方面的内容，详细介绍了拉普拉斯变换和s域分析、频率响应和傅里叶分析、二端口网络等高级内容。作者力图将理论和实践相结合，提供了丰富的实例和数据。书中附有大量例题、练习和习题，书末附有题号为单数的习题答案。

本书可作为信息电子类、电气工程类和应用物理类本科生的教学用教材，也可供从事电子技术、电气工程方面工作的工程技术人员学习参考。

William H. Hayt, Jr., Jack E. Kemmerly , Steven M. Durbin: **Engineering Circuit Analysis, Sixth Edition**
ISBN 0-07-228364-5

版权贸易合同登记号：图字：01-2001-5388

图书在版编目（CIP）数据

工程电路分析（第六版）/（美）海特（Hayt, W. H.）著；王大鹏等译. -北京：电子工业出版社，2002.10
（国外电子与通信教材系列）
书名原文：Engineering Circuit Analysis, Sixth Edition
ISBN 7-5053-7633-0

Ⅰ.工… Ⅱ.①海… ②王… Ⅲ.电路分析－高等学校－教材 Ⅳ. TM133

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 083073 号

责任编辑：李秦华
印 刷 者：北京民族印刷厂
出版发行：电子工业出版社 http://www.phei.com.cn
北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编：100036
经 销：各地新华书店
开 本：787 × 1092 1/16 印张：46 字数：1178 千字 附光盘 1 张
版 次：2002 年 10 月第 1 版 2002 年 10 月第 1 次印刷
定 价：59.00 元（含光盘）

凡购买电子工业出版社的图书，如有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系。联系电话：（010）68279077

序

2001年7月间，电子工业出版社的领导同志邀请各高校十几位通信领域方面的老师，商量引进国外教材问题。与会同志对出版社提出的计划十分赞同，大家认为，这对我国通信事业、特别是对高等院校通信学科的教学工作会很有好处。

教材建设是高校教学建设的主要内容之一。编写、出版一本好的教材，意味着开设了一门好的课程，甚至可能预示着一个崭新学科的诞生。20世纪40年代MIT林肯实验室出版的一套28本雷达丛书，对近代电子学科、特别是对雷达技术的推动作用，就是一个很好的例子。

我国领导部门对教材建设一直非常重视。20世纪80年代，在原教委教材编审委员会的领导下，汇集了高等院校几百位富有教学经验的专家，编写、出版了一大批教材；很多院校还根据学校的特点和需要，陆续编写了大量的讲义和参考书。这些教材对高校的教学工作发挥了极好的作用。近年来，随着教学改革不断深入和科学技术的飞速进步，有的教材内容已比较陈旧、落后，难以适应教学的要求，特别是在电子学和通信技术发展神速、可以讲是日新月异的今天，如何适应这种情况，更是一个必须认真考虑的问题。解决这个问题，除了依靠高校的老师和专家撰写新的符合要求的教科书外，引进和出版一些国外优秀电子与通信教材，尤其是有选择地引进一批英文原版教材，是会有好处的。

一年多来，电子工业出版社为此做了很多工作。他们成立了一个"国外电子与通信教材系列"项目组，选派了富有经验的业务骨干负责有关工作，收集了230余种通信教材和参考书的详细资料，调来了100余种原版教材样书，依靠由20余位专家组成的出版委员会，从中精选了40多种，内容丰富，覆盖了电路理论与应用、信号与系统、数字信号处理、微电子、通信系统、电磁场与微波等方面，既可作为通信专业本科生和研究生的教学用书，也可作为有关专业人员的参考材料。此外，这批教材，有的翻译为中文，还有部分教材直接影印出版，以供教师用英语直接授课。希望这些教材的引进和出版对高校通信教学和教材改革能起一定作用。

在这里，我还要感谢参加工作的各位教授、专家、老师与参加翻译、编辑和出版的同志们。各位专家认真负责、严谨细致、不辞辛劳、不怕琐碎和精益求精的态度，充分体现了中国教育工作者和出版工作者的良好美德。

随着我国经济建设的发展和科学技术的不断进步，对高校教学工作会不断提出新的要求和希望。我想，无论如何，要做好引进国外教材的工作，一定要联系我国的实际。教材和学术专著不同，既要注意科学性、学术性，也要重视可读性，要深入浅出，便于读者自学；引进的教材要适应高校教学改革的需要，针对目前一些教材内容较为陈旧的问题，有目的地引进一些先进的和正在发展中的交叉学科的参考书；要与国内出版的教材相配套，安排好出版英文原版教材和翻译教材的比例。我们努力使这套教材能尽量满足上述要求，希望它们能放在学生们的课桌上，发挥一定的作用。

最后，预祝"国外电子与通信教材系列"项目取得成功，为我国电子与通信教学和通信产业的发展培土施肥。也恳切希望读者能对这些书籍的不足之处、特别是翻译中存在的问题，提出意见和建议，以便再版时更正。

吴佑寿

中国工程院院士、清华大学教授

"国外电子与通信教材系列"出版委员会主任

出 版 说 明

进入21世纪以来，我国信息产业在生产和科研方面都大大加快了发展速度，并已成为国民经济发展的支柱产业之一。但是，与世界上其他信息产业发达的国家相比，我国在技术开发、教育培训等方面都还存在着较大的差距。特别是在加入WTO后的今天，我国信息产业面临着国外竞争对手的严峻挑战。

作为我国信息产业的专业科技出版社，我们始终关注着全球电子信息技术的发展方向，始终把引进国外优秀电子与通信信息技术教材和专业书籍放在我们工作的重要位置上。在2000年至2001年间，我社先后从世界著名出版公司引进出版了40余种教材，形成了一套"国外计算机科学教材系列"，在全国高校以及科研部门中受到了欢迎和好评，得到了计算机领域的广大教师与科研工作者的充分肯定。

引进和出版一些国外优秀电子与通信教材，尤其是有选择地引进一批英文原版教材，将有助于我国信息产业培养具有国际竞争能力的技术人才，也将有助于我国国内在电子与通信教学工作中掌握和跟踪国际发展水平。根据国内信息产业的现状、教育部《关于"十五"期间普通高等教育教材建设与改革的意见》的指示精神以及高等院校老师们反映的各种意见，我们决定引进"国外电子与通信教材系列"，并随后开展了大量准备工作。此次引进的国外电子与通信教材均来自国际著名出版商，其中影印教材约占一半。教材内容涉及的学科方向包括电路理论与应用、信号与系统、数字信号处理、微电子、通信系统、电磁场与微波等，其中既有本科专业课程教材，也有研究生课程教材，以适应不同院系、不同专业、不同层次的师生对教材的需求，广大师生可自由选择和自由组合使用。我们还将与国外出版商一起，陆续推出一些教材的教学支持资料，为授课教师提供帮助。

此外，"国外电子与通信教材系列"的引进和出版工作得到了教育部高等教育司的大力支持和帮助，其中的部分引进教材已通过"教育部高等学校电子信息科学与工程类专业教学指导委员会"的审核，并得到教育部高等教育司的批准，纳入了"教育部高等教育司推荐——国外优秀信息科学与技术系列教学用书"。

为做好该系列教材的翻译工作，我们聘请了清华大学、北京大学、北京邮电大学、东南大学、西安交通大学、天津大学、西安电子科技大学、电子科技大学等著名高校的教授和骨干教师参与教材的翻译和审校工作。许多教授在国内电子与通信专业领域享有较高的声望，具有丰富的教学经验，他们的渊博学识从根本上保证了教材的翻译质量和专业学术方面的严格与准确。我们在此对他们的辛勤工作与贡献表示衷心的感谢。此外，对于编辑的选择，我们达到了专业对口；对于从英文原书中发现的错误，我们通过与作者联络、从网上下载勘误表等方式，逐一进行了修订；同时，我们对审校、排版、印制质量进行了严格把关。

今后，我们将进一步加强同各高校教师的密切关系，努力引进更多的国外优秀教材和教学参考书，为我国电子与通信教材达到世界先进水平而努力。由于我们对国内外电子与通信教育的发展仍存在一些认识上的不足，在选题、翻译、出版等方面的工作中还有许多需要改进的地方，恳请广大师生和读者提出批评及建议。

电子工业出版社

教材出版委员会

译　者　序

《工程电路分析》一书是一本侧重于工程应用的电路分析教材。作者在书中的正文以及习题部分给出了许多结合应用的实际例子，如接地问题、数字万用电表的设计，简单的光纤通信系统，等等。这样的安排使读者在学习电路理论的同时，可以了解它的应用背景，既有助于加深对概念的理解，又使电路理论变得更加生动、直观。这正好体现了本书作者长期以来一直倡导的精神——帮助学生培养一种对线性电路分析的直观理解。

本书的另一个特点是作者对于一些重要概念的介绍特别详细，注重从多个角度、多个层次进行讲解，有时还穿插了一些历史背景的介绍，而常见的教材往往省略了这部分内容，或是只在习题中安排少量这样的内容。在教学和学习实践中，大家都有这样的体会：一些重要概念的含义并不是一目了然的，对概念的理解也不是一次就能完成的。悟性好的同学能够自己逐渐悟出其中的道理，大多数同学如果没有教师的正确引导，则只能停留在对概念的表面理解，应用起来常常显得无所适从

本书对读者的预备知识要求不高，数学上只要求具备一点微积分知识，物理上也不要求具备电磁场知识。无论是在结构安排上，还是在 PSpice 和 MATLAB 等流行教学工具的引用上都使本书成为一本非常适合读者自学的教材。本书的三位作者均是长期从事电路分析教学的著名学者。正如作者在前言中介绍的，希望学生通过这本书能够自己教会自己电路分析这门学科。

本书的前言、第 1 章、第 2 章、第 5 章、第 11 章、附录和习题答案由王大鹏翻译；第 3 章、第 4 章、第 6 章至第 10 章由沈世洪翻译；第 12 章由黄传军翻译；第 13 章至第 18 章由张爱民翻译。王大鹏对全书译稿做了统一校订，最后由徐安士教授审阅了全书。

由于译者水平有限，书中难免有不妥和错误之处，敬请读者给予批评和指正。

译　者

2002 年 7 月

于北京大学燕园

前 言

尽管这本书的写作在学术上必须做到严谨，而且要用到一定的数学知识，但作者还是试图使这本书的阅读成为一种乐趣。作者试图让读者分享一种看法：电路分析可以是一门让人感兴趣的课程。电路分析不仅是工程研究领域必不可少的技术，而且对于培养逻辑思维是一种非常好的教育方式，甚至对于那些在其职业生涯中不需要进行电路分析的人们也很有益。许多同学在学完这门课回头看时都惊奇地发现，所有的优秀分析工具都是从三个简单的科学定律导出的——欧姆定律、基尔霍夫电压定律及基尔霍夫电流定律。

在许多大学和学院中，总是将介绍电磁概念的物理课程安排在电气工程课程之前或与其同时进行，且往往是以场的形式介绍电磁概念。可是这样的背景知识并不是必须的。一些基本电磁概念应当是在需要时再进行讨论。阅读本书所需要的先导课程或并修课程只是一点微积分知识。在这门课中电路元件是以电路方程引出和定义的。与场有关的知识只是偶尔在注释中提到。过去作者尝试过用3周到4周的电磁场理论做前导，然后进入基本电路分析课程，希望这样可以用麦克斯韦方程精确地定义电路元件。结果这种尝试被证明是失败的，特别是从学生接受的情况来看。

希望学生能够通过这本书自己教会自己电路分析这门学科。这本书是为学生写的，而不是为教师写的，因为学生将比教师花费更多的时间去读本书。每一个术语在第一次出现时，都会尽可能地给出清晰的定义。基本知识安排在每一章的开始部分，并给予详尽解释。数值例子用以介绍一般结果。练习贯穿于各个章节，它们一般比较简单，其答案就在题目后面给出。难一点的习题出现在每一章之后，按照课文叙述的先后排列，这些习题有时是为了按照循序渐进的方式引入不太重要或更高级的内容，或是引入下一章的内容。概念的引入和概念的重复对于学习过程是很重要的。除了许多练习和例题之外，在各章之后还有总共950多道习题。本书中大多数习题是第六版新收入的，在几位同事的帮助下，只要可能，每道题都经过手算和计算机检验过。

如果这本书有时显得不太严肃，甚或是轻松诙谐，这是因为作者觉得教育不一定必须是枯燥和自负的。愉快的笑脸不会阻碍学生学习知识。如果本书的写作是一个愉快的过程，为什么本书的阅读不也是如此呢？

本书中的许多材料是基于在普度大学，加利福尼亚州立大学和佛罗里达州立大学的联合工程计划以及坎特伯雷大学所讲授的课程。

第六版更新之处

本书的修订至少是一件让人望而生畏的事。本书的作者之一（Steven M. Durbin）在普度大学读本科时有幸听过 William H. Hayt 教授本人的电路课，William H. Hayt 教授是我曾经遇到过的最好的教授之一。现在回头来看，几乎不记得当时为什么正好是我被邀请参加了这本著名教材的写作。在参与另一本教材的评论时，我遇到本书的编辑（原英文版）Catherine Shults，了解到 McGraw-Hill 出版公司计划将《工程电路分析》增加一名作者，她邀请我做第五版的评论，

并对第六版的修改计划提出建议，那是在1999年3月，从那之后我便参与到编写第六版的工作中了。

《工程电路分析》的成功得益于它的几个非常有价值的特点。这是一本经过很好组织的书籍，关键概念按照合乎逻辑的方式表达出来，同时这些概念也被无缝地连接到更大的框架中。Bill Hayt 和 Jack Kemmerly 对本书第一版做了很多工作，他们希望向读者传达的热情体现在每一章中。

作者的第一印象是不仅插图需要重画和更新，而且许多例题也常常难解。还有，在第五版中假定学生将完成每一道练习题，因而把练习题用做传递有关基本方法和解题技巧的工具。另外，应该向课文中注入更多有用的趣味，以抓住如今的大学生的注意力，增加例题数量，给教师提供多种多样的章末习题。

本书的每一章都是精雕细镂的，第六版的读者将会发现一些关键变化：

1. 安排了绪论性的章节，给学生提供简明的概论和解释为什么让他们在开始阶段就学习电路分析。
2. 原来的第1章被分为两章，这样做是为了使重要内容可以用较慢和较为轻松的节奏引入。2.7节和2.8节有关网络拓扑的内容已经移到了附录中。
3. 按照评审者的意见和减少时域分析授课时间的现代趋势，将第4章和第5章内容合并为一章。
4. 原来第1章中运算放大器的内容，现在放到第6章自成一章。第6章以后内容的安排，尽可能使那些希望把运算放大器内容留到后续电子电路课程中的教师做起来无所顾忌。在电路分析教材中，通常是将运算放大器作为受控源的实际应用而引入的。这样做并不很好，因为一旦这样做就放弃了将它看做理想运算放大器模型的想法。在这种处理方式下，理想运算放大器像理想电阻、电容和电感一样介绍出来。在前言部分重点介绍了实际运算放大器的分析技巧。一旦学生对这种非常实用的器件产生了信任，理想运算放大器模型就可以从更加精确的(不过仍然是近似的)受控电压源模型中导出。
5. 为使学习更加连贯，正弦稳态响应的概念被集中到一个单章里。
6. 三相功率测量一节被重新引入，并在原来的基础上做了更新。
7. 为了教师的方便，有关变压器的章节被重新放到紧接着三相电源的章节之后。
8. 也许最大的结构调整之一是把原来复频率的内容与拉普拉斯变换的介绍结合到一起。较早引入拉普拉斯变换是现在的趋势。可是当学生第一次面对复频率符号时，几乎总会感到困惑，所以作者感到对一些相关概念的引入应该逐步进行。
9. 新加入了一些章节，包括怎样从散布于各章的许多电路分析方法中做出有选择的讨论，以及怎样从通用的角度出发设计滤波器电路。
10. 本书的纸介版中删去了有关状态变量分析的章节。这部分内容提供了对通用电路分析理论的有价值的观点，可以根据教师的兴趣来取舍。因此决定将原来内容放到本书的网络版中。
11. 在各章末新增了300多道习题。
12. 许多章中还增加了"实际应用"部分，目的是向读者演示怎样将所学到的许多公式和理论应用到现实世界中。

13. 几乎每一章中都增加了 PSpice 和 MATLAB 的例题。不过，作者深深感到，计算机辅助工程应当仅仅是一个辅助，它不能替代对解决问题技巧的培养。所以按照许多评审者的意见，精心安排了计算机工具的引入。只是在最后部分，计算机辅助分析才被引入家庭作业，这样以鼓励学生将手算和数值计算的结果进行比较。采用的 PSpice 是学生版本 9.1，MATLAB 是学生版本 5.0。

14. 缩短了每章的引言部分，新增了"本章要点"。为帮助复习，每章都包含了关键概念的小结。

致谢

Bill Hayt 先生在本书修订工作刚开始时去世的消息对我来说是始料未及的重大打击。我一直没有机会与他探讨本书的修改事宜。我只是希望这次修订有助于本书面向另一代聪明的年轻工科学生。同时作者（durbin@ieee.org）和 McGraw-Hill 的编辑欢迎学生和教师给我们提出意见和反馈。

非常感谢 McGraw-Hill 的编辑长期以来的支持，包括 Tom Casson，Betsy Jones，Michelle Flomenhoft，James Labeots，John Wannemacher，Kelley Butcher，Heather Sabo，Phil Meek 和 Linda Avenarius。感谢负责电气工程的编辑 Catherine Shultz 对本书的一贯支持、热心和耐心。没有她就不会有本书的新版问世，与她在一起工作是整个工作过程中最有意思的事情。

下列人士在第六版的编辑中参与了许多审阅工作，在此表示感谢：

非常感谢佛罗里达 A&M 大学和佛罗里达州立大学电气工程和计算机系的 Reginald Perry，Rodney Roberts 和 Tom Harrison 博士的建议。感谢坎特伯雷大学的 Bill Kennedy，他对每章进行了校对并提出许多有用建议。特别要感谢坎特伯雷大学的 Richard Duke 博士对此项目的支持，Ken Smart 在第 7 章中电感器照片方面的帮助，Gary Brinkworth 在功率因数实际应用方面的帮助，Richard Blaikie 在 h 参数实际应用方面的帮助，Wade Enright 提供了许多变压器的照片。多年来许多人对作者的教学风格产生过影响，他们包括 Bill Hayt，David Meyer，Alan Weitsman 和 Jeffery Gray，还有作者所遇到的第一位电气工程师——我的父亲 Jesse Durbin，他毕业于 Indiana Institute of Technology。支持和鼓励还来自作者家庭中的其他成员，包括我母亲 Roberta，兄弟 Dave，John 和 James 以及岳父母 Jack 和 Sandy。最后也是最重要的，要感谢我的妻子 Kristi 对我的耐心、理解、支持和建议。

Steven M. Durbin

目　录

第1章　电路分析和电气工程

1.1　引言

今天的工科毕业生不仅将从事工程技术设计，他们的作用已超出先进计算机和通信系统的研究领域，进入到解决社会经济问题的范畴，如空气和水污染治理、城市规划、公共交通、新能源开发、自然资源（特别是石油和天然气）保护等

为了解决这些工程问题，工程师必须掌握包括电路分析在内的许多技术，如果已经或打算学习电气工程专业，电路分析将是先导课程　可是如果选择其他工程专业，电路分析也许就是有关电气工程方面的主要课程。电路分析的学习使得在电子学、仪器和其他领域的学习更加有效。最重要的是它为拓宽知识面提供了可能，使学生将来成为开发某种电子器件和电气系统的小组中见多识广的成员　只有大家都熟悉所用的语言和定义，小组成员之间才能有效地交流。

本章是对本书将要涉及题目的预览，简要讨论了分析与设计的关系，以及现代电路分析中计算机工具的作用。

1.2　本书概要

本书研究的题目称为线性电路分析，有些读者可能立刻会问“什么是非线性电路分析？”我们每天都会碰到非线性电路：电视和收音机信号的接收和解码；微处理器中每秒百万次的运算；电话中语音到电信号的转换。既然非线性电路如此广泛，也许问题应该改为，“为什么要学习线性电路呢？”

各行各业的工程师在解决迥然不同的各类问题时所采用的基本方法与上述似乎幼稚的问题紧密相连。一个简单的事实是没有哪个物理系统（包括电路）是完美的线性系统。所幸的是，大多数系统在一定范围内呈现出近似的线性。例如，如果能以每5分钟1页的速度阅读这本书，那么用半小时将能够读完6页书。不用多加思考，只要连续不停顿地阅读，任何人都将在8小时20分钟内读完100页。

线性问题本质上比非线性问题容易解决。因此，作为工程师常常为物理现象寻找合理而精确的线性近似。这种方法不仅速度快，而且往往提供了可以直觉地理解决定系统性能的关键因素。在以下各章里所遇到的电路都是实际电路的线性近似。在适当的时候，会对潜在的误差或模型的局限性进行简单讨论，但一般说来，这种近似对大多数应用已足够精确了。当实际需要更高精度时，可以采用非线性模型——这将显著增加解题的复杂性。

线性电路分析可以分为三个大类：电阻电路分析、时域分析和频域分析。本课程将从电阻电路开始，它包括一些简单的例子，如闪光灯和烤面包机。这提供了很好的机会去学习许多强有力的工程电路分析方法，比如节点分析、网孔分析、叠加原理、电源变换、戴维南

定理、诺顿定理以及几种串并联电路元件的替代方法。电阻电路的惟一特点是任何时间相关性不影响分析过程。这样如果要求出某一时刻的参数值，不必对电路做所有时刻的分析。

学习的第二步集中在时域分析，即允许在电路中包括电容和电感。因为这些元件的电压－电流关系是以积分和导数定义的，这类电路在不同时刻表现得很不相同(尽管很容易预测)。在分析过程中，一般要求所得到的表达式适用于所有时间，好在所有以前学习的方法都适用于时域电路分析。

直接处理时域分析中得到的微分方程，有助于对含储能元件(电容和电感)电路的工作过程有直观的理解。然而正如下面将要看到的那样，即便是含有很少元件的电路在分析中可能也会相当麻烦，所以已经发展出很多直接而有效的方法。这些方法构成了频域分析的基础，将微分方程转化为容易处理的代数方程。利用这种方法还能设计出对特定频率有指定响应的电路。日常生活中，当用收音机选择喜欢的电台、使用蜂窝电话或连接互联网时，都在使用频率相关的电路。

1.3 电路分析与工程的关系

即使对于那些完成本课程后不打算继续做电路分析的人来说，下面将要学习的方法也是非常有价值的。电路分析是一门学习怎样分析问题的课程。重要的是学习如何：

- 变得有条理
- 判断一个问题的目标
- 用已给的信息制定解决问题的计划
- 完成计划并得出结果

最后：

- 证明所得结果是准确的

因此，尽管这门课似乎主要是与电子打交道，实际上它是在培养一名工程师必备的分析技巧。

熟悉诸如液体流动、机车悬置系统、桥梁设计、供应链管理和过程控制等工程题目的学生将会发现，这里建立的许多描写各种电路行为的方程与其他课程中的方程具有共同形式。只需学会怎样"翻译"有关的变量(例如，用力替换电压、距离替换电荷、摩擦系数替换电阻等)，就知道了怎样处理其他类型的问题。只要注重培养对事物的直观理解，而不是简单地翻书，直到找到一个似乎可用的公式，就完全可以做到这一点。在现实生活中，没有写在书背面的答案，常常会遇到从未有人解决过的问题。但这正是工程师的工作！事情往往是，如果有了解决类似或有关问题的经验，直觉会引导人们找到一个全新问题的答案。

本书的内容是后续电气工程课程的基础。电子学研究依靠对二极管和晶体管电路的分析，用二极管和晶体管可以组成电源、放大器和数字电路。本书所要培养的技巧是被电子工程师熟练而系统应用的方法，有时他们甚至不用笔就可以分析一个复杂电路！本书有关时域和频域的章节将话题直接引向信号处理、输电、控制理论和通信的讨论。研究发现，频域分析是一种特别有效的方法，很容易用于时变激励下的任何物理系统。

1.4　分析和设计

每当有问题需要解决时人们便会找工程师。工程师对各种科学原理有基本的认识，结合一些常用数学语言表达的实际知识以及少量创造性（有时是很多创造性），找到解决方案。许多电路问题只要求分析感兴趣的参数，如：电压、电流或功耗。随着电路复杂性的增加，常常发现，确定几个求解解答所需的公式并不难，但是要得到其余公式将是一个很大的挑战。正是因为这一点，需要有高超的分析技能。

一旦完成分析，问题的答案可能是显而易见的。例如，在电路板上焊接一个关键元件时，发生意外短路，引起设备可观测到的故障状况（例如，冒烟）。这时的解决办法也许只要简单地去掉这个元件，焊上一个替代元件（比第一次仔细一点）就行了。可是工程问题常常需要一些新的创造。如果搁浅在一个荒芜的岛上而仅有一架收音机，则必须利用收音机里的元件设计出一个新电路，发射求救信号。与培养设计技能相比，培养分析技能显得更为重要。

本书致力于培养分析和解决问题的能力，因为这是每个工程应用的出发点。分析和设计之间的一个关键区别是，在分析电路时，希望有一个惟一的答案作为一个通用规则。而设计一般没有惟一的方案。例如，让几个人设计一座房子，有人可能用砖，有人用木头，有人会设计一个二层的寓所，还有人会选择一个简易的村舍。即使严格规定设计规格，每个人仍然可能会给房子涂上不同的颜色！

在本书每章末尾的习题里，大家将有机会自己动手设计。

1.5　计算机辅助分析

用计算机解决电路分析中出现的方程决不是什么新东西。早在机械计算机时代，在对电路、行星运动、经济学和许多其他领域的研究中就迫切希望使用能够迅速求解各种方程的计算机，如Charles Babbage在19世纪早期到中期设计的"分析引擎"（Analytical Engine）。在电子管时代，比如ENIAC计算机，为利用高速计算机求解复杂方程开辟了一条道路。晶体管和随后的集成电路技术的发展使得精确分析日益复杂的系统成为可能。可是，随着个人计算机的发明，计算机辅助电路分析已发展成一个非常有价值的日常工具，它不仅是分析，而且是设计工作的一个组成部分。

计算机辅助设计的最强有力的表现之一是最近实现的对用户透明的多任务集成。这样在计算机屏幕上就可以很快画出电路图，并自动还原为分析程序（如将在第4章介绍的SPICE）所要求的格式。其输出结果自动传递给第三个程序，以便对描述电路的各种感兴趣量进行绘图。这样工程师只要画个草图，按几个按键，就能确定一个复杂电路的工作是否符合期望。现代电路分析软件正迅速提高集成化水平，最终目标是，人们只要坐在计算机终端前，画出电路图，分析电路并确认其性能，再按几下按键，就能得到制造完成的电路样品，然后测试！

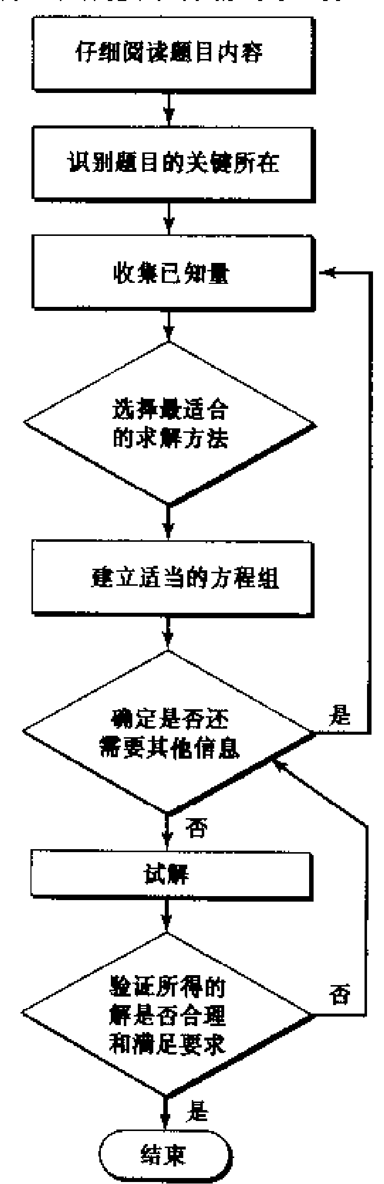
在这里要奉劝读者，电路分析软件决不能替代传统的纸加笔式的良好分析方法，这有很多原因。需要对电路工作有透彻理解，以培养设计电路的能力。运行某个软件包就可得到一个简单问题的答案，但这就像依靠看录像去学钢琴一样，学会几个音节甚至一首短歌，但不大可

能有人愿意听他的演奏。另一个原因是，程序往往有错，更为常见的是，用户往往会输入错误。如果不知道结果会发生什么，那些错误会不知不觉地留下，到发现时已经太晚了。可是，与人的近似分析相结合，这样的软件包具有更细致的电路分析能力。结果将是减少重复性工作，从而可以将更多时间集中到工程细节上。

1.6 解题制胜策略

当被问及什么是电路分析中最令人头痛的部分时，绝大多数同学的回答是对一个习题如何下手。第二困难的事情是怎样得到一组完整的方程，并将它们组织成便于管理的形式。

基本直觉往往是快速阅读题目内容，紧接着搜索适合的方程。人们习惯于给定圆的直径求其周长或是确定一个棱锥体的体积。



制定解题制胜策略要靠实践，也需要相当的耐心、专注和决心。尽管快速解题方法是吸引人的，但从长远看，始终如一的系统解题方法才是更可取的。

假定眼下已具备了耐心、专注和决心，并保证要进行实践，要制定这个十分重要的解题步骤应从哪里开始呢？

本页右侧的流程图是设计用来帮助解决最常见的两个困难：习题入手和解答安排。有的步骤似乎是显然的，但正是每个任务的次序安排以及完成情况才决定成功与否。

仔细阅读题目内容是习题入手的最好方法。辨别出特定目标是决定性的，它往往是选择某个分析方法而不是选择另一个方法的直接原因。一旦收集到已知量并拿出了解决方案，下一步就是按照本书提供的步骤去建立合适的方程组。如果变量太多或者问题的目标不能通过解这些方程达到，就应寻找额外的信息或寻找其他更适合的方法。最后，如果答案不正确，还需重复上述过程。

可是电路分析成功的关键是实践。经验是最好的老师，一名成功工程师的成长离不开从错误中积累经验。

1.7 推荐阅读

G. Polya, *How to Solve It*, Princeton University Press, 1971. ISBN: 0691023565——这是一本世界著名的畅销书，价钱不贵，它能教会读者在似乎不可能解决的习题面前如何制定取胜的策略。

第2章 基本元件和电路

本章要点：

- 基本电量的定义和有关单位
- 对电荷、电流、电压和功率之间关系的理解
- 运用无源符号规则的能力
- 受控及独立电压源和电流源介绍
- 电阻的详细性质和欧姆定律

2.1 引言

先来考虑单位制及几个基本定义和规则。为了解电路怎样工作，首先看看几个不同的电路元件：电压源、电流源、电池和电阻。还应了解电压、电流和功率的概念，因为这些是通常要求的物理量。在开始讲解之前要简单提醒大家，标注电压时，要仔细注意"+"号和"-"号，定义电流时要注意箭头的意义，这往往是产生错误的原因。

2.2 基本单位和单位扩展

为了表示某一可测量的量，不仅要给出它的值，还要给出单位，比如"3英寸"。幸好大家都使用同一种数制。对单位来说却不是如此，必须花一点时间熟悉有关的单位制。必须遵守一个标准单位并保证它的持久性和广泛性。例如，标准长度单位不应定义为某种橡胶带上两个标记之间的距离，因为它不能持久，而且每个人都有自己的标准。

关于单位制可选择的余地很小。本书采用美国国家标准局于1964年所采用的单位制。它为所有主要专业工程协会所采用，也是当今教科书所采用的单位制。这就是国际单位制（在各种语言中一律简写为SI），它于1960年被国际度量衡会议所采纳。从那以后国际单位制经过数次修订，它建立在7种基本单位的基础之上：米、千克、秒、安培、绝对温标、摩尔和坎德拉（见表2.1）。这是"公制"单位，其中有几种单位，尽管现在在美国还未广泛使用，但在大多数技术先进国家已广泛使用。其他量的单位，像体积、力、能量等都是从这7个基本单位里导出的。功或能量的基本单位是焦耳(J)。1焦耳（在国际单位制里为1 kgm^2s^{-2}）等价于0.737 6 英尺－磅力(ft-lbf)。其他能量单位包括卡路里(cal)，1卡路里等于4.187 J。英国热量单位(Btu)是1 055 J。1千瓦小时(kWh)等于 3.6×10^6 J。功率定义为做功或能量消耗的速率。功率的基本单位是瓦(W)，定义为1 J/s。1瓦等价于0.737 6 ft-lbf/s或1/745.7马力(hp)。

国际单位制用10进制将较大和较小的单位与基本单位相联系，用词冠指明10的各次幂。表2.2列出了词冠及其相应的符号。

表 2.1 国际单位制的基本单位

基本量	名称	符号
长度	米	m
质量	千克	kg
时间	秒	s
电流	安培	A
热力学温度	开尔文	K
物质的量	摩尔	mol
光强度	坎德拉	cd

表 2.2 国际单位制词冠

因数	名称	符号	因数	名称	符号
10^{-24}	yocto	y	10^{24}	yotta	Y
10^{-21}	zepto	z	10^{21}	zetta	Z
10^{-18}	atto	a	10^{18}	exa	E
10^{-15}	femto(飞)	f	10^{15}	peta	P
10^{-12}	pico(皮)	p	10^{12}	tera(太)	T
10^{-9}	nano (纳)	n	10^{9}	giga(吉)	G
10^{-6}	micro(微)	μ	10^{6}	mega(兆)	M
10^{-3}	milli (毫)	m	10^{3}	kilo(千)	k
10^{-2}	centi (厘)	c	10^{2}	hecto(百)	h
10^{-1}	deci(分)	d	10^{1}	deka(十)	da

这些词冠值得记住,因为它们不仅经常出现在本书中,而且还经常出现在其他科技图书中。几个词冠的结合(如毫微秒)是不能接受的。值得指出的是:在距离的术语中,专有词"micron(μm)"比衍生词"micrometer"更常见,而 10^{-10} 米常用埃(Å)表示。在电路分析和一般工程中,往往用所谓的"工程单位"来表示数值。在工程表示法中,某个量被表示为介于 1 ~ 999 之间的数字和一个适当的千进制的公制单位。例如,人们更愿意将 0.048 W 表示成 48 mW,而不是 4.8 cW,4.8×10^{-2} W 或 48 000 μW。

练习

2.1 KrF 激光器发射的光波长为 248 nm。它等同于:(a) 0.024 8 mm;(b) 2.48 μm;(c) 0.248 μm;(d) 24 800 Å。

2.2 在某一数字集成电路中,逻辑门从开态转到关态的时间为 1 ns。这对应于:(a) 0.1 ps;(b) 10 ps;(c) 100 ps;(d) 1 000 ps。

答案:2.1 (c);2.2 (d)

2.3 电荷、电流、电压和功率

2.3.1 电荷

电路分析中的一个最基本概念就是电荷守恒。从基本物理学知道,存在两种电荷:正电荷(对应质子)和负电荷(对应电子)。在本书的大部分电路场合下,电子流动占主导地位。有许多器件(如电池、半导体二极管和晶体管)正电荷的运动对于理解器件内部的工作原理是很重要的,但是在器件之外,一般关心的是电子在连接导线上的流动。尽管电荷在电路的不同部分

之间转换，但电荷总量不受影响。换句话说，当电路工作时，电子(或质子)既没有被产生，也没有被消灭[1]。流动的电荷表现为电流。

在国际单位制里，电荷的基本单位是库仑(C)。库仑是借助于电流单位(安培)来定义的，电流是指在1秒钟内通过任意截面导线的电荷量；1库仑规定为运载1安培电流的导线每秒钟流过的电荷量(见图2.1)。在这种单位制里，单个电子的电荷量为 -1.602×10^{-19} C，单个质子的电荷量为 $+1.602\times10^{-19}$ C。

从表2.1可见，国际单位制的基本单位不是从基本物理量导出的，而是与历史上的测量相一致。这有时可能导致似乎逆向的定义，如根据物理意义应该用电子电荷来定义电流。

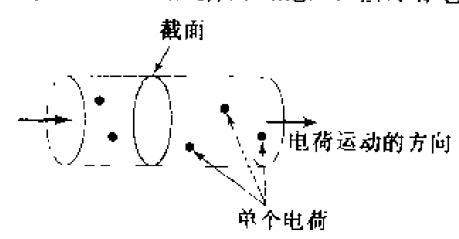


图2.1　流过导线的电荷和库仑定义的图解

不随时间变化的电荷量一般用 Q 表示，瞬时电荷量(可能随时间、也可能不随时间变化)通常用 $q(t)$ 来表示，或简记为 q。在本书以下所有部分都遵从这个约定：大写字母保留做常(时不变)量，而小写字母表示更一般的量。这样，常数电荷可以表示为 Q 或 q，但是随时间变化的电荷必须用小写字母 q 表示。

2.3.2　电流

"电荷传输"或"电荷运动"的概念对学习电路的人来说是至关重要的，因为电荷从一处移动到另一处，就伴随着能量从一处移动到另一处。人们熟悉的跨越区域的电力输送线就是传送能量装置的一个实例。同样重要的是改变电荷传输速率的可能性，而电荷是用来传递信息的。这个过程是诸如无线电广播、电视和测距的基础。

在一定的路径上，如金属线，呈现的电流，不仅有数值，还有方向。电流是以特定方向流经指定参考点的电荷运动的速率之量度。

一旦规定了参考方向，可以让 $q(t)$ 等于从任意时刻($t=0$)以来，以规定方向通过参考点的总电荷量。负电荷以规定方向运动，则形成负电流；正电荷以相反方向运动也形成负电流。例如，图2.2表示流经一段导线(比如图2.1中那样的导线)中给定参考点的电荷总量随时间变化的情况。

定义在特定位置、特定方向的电流为净的正电荷流经该点的瞬时速率。遗憾的是，直到后来才意识到这个被广泛使用的定义是不正确的，实际上电流是由负电荷而不是正电荷的流动产生的。电流用 I 或 i 来表示，所以：

$$i=\frac{dq}{dt} \tag{2.1}$$

电流的单位是以法国物理学家安培(A. M. Ampere)命名的。安培(A)常常缩写为"amp"，不过

[1] 偶尔的冒烟情况也许另当别论。

这种写法并不是公认的。

利用式(2.1)计算瞬时电流，可得到图 2.3。使用小写字母 i 是因为它是瞬时值；大写字母表示常(时不变)量。

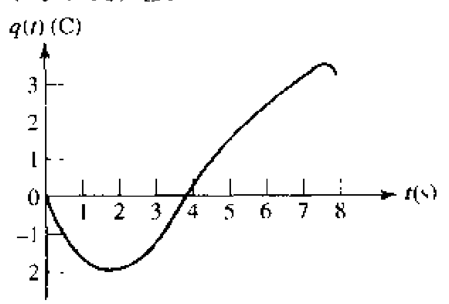


图 2.2 $t=0$ 之后通过给定参考点的总电荷 $q(t)$ 的瞬时值

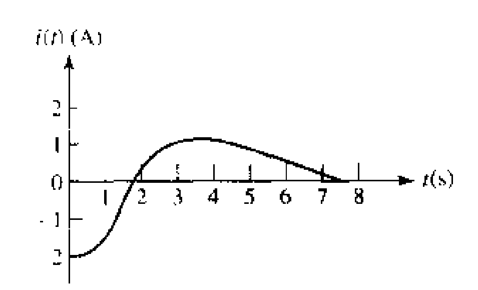


图 2.3 瞬时电流 $i=dq/dt$，其中 q 在图 2.2 中给出

从 t_0 到 t 传输的电荷可以表示为定积分：

$$\int_{q(t_0)}^{q(t)} dq = \int_{t_0}^{t} i dt'$$

在上式中加上直到时刻 t_0 所传输的电荷 $q(t_0)$ 就得到直到时刻 t 的总电荷：

$$q(t) = \int_{t_0}^{t} i dt' + q(t_0) \tag{2.2}$$

图 2.4 中显示了几种不同类型的电流。不随时间变化的电流称为直流电流，简写为 DC(或 dc)，如图 2.4(a) 所示。将会发现许多随时间按正弦变化的电流的实例[图 2.4(b)]，普通民用电路中的电流就是这种类型。这种电流通常称为交流电流或 AC。以后还将遇到指数电流和衰减正弦电流[见图 2.4(c) 和图 2.4(d)]。

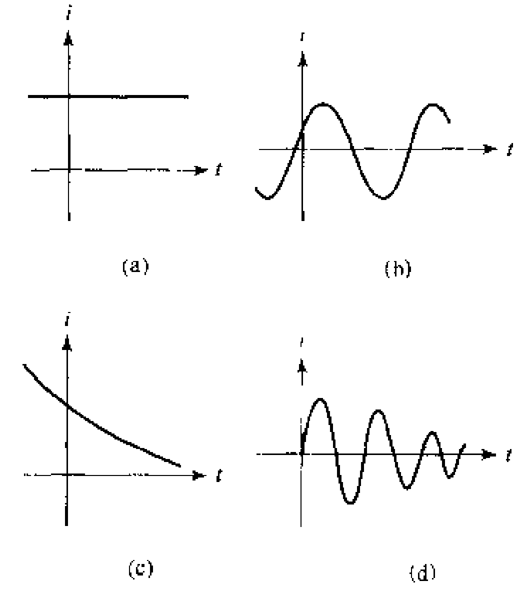


图 2.4 几种电流类型：(a) 直流；(b) 正弦电流；(c) 指数电流；(d) 衰减的正弦电流

可以用导体附近的箭头来表示电流。图 2.5(a) 中的箭头和数值 3 A 表示净正电荷正以 3 C/s 的大小向右移动，或者净负电荷以 -3 C/s 的大小向左移动。图 2.5(b) 中也是两种可能，

要么-3 A 流向左边，要么+3 A 流向右边。所有上述两句话和两张图表示的电流在电效应上是等效的，称它们相等。一个更容易想像的非电类的分析是将电流设想为个人储蓄账户：一笔存款可以认为是负的现金流出你的账户，或者正的现金流入你的账户。

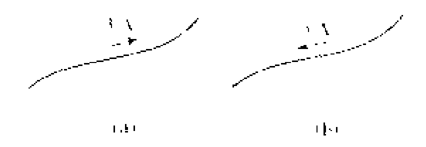


图 2.5 相同电流的两种表示法

尽管金属导体中的电流是源于电子运动，可是把电流看做正电荷的运动很方便。在电离化气体、电解质以及某些半导体材料中，正电荷的运动构成部分或全部的电流。所以电流的两种定义都只能部分地符合电流的物理性质。我们应该采用电流的标准定义和符号。

必须认识到电流箭头并不表示实际的电流方向，它不过是一个约定，以免在讨论"导线中的电流"时产生歧义。箭头是电流定义中的一个基本方面！讨论电流 $i_1(t)$ 的数值而没有规定方向就等于讨论没有定义的东西。例如图 2.6(a) 和图 2.6(b) 表示的 $i_1(t)$ 是无意义的，而图 2.6(c) 是 $i_1(t)$ 的确切表示。

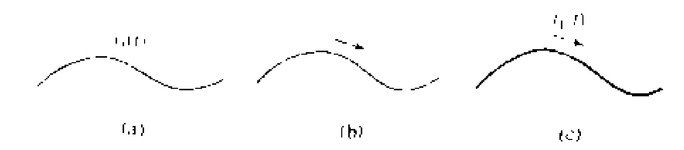


图 2.6 (a)、(b)不完全、不适当和不正确的电流定义；(c) $i_1(t)$ 的正确定义

练习

2.3 在图 2.7 的导线中，电子从左向右移动产生 1 mA 的电流，请确定 I_1 和 I_2。

I_1

I_2

图 2.7

答案： $I_1 = -1$ mA；$I_2 = +1$ mA

2.3.3 电压

现在开始讨论电路元件，最好从一般性定义开始。诸如，保险丝、灯泡、电阻、电池、电容、发电机和火花线圈，都可以表示为简单电路元件的组合。用一个无定形物体表示一般的电路元件，它有两个可以连接其他元件的端点（见图 2.8）。

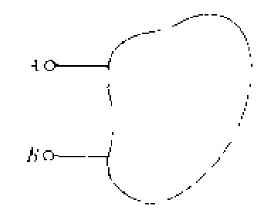


图 2.8 一般两端电路元件

元件有两条供电流流进或流出的通路。以下讨论具体电路元件，其特性可以通过观测端点上的电特性来描述。

在图 2.8 中假定直流电流进入端点 A，通过整个元件，又从端点 B 回来。同时假定，推动电荷流过元件需要消耗能量。所以在两个端点之间存在电压(或电势差)，即电压跨接在元件上。这样，跨接在一对端点上的电压是推动电荷流过元件所需做功的度量。电压的单位是伏特，1 伏特就是 1 J/s。电压用 V 或 v 表示。

电压可以存在于一对电极之间，电极之间可以有、也可以没有电流流过。例如，无论有没有东西接到电极上，汽车电池的两极之间都有 12 V 电压。

按照能量守恒原理，迫使电荷穿过元件所花费的能量必定在别处出现。在以后遇到电路元件时会注意到，那些能量或是以某种形式储存起来并可以方便地以电的形式获得，或者以不可逆形式转变为热、声或其他非电形式。

现在必须建立一种约定，通过选择电极 A 相对于电极 B 的电压符号，以区分提供给元件的能量和元件所提供的能量。如果正电流流进元件电极 A，外加电源肯定要花费能量以建立这一电流，那么电极 A 相对于电极 B 的电压为正。或者也可以说电极 B 相对于电极 A 的电压为负。

电压的意义由一对正负代数符号来表示。例如，在图 2.9(a)中，将电极 A 标为正号(+)，表示电极 A 相对于电极 B 的电压为正 v 伏特。如果后来发现 v 的数值正巧是 -5 V，可以说 A 相对于 B 是 -5 V，或者说 B 相对于 A 是正 5 V。其他情况示于图 2.9(b)，图 2.9(c)和图 2.9(d)。

正像在定义电流时注意到的，必须认识到代数符号的正负并不表明电压的实际极性，这不过是一种约定，使得讨论"加在电极两端的电压"时不至于产生混淆。注意，任何电压的定义必须包含一对正负号！如果只给出变量 $v_1(t)$ 的大小而未标出正负号的位置，就如同使用未定义的量。图 2.10(a)和图 2.10(b)不能用做 $v_1(t)$ 的定义；图 2.10(c)是正确的。

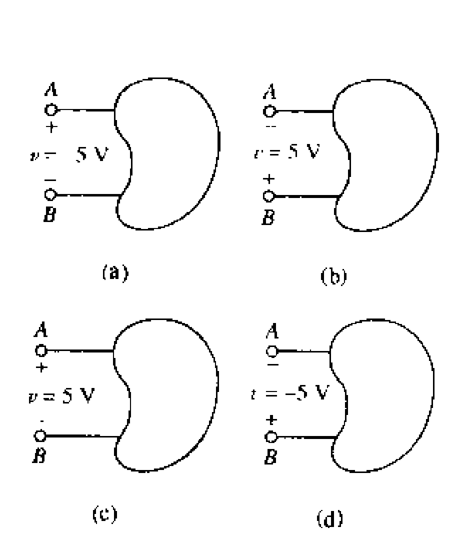


图 2.9 (a)，(b)端点 B 相对于端点 A 为正 5 V；(c)，(d)端点 A 相对于端点 B 为正 5 V

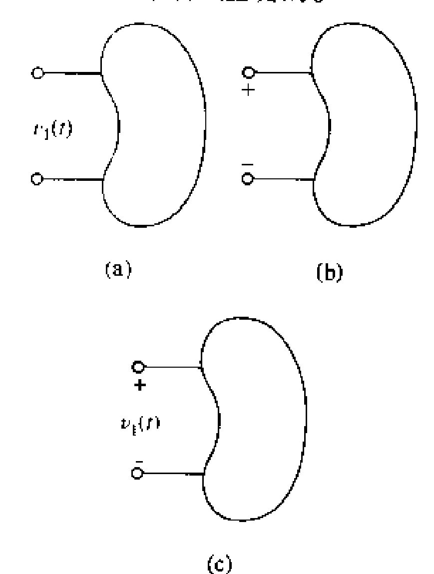


图 2.10 (a)，(b)不正确的电压定义；(c)正确定义不仅包含变量符号，还包含一对正负号

练习

2.4 对于图 2.11 中的元件，$v_1 = 17$ V。求 v_2

答案：$v_2 = -17$ V

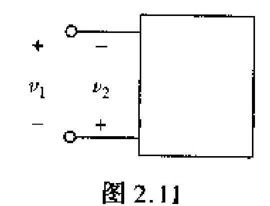


图 2.11

2.3.4 功率

现在需要用电路元件两端的电压和流过它的电流来确定该元件所吸收的功率。我们已经从能量消耗的角度对电压做了定义、功率则是能量消耗的速率。可是只有确定了电流的方向，才能说出图 2.9 中发生的 4 种能量传递过程。假定每个元件的上半部的导线都存在指向右边的电流，标为"+2 A"。因为在图 2.9 (c) 和图 2.9 (d) 中都是 A 端的电位高于 B 端 5 V，还因为正电流从 A 端进入，所以有能量提供给元件。在余下的两种情况中，元件提供能量给外部元件。

我们已经定义了功率，并用 P 或 p 表示。假定在 1 秒钟内 1 焦耳能量通过某个元件被传递，那么能量传递的速率就是 1 瓦特。所吸收的能量必定正比于每秒钟传递的电荷量(电流)，而且也正比于传递 1 库仑电荷所需的能力(电压)。因而：

$$p = vi \tag{2.3}$$

从量纲上讲，上式右端为焦耳每库仑和库仑每秒，即瓦特。在图 2.9 中每个上端标出向右的电流箭头，大小为 2 A，图 2.9(c)和图 2.9(d)中元件吸收的能量为 10 W；而图 2.9(a)和图 2.9(b)中吸收的能量为 -10 W(或产生了 10 W)。电流、电压和功率的约定如图 2.12 所示。

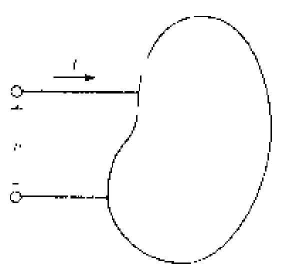


图 2.12 元件吸收的功率由乘积 $p = vi$ 给出。或者换一种说法，元件产生或提供的功率为 $-vi$

图 2.12 说明，如果元件的一端比另一端电位高 v 伏特，如果电流 i 从元件的第一端进入，那么元件吸收的功率为 $p = vi$；同样也可以说、提供给元件的功率为 $p = vi$。如果电流箭头的方向为进入带正号的一端，就满足无源符号规则。应当仔细地研究、理解和记住这一规则，换句话说、如果这样安排电流箭头和电压极性，即电流进入标有正号电压的元件一端，那么元件吸收的功率可以表示为给定电压和电流变量的乘积。如果乘积的数值为负，那么说元件吸收负功率、或者，实际上元件产生功率、并且将功率提供给其他外部元件。例如在图 2.12 中，$v = 5$ V，$I = -4$ A，元件可以被描述为吸收 -20 W 功率，或产生 20 W 功率.

当做一件事情有多种方法时，才需要规则，当两组不同的人试图交流时就会产生混淆。例如，将地图的上方总是标为北是相当任意的，指北针并不是任何时候都指向上方。而且，如果同一个习惯将地图上部标为南的人进行交流，可想而知会发生什么样的混乱！同样，IEEE[1]建立的通用规则是，无论元件是提供还是吸收功率，总是将电流的方向画为指向进入正电压一端。这一规则并不错，但是有时导致电路图中与直觉相反的电流。更自然的方法应当是将正电流标成流出一个电压或电流源，为一个或多个电路元件提供正功率。

[1] Institute of Electrical and Electronics Engineers，电气与电子工程师协会。

例题 2.1 计算图 2.13 中每一部分的吸收功率

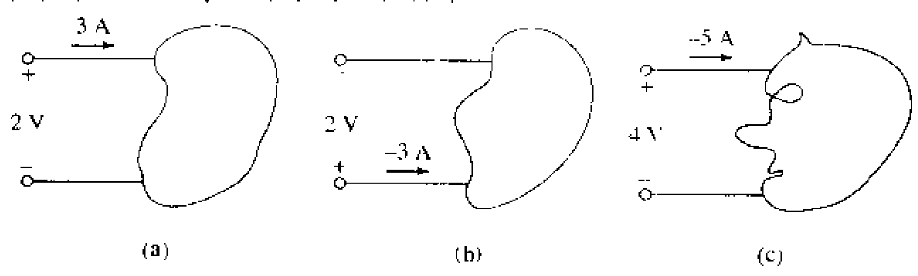


图 2.13 (a)、(b)、(c)双端元件的 3 个例子

在图 2.13(a)中，参考电流的定义与无源符号规则一致，它假定元件吸收功率。给定 +3 A 电流流入正参考端，求得：

$$P = (2\ \text{V}) \times (3\ \text{A}) = 6\ \text{W}$$

功率被元件吸收。

图 2.13(b)中，示出了稍微不同的情况，现在电流是 −3 A 流入正参考端。可是电压定义为负。由此得出吸收功率为：

$$P = (-2\ \text{V}) \times (-3\ \text{A}) = 6\ \text{W}$$

从中可见这两种情况实际上是等效的。在改变了某一端为正之后，必须将原来的电压乘以 −1。+3 A 电流从上端流入等同于 −3 A 电流从下端流出。

参见图 2.13(c)，再次应用无源符号规则，求得吸收功率为：

$$P = (4\ \text{V}) \times (-5\ \text{A}) = -20\ \text{W}$$

因为得到的吸收功率为负，这说明图 2.13(c)的元件实际上是提供 +20 W 功率的(即它是能量源)。

练习

2.5 求图 2.14(a)中电路元件吸收的功率

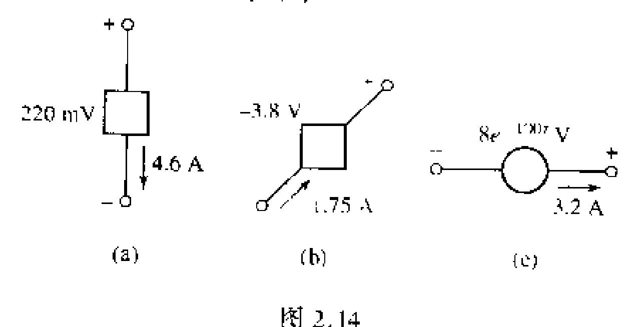


图 2.14

2.6 求图 2.14(b)中电路元件产生的功率。

2.7 求图 2.14(c)中，在 $t = 5$ ms 时提供给电路元件的功率。

答案：1.012 W；6.65 W；−15.53 W

2.4 电压源和电流源

利用电流和电压的概念，现在可以更确切地定义“电路元件”了。

重要的是区分物理器件本身和用来分析其电路特性的数学模型。模型只是一种近似。

下面用"电路元件"来表示元件的数学模型。为实际器件选择某种模型,必须根据实验数据或经验,这里假定已经选出了模型。为简单起见,在初始阶段先考虑由简单模型表示的理想元件组成的电路。

所有简单电路元件可以按照流经元件电流与元件两端电压之间的关系来分类。例如,如果元件两端电压线性正比于流经元件的电流,这种元件称为电阻。另一种类型的简单电路元件是,两端电压正比与电流对时间的导数(电感),或正比于电流对时间的积分(电容)。有的元件其电压完全独立于电流,或者其电流完全独立于电压,这些元件称为独立源。还有,需要定义一种特殊电源,它们的源电压或源电流取决于电路中另一处的电流或电压,这种电源称为受控源。受控源广泛用于电子学中以模拟晶体管的直流或交流特性,尤其是在放大器电路中。

按照定义,简单电路元件是两端电器件的数学模型,它的特性完全由其电压-电流关系所决定,且不能再分成为其他两端器件。

2.4.1 独立电压源

将要考虑的第一个元件是"独立电压源"。它的电路符号示于图2.15(a)中。下标 s 仅仅表示电压为"源"电压,这种方法是常见的,但不是必需的。独立电压源的特点是端电压完全独立于流过它的电流。这样,如果给定一个电压源的端电压为12 V,那么无论流经的电流是多大,端电压永远如此。

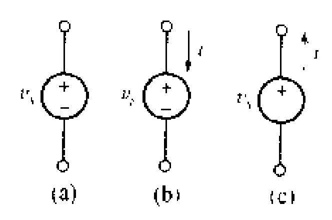


图2.15 独立电压源的电路符号

独立电压源是一种理想电源,不能严格表示任何实际物理器件,因为理想电源理论上可以提供无限大的能量。可是理想电压源确实提供了几种实际电压源合理的近似。例如,汽车蓄电池有12 V端电压,只要流过的电流不超过几个安培,其端电压基本上保持为常数。小电流可以从两个方向流过电池。如果电流为正,且流出电池正端,那么电池为汽车前灯提供功率;如果电流为正,且流进电池正端,那么电池从发电机吸收能量而充电。平常家用电插座也近似于一个独立电压源,提供 $v_s = 115\sqrt{2}\cos 2\pi\,60t$ V的电压(北美),这一近似对小于20 A的电流是有效的。

直流电压源和直流电流源被广泛使用,字面上,它们分别表示"直接电流电压源"和"直接电流电流源"。尽管这些术语似乎有些奇怪甚至冗余,但这些术语使用得如此广泛,以至于无法改正。

有一点值得重申,在图2.15(a)中独立电压源符号上端标注的正号并不一定表示上端电压的数值真的相对于下端为正,它只表示上端电压比下端电压高 v_s 伏。在某些场合,v_s 可能为负,这时上端电压相对于下端电压实际上为负。

设想在图2.15(b)的电源上端附近标出电流 i,其方向为进入电源正端,满足无源符号规

则，这样电源吸收功率 $p=v_si$。常见的是电源给网络提供功率而不是吸收功率。因此选择图 2.15(c)中的箭头方向，使 v_si 表示电源提供的功率。这两种箭头方向都可采用，在本书中采用图 2.15(c)中的规则来表示电压源和电流源，它们不是无源元件。

具有常数端电压的独立电压源通常称为独立直流电压源，可以用图 2.16(a)或图 2.16(b)来表示。注意在图 2.16(b)中示出了电池的物理结构，长条板放在正端；这样正负号标注显得多余，但通常都是这样标注的。出于完整性的考虑，图 2.16(c)给出了独立交流电压源的符号。

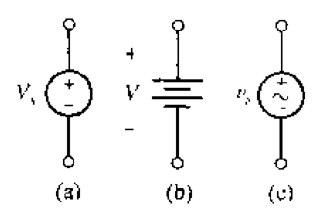


图 2.16 (a)直流电压源符号；(b)电池符号；(c)交流电压源符号

2.4.2 独立电流源

需要的另一个理想电源是“独立电流源”。这里，流过元件的电流完全独立于元件两端的电压。图 2.17 给出了独立电流源的符号，我们称这种电源为独立直流电流源。

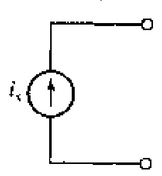


图 2.17 独立电流源的电路符号

像独立电压源一样，独立电流源充其量不过是一种物理元件的合理近似。理论上，它可以提供无限大的功率，因为它在任何端电压下产生相同的有限电流。可是它确实是实际电源的很好近似，尤其是在电子电路中。

2.4.3 受控电源

至此讨论的两种理想电源称为独立电源，因为电源的值不以任何方式受到电路其他部分的影响。这与另一类理想电源——相关源或受控源相反，受控源的值决定于所分析系统某处的电压或电流。这类电源出现在许多等效电路模型中，比如晶体管、运算放大器和集成电路。为区分独立源与受控源，引入图 2.18 中的菱形符号。在图 2.18(a)和图 2.18(c)中，K 是无量纲的标量。在图 2.18(b)中，g 是具有 A/V 单位的标量系数。在图 2.18(d)中，r 是具有 V/A 单位的标量系数。控制电流 i_x 和控制电压 v_x 必须在电路中定义。

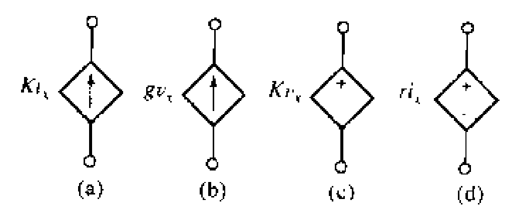


图 2.18 4 种受控源类型：(a)电流控制电流源；(b)电压控制电流源；(c)电压控制电压源；(d)电流控制电压源

例题 2.2　在图 2.19(a)电路中,已知 v_2 为 3 V,求 v_L

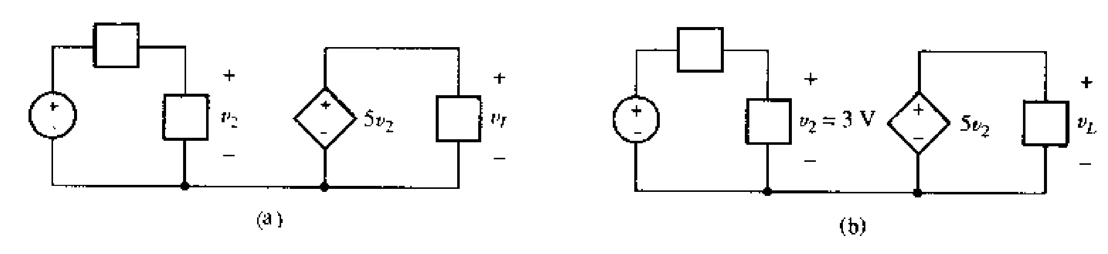


图 2.19　(a)含有电压控制电压源的电路;(b)其余信息在图中提供

仔细阅读题意之后,问题的目标是得到标为 v_L 的电压。

所给电路只标出了一部分,附加信息为 $v_2=3\ V$。将它加入到电路中,得到图 2.19(b)。

下一步,回头看看收集到的信息。在检查电路过程中,注意到所求电压 v_L 与受控源的端电压相同。这样:

$$v_L=5v_2$$

此时,只要知道 v_2 就可完成问题解答!

回到电路,实际上确实知道 v_2,它为 3 V。如果事先已经将图 2.19(b)中的受控源的值更新,就会知道 $v_L=15\ V$。花费一点时间完成电路图的标注总是一种好的投资。通过快速验证可以确信,答案是正确的。

练习

2.8　求图 2.20 的电路中每个元件所吸收的功率。

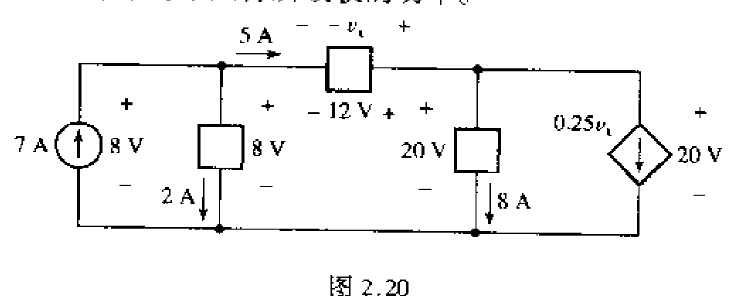


图 2.20

答案:(从左至右) −56 W;16 W; −60 W; 160 W; −60 W

受控和独立电压、电流源是有源元件,它们有能力对外部器件提供功率。目前暂且认为无源元件是一种只能接受功率的元件。可是以后将会看到,有些无源元件能够储存有限的能量,然后将能量返回给其他外部器件。因为仍然希望称它们为无源元件,所以必须在以后将原先的两个定义做一些修改。

2.4.4　网络和电路

两个或更多的简单电路元件互相连接就形成电网络。如果网络包含至少一个闭合回路,那它也是一个电路。注意:任何电路都是网络,但不是所有网络都是电路(见图 2.21)!

含有至少一个有源元件的网络(例如独立电压源或电流源)称为有源网络,不含任何有源元件的网络称为无源网络。

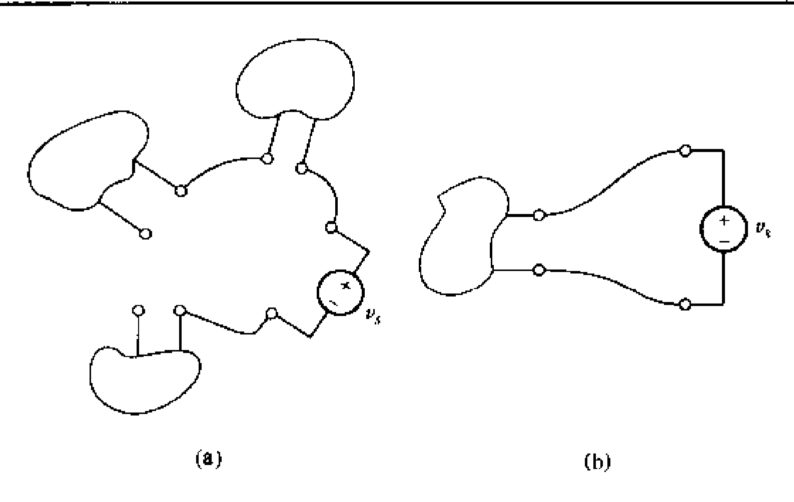


图 2.21 (a)非电路网络;(b)电路网络

现在定义了电路元件,给出了几种特定电路元件——独立源和受控源的定义。在本书余下部分将只定义 5 种其他电路元件:电阻、电感、电容、变压器和理想运算放大器(简称运放,op amp)。这些就是所有的理想元件。它们很重要,因为可以把它们连接起来形成网络和电路,按要求的精度表示真实器件。这样图 2.22(a)和图 2.22(b)所示的晶体管可以用由 v_{gs} 表示的电压端对和单一的受控电流源来模拟,见图 2.22(c)。受控电流源产生的电流取决于电路中另一处的电压。这一模型用起来很好,只要正弦信号的频率不是太高或太低。这一模型经过修正,加上另一些理想电路元件,如电阻和电容,还可以用于考虑频率相关的效应。

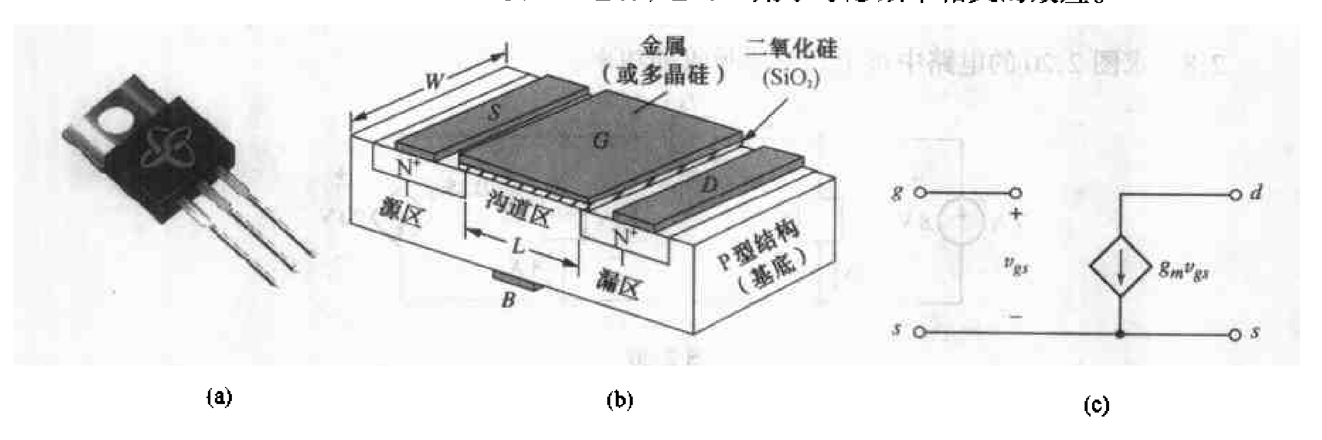


图 2.22 金属氧化物半导体场效应晶体管(MOSFET)。(a) TO-5 封装的分离式晶体管;(b)截面图;(c)用于交流电路分析的等效电路模型

这样的晶体管仅是集成电路的一小部分,然而一个小于 2 mm×2 mm 见方,200 μm 厚的集成电路却包含几千个晶体管和各种电阻电容。这样一个大小等于本页上一个字母的实际器件,却包含 1 万个理想简单电路元件的模型。“电路模型”的概念广泛应用于与电气工程相关的课程中,包括电子学、能源转换和天线。

2.5 欧姆定律

至此已经介绍了受控源和独立源,并已知它们是理想化有源元件,在实际电路中只能近似

表示。现在准备介绍另外的理想元件——线性电阻。电阻是最简单的无源元件。讨论从德国物理学家 Georg Simon Ohm 的工作开始。他于 1827 年发表的小册子，描述了电流和电压测量的最初结果，从数学上建立了电流和电压之间的关系。他的结果现在称之为"欧姆定律"(尽管后来知道这一结论早在 46 年前就被英格兰一位很有才气的半隐居者 Henry Cavendish 所发现)。当时欧姆地位平凡，他的小册子在发表后的最初几年中受到很多不公正的批评和嘲笑，但后来被接受，以澄清与他名字相关的不公正看法。

欧姆定律指出，导体材料上的电压正比于流过这一材料的电流，即：

$$v = iR \tag{2.4}$$

其中，比例常数 R 称为"电阻"，电阻的单位是欧姆，即 1 V/A，习惯上用大写字母 Ω 表示。

用 i-v 坐标画出这一方程的图形时，图形是通过原点的一条直线(见图 2.23)。方程(2.4)是线性方程，它就是线性电阻的定义。因此，如果与任何简单电路元件有关的电流和电压比率是常数，那么这个元件就是线性电阻，它的电阻值等于电压对电流的比率。尽管用特殊电路可以模拟负电阻，但通常认为电阻是一个正的量。

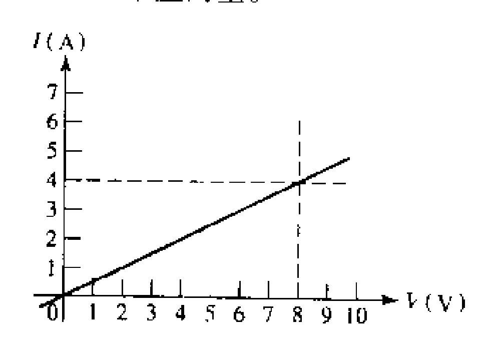


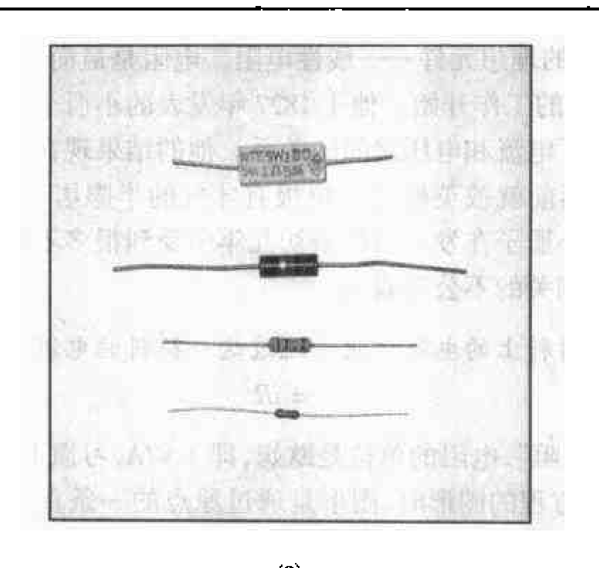
图 2.23　一个 2 Ω 线性电阻的电流－电压关系

必须强调指出，线性电阻是一个理想化电路元件，它只是实际物理元件的数学模型。电阻器很容易买到，也很容易制造，但是你很快就能发现，这种物理元件的电压－电流比率只在电流、电压或功率的一定范围内保持为常数，电阻的大小还与温度和其他环境因素有关。一般将线性电阻简称为电阻，而总是将任何非线性电阻确切地称为非线性电阻。不能把非线性电阻看成是不受欢迎的元件。尽管它们的存在确实使分析变得更加复杂，但有些元件的性能正是依靠它的非线性或由于非线性的存在而使性能大大改进。例如，用做过流保护的保险丝和用做电压调整的稳压二极管都是非线性程度很大的元件，在电路设计中正是利用了它们的非线性特性。

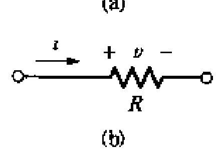
2.5.1　功率吸收

图 2.24 示出了几种不同电阻的封装形式以及电阻的最常用电路符号。与已经采用的电压、电流和功率规则相一致，v 和 i 的乘积给出电阻吸收的功率。即按照无源元件规则选择 v 和 i。被吸收的功率以热和/或光的形式出现，而且总是正的，一个(正)电阻是无源元件，不能提供或储藏功率。吸收功率的一个替代表达式为：

$$p = vi = i^2R = v^2/R \tag{2.5}$$



(a)



(b)

图 2.24 (a)一些有代表性的电阻(体积大的用在功率耗散大的场合);(b)电阻的电路符号

本书的作者之一(他不希望指明)曾经有过不幸的经历,不适当地将 100 Ω 电阻连接到 110 V 电源上。继而产生的火苗、烟和爆裂是相当令人震惊的。它表明实际的电阻只是在一定限度内表现得像一个理想线性电阻模型。在当时情况下,那个不幸的电阻被要求去吸收 121 W 的功率,可是按照设计它只能承受 2 W,可以理解它的反应是多么激烈。

实际应用

线规

从技术上讲,任何材料(除了超导体)都对电流流动产生阻挡作用。可是如同所有电路教材,这里未加说明地假定电路图中导线的电阻为零。这意味着导线两端没有电势差,并且没有功率吸收和热量产生。尽管通常这是一个合理的假设,但它确实忽略了需要对不同应用选择合适的导线规格。

电阻决定于:(1)材料的本征电阻率;(2)元件的几何尺寸。电阻率用 ρ 表示,是度量电子穿过材料的难易程度。每种材料都有不同的与温度有关的本征电阻率,一定物体的电阻是电阻率与电阻器长度 l 的乘积除以截面积(A),如式(2.6)所示;这些参数示于图 2.25。

$$R = \rho \frac{l}{A} \tag{2.6}$$

因为电流流动会产生热,通过选择制作导线的材料类型和测量应用环境的温度可以决定电阻率,现实中的导线只能吸收有限的功率。粗的导线电阻较小,且散发热量也容易,但是重

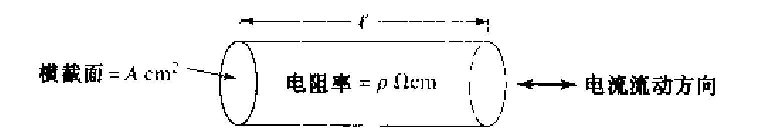


图 2.25　用于计算导线电阻的几何参数定义(假定材料电阻率在空间上是均匀的)

量大、体积大,且价格昂贵。美国导线规格(AWG)是一个确定导线尺寸的标准系统。在选择电线规格时,较小的 AWG 对应较大的电线直径,表 2.3 为常用线规简表。

表 2.3　常用线规和(软)实心铜线的电阻

导体尺寸 (AWG)	截面积 (mm^2)	20 ℃下每 1 000 英尺[①]的电阻
28	0.0804	65.3
24	0.205	25.7
22	0.324	16.2
18	0.823	6.39
14	2.08	2.52
12	3.31	1.59
6	13.3	0.395 2
4	21.1	0.248 5
2	33.6	0.156 3

例题 2.3　一根导线跨过 2 000 英尺距离接到一个大功率灯泡上,它吸收 100 A 电流。如果使用 4 AWG 的导线,有多少功率消耗(即损失或浪费)在导线内?

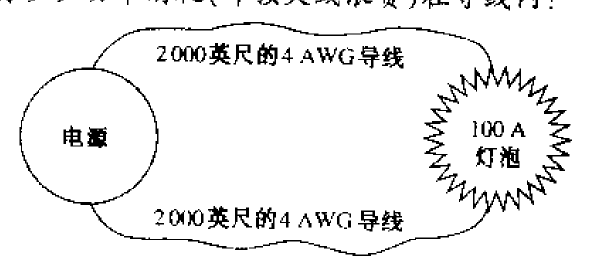


图 2.26　电灯电路草图

解决这个问题的第一步最好是画一个草图,如图 2.26 所示。从表 2.3 可见 4 AWG 电线是 0.248 5 Ω/1 000 英尺。去电灯的电线有 2 000 英尺长,返回电源的电线也是 2 000 英尺长,总长 4 000 英尺。这样电线的电阻为:

$$R = (4\,000\ \text{英尺}) \times (0.248\,5\ \Omega/1\,000\ \text{英尺}) = 0.994\ \Omega$$

功率消耗为 i^2R,其中 $i = 100$ A。所以导线消耗功率为 9 940 W 或 9.94 kW。可见,即使电阻小于 1 Ω,导线消耗的功率也是巨大的。这些功率必须由电源提供,而未进入灯泡!

① 1 英尺 = 0.3048 m——编者注。

2.5.2 电导

对于线性电阻，电流与电压之比也是常数：

$$\frac{i}{v}=\frac{1}{R}=G \tag{2.7}$$

其中 G 称为电导。电导的 SI 单位是西门子(S)。它的非正式旧称为“姆欧”，简记为颠倒的大写字母 ℧。偶然会在一些电路图里以及目录和教材里见到它。电导和电阻所用电路符号相同[见图 2.24(b)]。它吸收的功率必定是正的，可以用电导表示为：

$$p=vi=v^2G=\frac{i^2}{G} \tag{2.8}$$

这样，一个 2 Ω 的电阻所具有的电导为 1/2 S。如果流过 5 A 的电流，在两个电极之间将产生 10 V的电压，被它消耗的功率为 50 W。

迄今为止在本节所给出的表达式里，使用的都是瞬时电流、电压和功率，例如 $v=iR$，$p=vi$。应该回忆起，这是对 $v(t)=Ri(t)$和 $p(t)=v(t)i(t)$的简记。流过电阻的电流和跨在电阻上的电压必定以同样方式随时间变化。这样，如果 $R=10\ \Omega$，$v=2\sin 100t$ V，那么 $i=0.2\sin 100t$ A。注意，功率为 $0.4\sin^2 100t$ W。画一个简单的草图，可以看清这些变量随时间变化的不同性质。尽管电流和电压在某一时间段内为负，吸收功率却从不为负！

可以根据电阻来定义两个常用术语：短路和开路。定义短路(短接的电路)为一个零欧姆的电阻。因为 $v=iR$，不管电流是多少，短接电路上的电压必定为零。同样，定义开路为一个无限大的电阻。按照欧姆定律，无论跨在开路上的电压是多少，电流必定为零。尽管真实导线有一些电阻，除非特别指出，总是假定导线电阻为零。这样，在所有电路图中的导线被视为完全短路。

练习

参见图 2.27 中 v 和 i 的定义，计算下列各量：

2.9　假定 $i=-1.6$ mA，$v=-6.3$ V，计算 R 值。

2.10　假定 $v=-6.3$ V，$R=21\ \Omega$，计算其吸收的功率。

2.11　假定 $v=-8$ V，R 吸收功率 0.24 W，计算流过的电流 i。

答案：3.94 kΩ；1.89 W；−30.0 mA

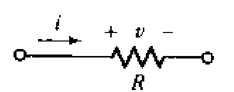


图 2.27

2.6 小结与复习

- 电气工程中最常用的单位制是国际单位制(SI)。
- 正电荷移动的方向是正电流流动的方向；换句话说，正电流流动方向与电子运动方向相反。
- 必须给定数值和方向才能定义电流。通常用大写字母 I 表示直流(DC)电流，用 $i(t)$或简写 i 表示其他电流。

注意，以 $i(t)$或 i 表示的电流可以是常数(DC)或(随)时(间)变(化)值，但是以符号 I 表示的电流必须是非时变的。

- 除了给出数量(用代数符号或数值)，还必须在电极上表明“+”和“−”符号，才能定义跨

在元件上的电压。

- 任何元件只要正电流从它的正电压端流出就提供正功率。任何元件只要正电流往它的正电压端流入就吸收正功率。
- 有 6 种电源：独立电压源、独立电流源、电流控制电流源、电压控制电流源、电压控制电压源、电流控制电压源。
- 欧姆定律指出，跨在线性电阻上的电压直接正比于流过电阻的电流，即 $v = iR$。
- 电阻上消耗的功率（它导致热量产生）由 $p = vi = i^2R = v^2/R$ 给出。
- 在电路分析中通常假定导线的电阻为零，可是在为不同的应用选择导线规格时，必须考虑电气和防火规则。

习题

1. 将下列量转化为工程表示：

   (a) 1.2×10^{-5} s　(b) 750 mJ
   (c) 1 130 Ω　(d) 3 500 000 000 bit
   (e) 0.006 5 μm　(f) 13 560 000 Hz
   (g) 0.039 nA　(h) 49 000 Ω
   (i) 1.173×10^{-5} μA

2. 将下列量转化为工程表示：

   (a) 1 000 000 W　(b) 12.35 mm
   (c) 47 000 W　(d) 0.005 46 A
   (e) 0.033 mJ　(f) 5.33×10^{-6} mW
   (g) 0.000 000 001 s　(h) 5 555 kW
   (i) 32 000 000 000 pm

3. 一辆快速电动小汽车配有 175 马力[①] 发动机：(a)假定电功率到机械功率的转换效率为 100%，这台发动机需要多大功率？(b) 假定发动机连续运转 3 小时，消耗的能量是多少焦耳？(c) 假定单个铅酸电池的容量为 430 kWh，一共需要多少个电池？
4. 一台 KrF 准分子激光器产生的激光脉冲能量为 400 mJ，脉宽为 20 ns：(a) 激光器的峰值瞬时功率是多少？(b) 假定每秒只产生 20 个脉冲，激光器输出平均功率是多少？
5. 一台带放大器的钛－蓝宝石激光器产生的激光脉冲能量为 1 mJ，脉宽为 75 fs，(a) 激光器峰值瞬时功率是多大？(b) 假定每秒只产生 100 个脉冲，激光器输出平均功率是多大？
6. 某种电池提供的功率在开始的 5 分钟为 6 W，随后的 2 分钟为零，随后的 10 分钟按线性增长到 10 W，又在 7 分钟内按线性从 10 W 下降到零：(a) 在整个 24 分钟内消耗的能量是多少焦耳？(b) 这期间的平均功率是多大？
7. 某一元件积累的总电荷由 $q = 18t^2 - 2t^4$ C 给出：(a) 在 $t = 2$ s 时积累的电荷为多少？(b) 在 $0 \leqslant t \leqslant 3$ s 时间内积累的最大电荷为多少？发生在何时？(c) 在 $t = 0.8$ s 时电

① 1 马力 = 0.735 kW——编者注。

荷积累速率是多少？（d）画出 q 对 t 和 i 对 t 在 $0 \leqslant t \leqslant 3$ s 内的曲线。

8. 图 2.6(c)中 $i_1(t) = -2 + 3e^{-5t}$ A，$t<0$ 或 $i_1(t) = -2 + 3e^{3t}$ A，$t>0$，求：(a) $i_1(-0.2)$ 的值；(b) $i_1(0.2)$的值；(c) $i_1 = 0$ 的时刻；(d) 在 $-0.8 < t < 0.1$ s 时间内，沿着导体从左向右通过的总电荷。

9. 图 2.28 所示波形的周期为 10 s，求：(a) 一个周期内的平均电流值；(b) 在区间 $1 < t < 12$ s 内传送的电荷是多少？（c）假定 $q(0) = 0$，画出曲线 $q(t)$，$0 < t < 16$ s。

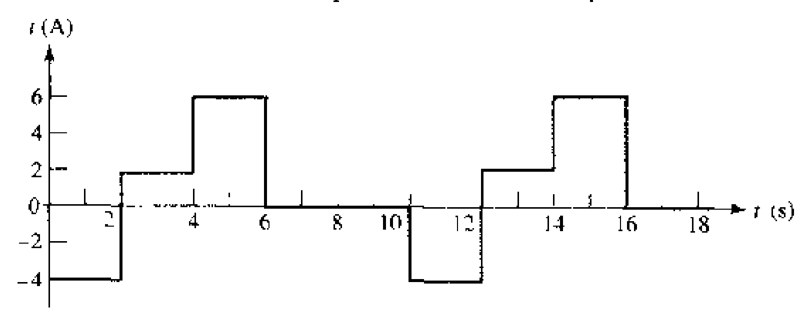


图 2.28

10. 确定图 2.29 中每个电路元件吸收的功率。

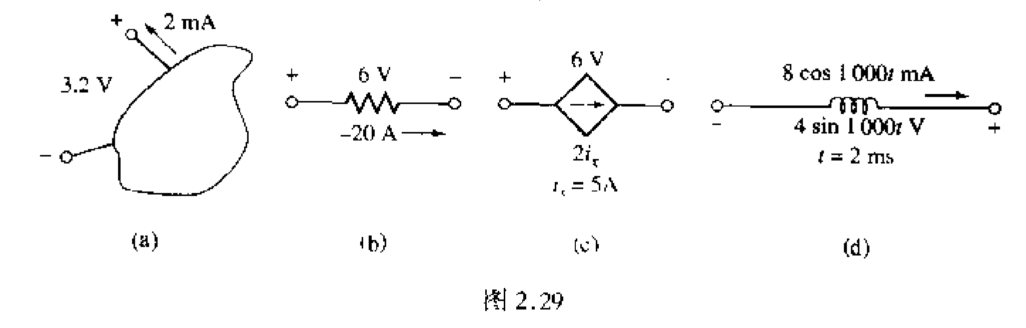


图 2.29

11. 在图 2.30 中假定电路元件的 $i = 3te^{-100t}$，且 $v = (0.006 - 0.6t)e^{-100t}$：(a) 在 $t = 5$ ms 时电路元件吸收的功率是多少？(b) 在 $0 < t < \infty$ 内提供给元件的能量是多少？

12. 在图 2.30 中 $i = 3e^{-100t}$ A，假定 v 等于：(a) $40i$；(b) $0.2di/dt$；(c) $30\int_0^t idt + 20$ V。求电路元件在 $t = 8$ ms 时吸收的功率。

13. 图 2.31 给出了美国佛罗里达州夏季中午 12 时暴露于直射阳光下的硅太阳能电池的电流－电压特性曲线：(a) 短路电流值为多少？(b) 开路电压值为多少？(c) 估计从器件可能获得的最大功率是多少？

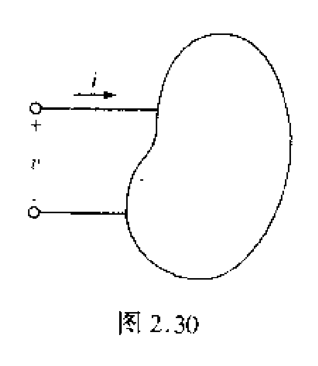


图 2.30

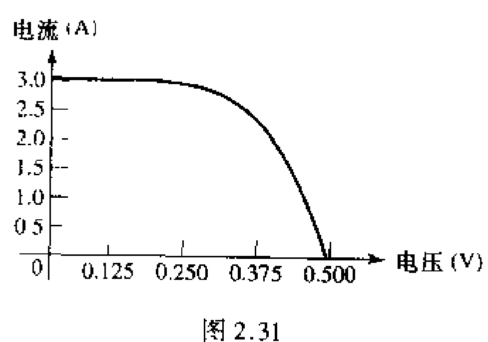


图 2.31

14. 确定图 2.32 中的 5 个电源哪些被充电（吸收正功率），证明 5 个电源吸收功率的代数和为零。

15. 在图 2.33 所示的简单电路中，流过每个元件的电流都相同。假定 $V_x = 1$ V，$V_R = 9$ V，计算：(a) 元件 A 吸收的功率；(b) 两个电源每个提供的功率是多少？(c) 是否"提供的总功率 = 吸收的总功率"？你认为结果合理吗？为什么？

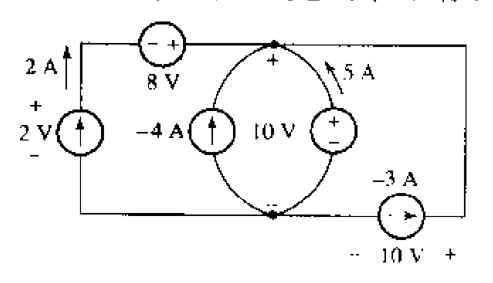


图 2.32

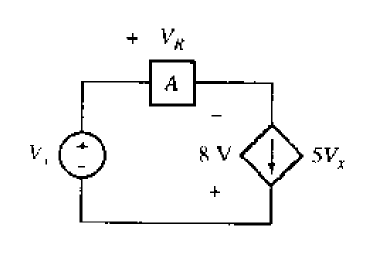


图 2.33

16. 图 2.34 中，$v_2 = 1\,000i_2$，$i_2 = 5$ mA，确定 v_S。

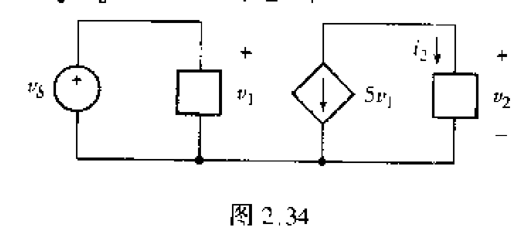


图 2.34

17. 用一个 12 V 的铅酸电池和汽车前灯构成一个简单电路，假定在 8 小时的放电时间内电池提供的总能量为 460.8 瓦时：(a) 提供给前灯的功率是多少？(b) 流过灯泡的电流是多少（假定放电期间电池电压保持为常数）？

18. 需要为某一应用选择保险丝。可选保险丝标出的熔断电流分别为 1.5 A，3 A，4.5 A，5 A。如果供电电压为 110 V，最大允许耗电功率为 500 W，应该选哪个保险丝？为什么？

19. 图 2.35 中电阻 $R = 1\,200\ \Omega$，如果：(a) $i = 20e^{-12t}$ mA；(b) $v = 40\cos 20t$ V；(c) $vi = 8t^{1.5}$ VA。求在 $t = 0.1$ s 时 R 吸收的功率。

图 2.35

20. 某电压在前 20 ms 为 +10 V，在随后的 20 ms 为 −10 V，并如此往复振荡。此电压加在 50 Ω 的电阻上。在任意一个 40 ms 间隔上求：(a) 电压最大值；(b) 电压平均值；(c) 电阻上的平均电流值；(d) 吸收功率最大值；(e) 吸收功率平均值。

21. 长为 l，均匀截面积为 A 的导体的电阻为 $R = l/(\sigma A)$，其中 σ 是电导率。假定铜的电导率为 $\sigma = 5.8 \times 10^7$ S/m，求：(a) 50 英尺长的 # 18 铜线（直径 = 1.024 mm）的电阻；(b) 如果电路板上的铜箔导体厚 33 μm，0.5 mm 宽，它在 50 ℃下能安全承载 3 A 电流，求 15 cm 长的这种铜箔的电阻以及 3 A 电流下铜箔上消耗的功率。

22. 在图 2.36 电路中，流过所有 3 个元件的电流相等。根据事实"提供的所有功率 = 吸收的所有功率"，证明电阻 R_2 上的电压由下式给出：

$$V_{R_2} = V_S \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

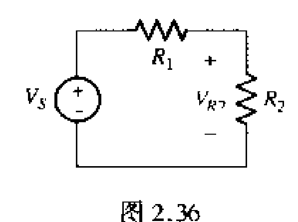


图 2.36

23. 利用可调电源设定一系列电压，然后测量流进某一双端元件的电流，获得如下测量结果：

电压(V)	电流(mA)
−1.5	−3.19
−0.3	−0.638
0.0	1.01×10^{-8}
1.2	2.55
2.5	5.32

(a) 画出电流 − 电压曲线；(b) 计算该元件的有效电导和电阻；(c) 如果电阻增大为 3 倍，在另一图上中画出电流 − 电压曲线。

24. 对于图 2.37 中的每个电路求电流 I 和电阻吸收的功率。

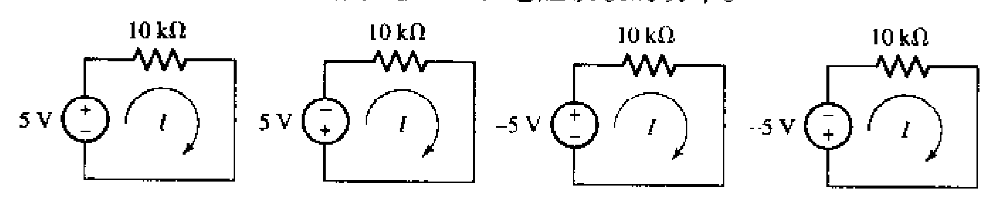


图 2.37

25. 在电路图中常常见到电压、电流和电阻标有各种下标。在图 2.38 电路中，电压 v_π 出现在电阻 r_π 上。如果 $v_s = 0.01 \cos 1\,000t$ V，求 v_{out}。

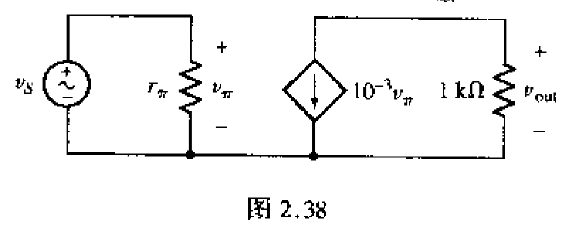


图 2.38

26. 用一段沿路边铺设的 18 AWG 实心铜线，将传感器连接到中心计算机系统。如果已知电线电阻为 53 Ω，电线总长为多少(假定温度为 20 ℃)？

27. 假定你搁浅在一个荒芜的岛上，岛上空气温度为 108 °F[①]。你的发射机已不能工作，问题是一个 470 Ω 电阻坏了。好在发现一大团 28 AWG 的实心铜线也被冲到岸边。作为 470 Ω 电阻的替代物，要用多少英尺的电线？注意，这个岛位于热带，温度比表 2.3 引用的温度 20 ℃要暖和一些。利用下列关系式可以修正表 2.3 中的电阻值：

① 华氏度。1 华氏度 = 0.555 556 K——编者注。

$$\frac{R_2}{R_1}=\frac{234.5+T_2}{234.5+T_1}$$

其中：T_1 = 参考温度（这里为 20 ℃）

R_1 = 参考温度下的电阻值

T_2 = 新温度（摄氏度）

R_2 = 新温度下的电阻值

28. 二极管是一种非常普通的双端非线性器件，它可以用下列电流 - 电压关系进行模拟：

$$I=10^{-9}(e^{39V}-1)$$

(a) 对于 $V=-0.7$ V 到 0.7 V，画出电流 - 电压特性曲线；(b) 在 $V=0.55$ V 二极管的有效电阻是多大？(c) 在多大电流下二极管的电阻为 1 Ω？

29. 修理一个便携机器上的电压调整器需要一个 10 Ω 电阻，手头仅有的材料是 10 000 英尺（见表 2.3 中列出的各种规格的线圈）。请设计一个适当的电阻。

30. N 型单晶硅的电阻率为 $\rho=1/qN_D\mu_n$，其中 q 为电子电荷 1.602×10^{-19} C，N_D = 每立方厘米的磷杂质原子数，μ_n = 电子迁移率（$cm^2V^{-1}s^{-1}$）。迁移率和杂质浓度的关系见图 2.39。假定直径为 6 英寸的硅圆片厚为 250 μm，给定磷浓度为 $10^{15}\leq N_D\leq10^{18}$ 原子/cm^3，设计一个 100 Ω 电阻及其适当的电阻几何图形。

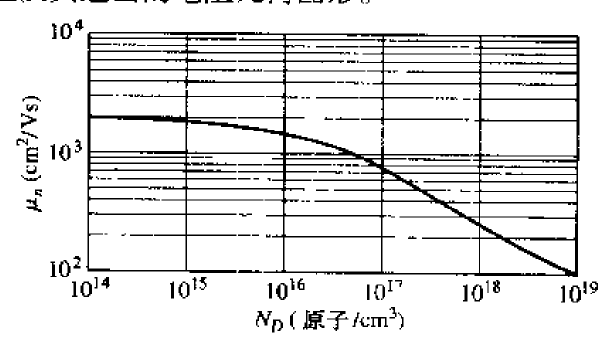


图 2.39

第3章　电压和电流定律

本章要点：

- 理解节点、路径、回路和支路的区别
- 运用基尔霍夫电流定律(KCL)的能力
- 运用基尔霍夫电压定律(KVL)的能力
- 分析简单串并联电路的方法
- 简化串并联电源电路的能力
- 简化串并联电阻电路的能力
- 培养对分压和分流的直觉理解

3.1　引言

前面已经引入了理想电压源、电流源和电阻的概念，现在开始研究基本的电路特性。其中的两个简单定律：基尔霍夫电流和电压定律构成了电路分析的基础。在后面还将看到，通过合并串联或者并联元件往往可以简化电路，该方法适用于电压源、电流源、电阻和电导元件。

3.2　节点、路径、回路和支路

现在开始研究两个或两个以上元件组成的简单网络中电压和电流的关系。元件由导线相连，导线的电阻为零。由于该网络由一些简单元件和导线组成，于是称为集总参数网络。而分布参数网络则包含有近乎无穷的、难于觉察到的小元件，对它的分析将面临更多困难。本书主要讨论集总参数网络。

在实际的电路中，导线通常具有一定的电阻，但是其典型值与电路中其他电阻相比要小得多，以至于可以略去，而不会产生明显的误差。因此，在以下讨论的理想电路中，假定导线电阻为零。

两个或两个以上元件的连接点称为节点。例如图3.1(a)中有3个节点。有时电路的节点数看起来比实际的要多，如图3.1(a)中的节点1，可以画成图3.1(b)中的两个节点，它们之间由零电阻的导线连接。但是，这不过是把一个普通的节点扩展成了零电阻的连线而已。因此，必须考虑到这样的情况，即连线本身或者和元件相连的一部分实际上属于该节点。而且应该注意到，每个元件各端均有一个节点。

假如从网络中的一个节点开始移动，经过一个元件到达它另一端的节点，再从该节点经过另一个不同的元件到达下一个节点，继续这样的移动，直到经过了所期望的元件数。如果不存在经过次数多于一次的节点，则所经过的这组元件和节点就构成了路径。如果起点和终点为同一节点，则称为闭合路径，或者回路。

如图 3.1(a)所示，从节点 2 经过电流源到达节点 1，再经过右上端的电阻到达节点 3，就构成了一条路径。由于没有重新回到节点 2，所以该路径不构成回路。而如果从节点 2 经过电流源到达节点 1，再从中间左边的电阻向下到达节点 2，然后向上经过中间的电阻回到节点 1。这时并不构成一条路径，因为存在经过了两次的节点（确切地说是存在两个这样的节点）。因为回路首先必须是路径，它当然也不构成回路

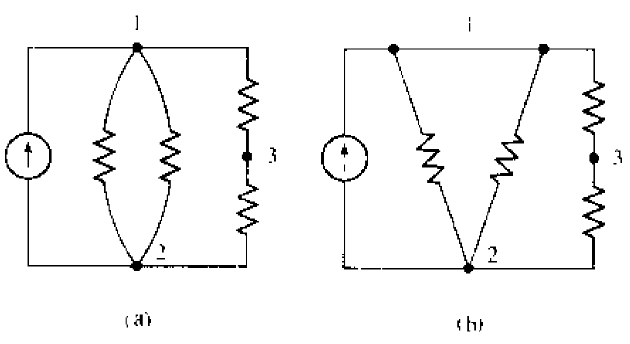


图 3.1　(a)包含 3 个节点和 5 个支路的电路；(b)重画后的节点 1 看起来似乎是两个节点，实际上它仍然只是一个节点

另一个术语是支路，定义为网络中的单个路径，即只包含一个元件及元件各端的节点，它方便了网络的描述。这样，路径可看成特定支路的集合。如图 3.1(a)和图 3.1(b)中均包含 5 条支路。

3.3　基尔霍夫电流定律

现在开始讨论基尔霍夫两个定律之一的电流定律。基尔霍夫定律是以一位德国大学教授罗伯特·基尔霍夫(Robert Kirchhoff)的名字来命名的，这个带有公理性质的基尔霍夫电流定律(简写为 KCL)简单表述为：

流入任何节点的电流的代数和为零。

它是“任何节点均不能累积电荷”的数学表达形式。节点不是电路元件，它显然不能存储、消灭或者产生电荷，所以，电流的代数和必然为零。通过类比水力装置可帮助理解这点：考虑三个接成 Y 形的水管，定义进入每个水管的水流为“电流”。假定水流一直是流动的，显然不可能有三个同时为正的“电流”，否则水管将会破裂。这是因为所定义的方向与实际水流方向无关，因此，所定义的"电流"必定有一个或者两个为负值

考虑图 3.2 中的节点，流入该节点的四个电流的代数和必然为零：

$$i_A + i_B + (-i_C) + (-i_D) = 0$$

很显然，这个定律同样可以运用到流出该节点的所有电流的代数和：

$$(-i_A) + (-i_B) + i_C + i_D = 0$$

有时希望写成参考方向指向节点的电流和与相反方向的电流和相等的形式：

$$i_A + i_B = i_C + i_D$$

它表明，流入节点的电流和必须等于流出节点的电流和

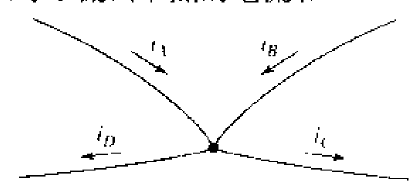


图 3.2 用以说明基尔霍夫电流定律应用的节点例子

基尔霍夫电流定律的简洁形式为：

$$\sum_{n=1}^{N} i_n = 0 \tag{3.1}$$

它是以下形式的简写：

$$i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_N = 0 \tag{3.2}$$

在应用式(3.1)或式(3.2)时，应理解为所有 N 个电流的参考方向或者全部指向所讨论的节点或者全部相反。

例题 3.1 如图 3.3(a)所示电路，已知从电压源流出的电流是 3 A，求流过电阻 R_3 的电流

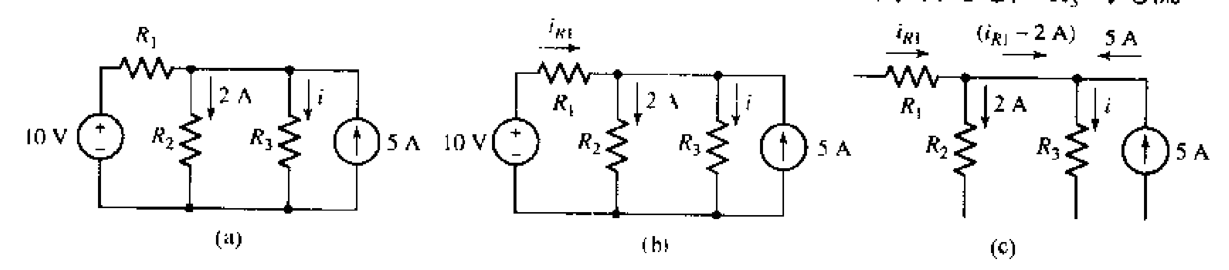


图 3.3 (a)求图中流过 R_3 的电流；(b)电阻上的电流已标出，于是可以写出 KCL 方程；(c)为清晰起见，重新画出了流入电阻 R_3 上端节点的所有电流

- 弄清问题的目标：

在电路图中，流过电阻 R_3 的电流已经标出为 i。

- 收集已知信息：

所求电流从 R_3 上端的节点流入，从每个支路流入该节点的电流形成了电流 i。

- 选择最适合问题的已有方法：

首先，标出流过电阻 R_1 的电流[见图 3.1(b)]，这样可以在电阻 R_2 和 R_3 上端的节点运用 KCL。

- 建立适当的方程组：

对流入该节点的电流求和：

$$i_{R1} - 2 - i + 5 = 0$$

为清晰起见，图 3.3(c)重新画出了流入该节点的电流。

● 确定是否还需其他信息：

考虑到只有一个方程，却有两个未知量，这意味着还需找出一个附加的方程。在本题中，已知 10 V 的电压源提供 3 A 的电流，运用 KCL 可知它就是 i_{R1}。

● 试解：

代入 i_{R1}，可求出 $i = 3 - 2 + 5 = 6$ A。

● 证实所得解是否合理和满足要求：

核查求解过程总是值得做的，而且还可以试着估算解的范围是否合理。在本例中，有两个电源，分别提供 5 A 和 3 A 大小的电流，而没有其他独立源或受控源，因此不可能得到任何大于 8 A 的电流。

练习

3.1　数出图 3.4 中的支路数和节点数。已知 $i_x = 3$ A，流过 18 V 的电压源的电流为 8 A，求 R_4（提示：应用 KCL 和欧姆定律）。

答案：5 条支路；3 个节点；1 Ω

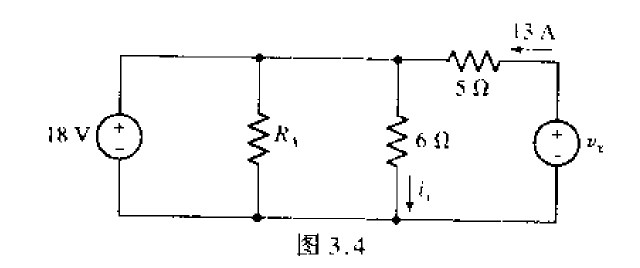


图 3.4

3.4　基尔霍夫电压定律

现在开始讨论基尔霍夫电压定律（简写为 KVL），它表述为：

沿任何闭合回路的电压的代数和为零。

电流和电路元件中的电荷流动相关，而电压是元件间势能差的度量。在电路理论中，电压是单值的，因此，在电路中把一个单位电荷从 A 点搬运到 B 点所需要的能量与从 A 到 B 的路径无关。

在图 3.5 中，如果把一个大小为 1 C 的电荷从 A 点经过元件 1 移到 B 点，根据图中标出的参考极性可知，需要做 v_1 焦耳的功①。同样，如果从 A 点经节点 C 移到 B 点，需要 $v_2 - v_3$ 焦耳的能量。因为所做的功与电路中的路径无关，所以两者必然相等。事实上，任何路径都必然导致相同的电压值，因此：

$$v_1 = v_2 - v_3 \tag{3.3}$$

因而可以得出结论，如果沿着一个闭合路径进行移动，那么所经过的各元件的电压的代数和必然为零，于是可写出：

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_N = 0$$

① 选取电荷大小 1 C 是为了数值计算上的方便，这时所做的功为 $(1\ C)\cdot(v_1\ J/C) = v_1$ J。

或者简写为：

$$\sum_{n=1}^{N} v_n = 0 \tag{3.4}$$

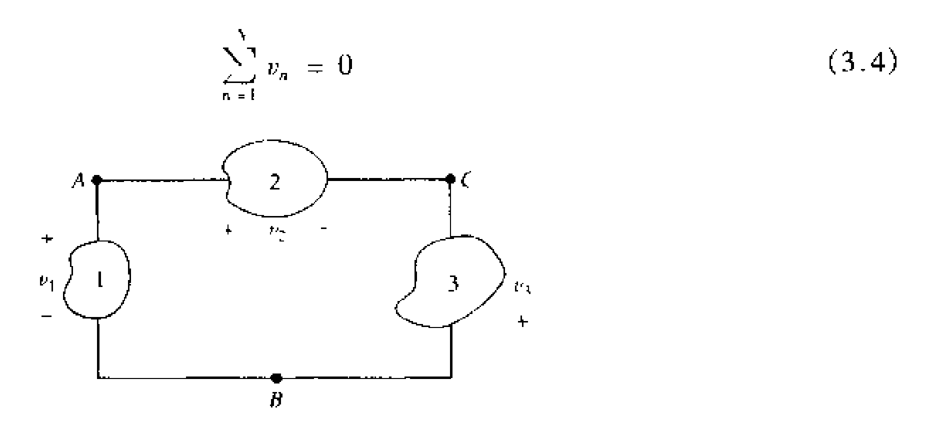


图 3.5 A 点与 B 点之间的电位差与选择路径无关

在电路中应用 KVL 有几种不同的方式。与其他方式相比，下面这一种方式在列方程时不容易犯错误。在头脑中按顺时针方向沿闭合路径走一遍，如果首先遇到的是元件标有"+"号的那端，就直接写下它的电压；如果首先遇到的是标有"-"号的那端，则写下该电压的负值。根据这种方法，对于图 3.5，有：

$$-v_1 + v_2 - v_3 = 0$$

它和前面给出的式(3.3)是一致的。

例题 3.2 如图 3.6 所示电路，求 v_x 和 i_x

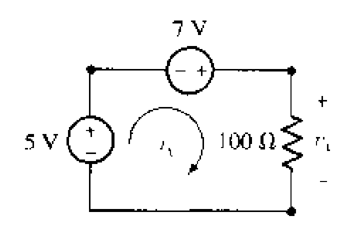


图 3.6 包含两个电压源和一个电阻的简单电路

已经知道图中两个元件两端的电压，于是立即可以应用 KVL 得到 v_x。

从 5 V 电压源底端的节点开始，沿顺时针方向对该回路应用 KVL 有：

$$-5 - 7 + v_x = 0$$

所以 $v_x = 12$ V。

也可对该电路应用 KCL，但由此只能得出流过三个元件的电流(i_x)相等。不过现在已经知道了 100 Ω 电阻两端的电压，于是根据欧姆定律有：

$$i_x = \frac{v_x}{100} = \frac{12}{100}\text{ A} = 120\text{ mA}$$



练习

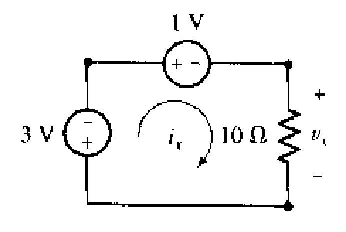


图 3.7

3.2 求图 3.7 所示电路中 i_x 和 v_x 的值。

答案：$v_x = -4$ V；$i_x = -400$ mA

例题3.3　在图3.8所示的电路中，共有8个元件，其中已给出了每个元件的电压，并标出了正负号，求 v_{R2} 和 v_x

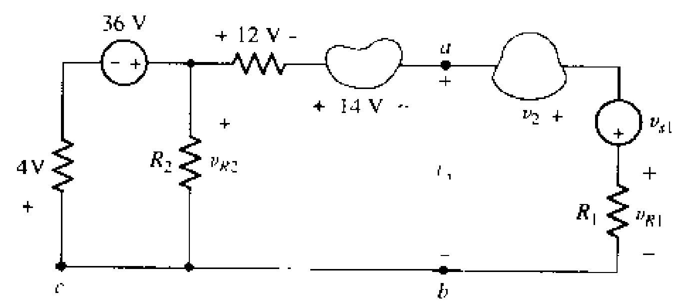


图3.8　具有8个元件的电路

在本题条件下，最好的方法是找出一个可以应用KVL的回路。有几种不同选取回路的方法，仔细考察该电路，可以发现最左边的回路就是一个合适的路径，很明显，因为已知其中的两个电压值，因此从 c 点开始对该回路应用KVL即可求出 v_{R2}：

$$4 - 36 + v_{R2} = 0$$

于是 $v_{R2} = 32$ V。

b 点、c 点和它们之间的导线均为同一个节点的一部分。

为了求解 v_x，可能想到将右边的三个元件的电压加起来，但是并不知道这些电压的值，因而不能得到数值解。于是考虑从 c 点开始应用KVL，沿顺时针方向到达 a 点，然后经过 v_x 到达 b 点，最后回到出发点，则：

$$+4 - 36 + 12 + 14 + v_x = 0$$

所以：

$$v_x = 6\ \text{V}$$

另一种解法：因为已求出 v_{R2}，所以可以沿着这条捷径得到 R_2：

$$-32 + 12 + 14 + v_x = 0$$

同样可得到 $v_x = 6$ V。

正确地分析一个电路的关键是规范化地标出电路图中所有的电压和电流，之后细心地写出KCL或者KVL方程，就可以得到正确的关系式　在必要的时候还可以应用欧姆定律，比如当未知量比最初所得到方程数还要多的时候

例题3.4　求图3.9所示电路中 v_x 的值

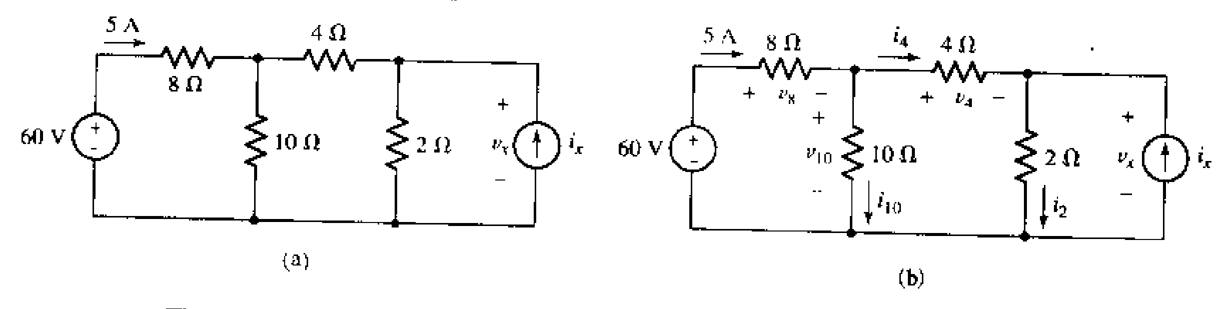


图3.9　(a) 使用KVL确定电路中的端电压 v_x；(b) 已标出电路中的电压与电流

首先,标出电路中其他元件的电压和电流[见图 3.9(b)]。从图中可以注意到,v_x 为 2 Ω 电阻及电流源 i_x 两端的电压。如果可以得到流过 2 Ω 电阻的电流大小,那么根据欧姆定律即可求出 v_x 的值。写出如下 KCL 方程:

$$i_2 = i_4 + i_x$$

但是,遗憾的是,因为不知道这三个值中的任何一个,所以求解过程暂时遇到了困难。

因为流过 60 V 电压源的电流是已知的,于是可以从这一点出发来分析。也可以根据 KVL 直接得到 v_x,而不需要先求出 i_2,此时可以列出一个可能有用的 KVL 方程是:

$$-60 + v_8 + v_{10} = 0$$

已知流过 8 Ω 电阻的电流为 5 A,根据欧姆定律可得 $v_8 = 40$ V,从而 $v_{10} = 60 - 40 = 20$ V。这样可以求出:

$$i_{10} = \frac{20\ \text{V}}{10\ \Omega} = 2\ \text{A}$$

对中间的回路应用 KVL:

$$-v_{10} + v_4 + v_x = 0 \tag{3.5}$$

下一步,应用 KCL 和欧姆定律消去 v_4:

$$5 = i_4 + i_{10} = \frac{v_4}{4} + i_{10} = \frac{v_4}{4} + 2$$

因此,$v_4 = 12$ V,把它以及 $v_{10} = 20$ V 代入到式(3.5),解出 $v_x = 8$ V。

练习

3.3 求出图 3.10 所示电路的 v_x。

答案:$v_x = 12.8$ V

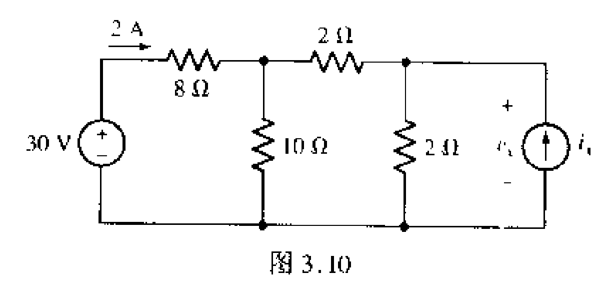


图 3.10

3.5 单回路电路

前面已经建立了欧姆定律和基尔霍夫定律,现在开始用它们来分析一个简单的电阻电路。图 3.11(a)是由两个电池和两个电阻组成的简单电路,假定电路接头、连接导线和焊接点的电阻为零,则这是一个单节点电路,如图 3.11(b)所示。两个电池都视为理想电压源,假定它们的内阻足够小,可以忽略不计。两个电阻都视为理想电阻或者说是线性电阻。

现在来求流过各元件的电流及其两端的电压以及它们吸收的功率。第一步,需要假定未知电流的参考方向。一般选取电流 i 的方向为顺时针方向,它从左边电压源的上端流出,在该处用标为 i 的箭头表示,如图 3.11(c)所示。直接运用基尔霍夫电流定律可知,流过电路中其

他元件的电流也必然是相同的，为了强调这一点，在电路图中还标出了其他的几个电流记号。

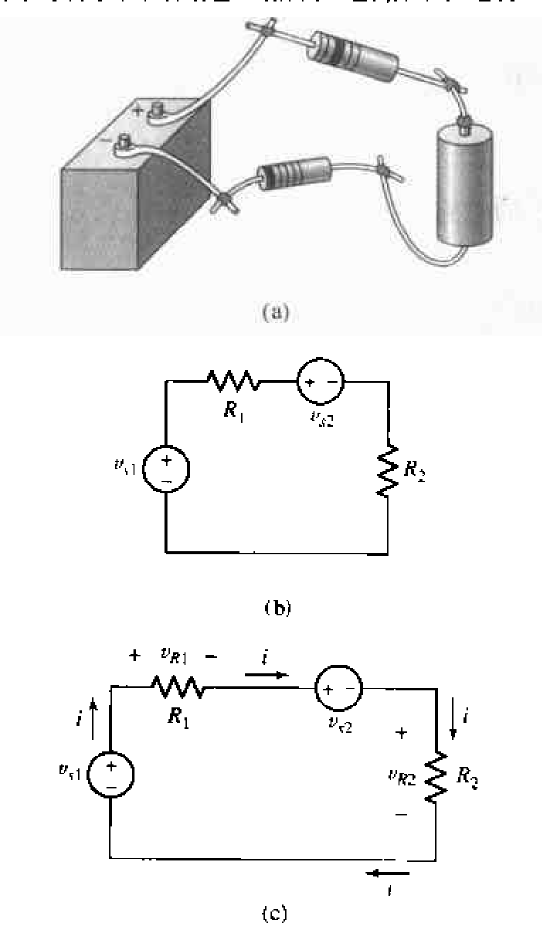


图 3.11　(a)四个元件组成的单回路电路；(b)给出电压源和电阻参数后的电路模型；(c)给电路添加了电流和电压的参考符号

如果电路中所有的元件流过同一个电流，则称它们为串联连接，但要注意：非串联连接的元件也可能流过相等的电流，例如在两个相邻的屋子里的 100 W 的电灯很可能流过相等的电流，但并不是同一个电流，因而不是串联的。

第二步是设定两个电阻的参考电压方向。根据无源符号规则，流过电阻的电流和电阻两端的电压应该符合电流从参考电压的正端流入的规定。上面已经选取了电流的参考方向（总是首先选定电流的方向），于是 v_{R1} 和 v_{R2} 的方向定义如图 3.11(c)中所示。

第三步，对电路中的惟一的闭合路径应用基尔霍夫电压定律。从电路左下方的拐角开始，沿顺时针方向移动，当首先遇到元件的正参考端，直接写下该电压，而如果首先遇到其负参考端，则写下电压的负值。这样：

$$-v_{s1}+v_{R1}+v_{s2}+v_{R2}=0 \tag{3.6}$$

对电阻运用欧姆定律：

$$v_{R1}=R_1 i \quad 和 \quad v_{R2}=R_2 i$$

代入式(3.6)，得到：

$$-v_{s1}+R_1 i+v_{s2}+R_2 i=0$$

因为只有 i 是未知的，所以可求出：

$$i = \frac{v_{s1} - v_{s2}}{R_1 + R_2}$$

每个元件的电压和功率分别由 $v = Ri$、$p = vi$ 或者 $p = i^2 R$ 得到。

练习

3.4 在图 3.11(b)所示的电路中，$v_{s1} = 120$ V，$v_{s2} = 30$ V，$R_1 = 30\ \Omega$，$R_2 = 15\ \Omega$。计算各元件吸收的功率。

答案：$p_{120V} = -240$ W；$p_{30V} = +60$ W；$p_{30\Omega} = 120$ W；$p_{15\Omega} = 60$ W

例题 3.5 计算图 3.12(a)所示电路中各元件吸收的功率

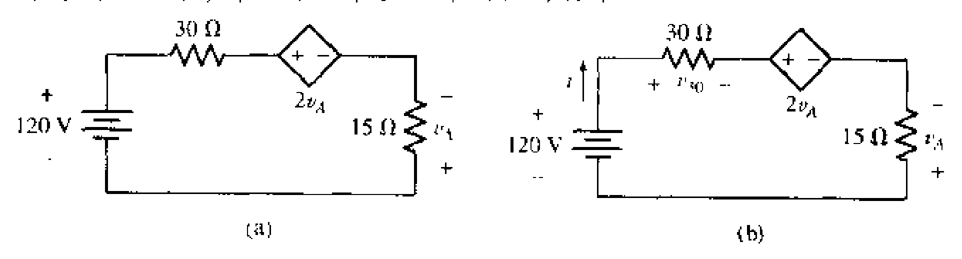


图 3.12 (a)包含受控源的单回路电路；(b) 在电路中已假定了电流 i 和电压 v_{30} 的参考方向

首先，设定电流 i 的参考方向和电压 v_{30} 的参考极性如图 3.12(b)所示。没有必要给 15 Ω 电阻指定一个电压，因为电路中已标出了受控电压源的控制电压 v_A（不过，需要指出的是，v_A 的参考方向与根据无源符号规则设定的参考方向相反）。

该电路包含一个受控电压源，只有当确定了 v_A 之后，它的值才能确定。不过，可以将受控源电压的大小 $2v_A$ 当成一个数进行处理。因此，对该回路应用 KVL：

$$-120 + v_{30} + 2v_A - v_A = 0 \tag{3.7}$$

因为已知各电阻的值，根据欧姆定律，有：

$$v_{30} = 30i \quad 和 \quad v_A = -15i$$

注意，这里的负号是必须的，因为 i 从 v_A 的负端流入。代入式(3.7)，得到：

$$-120 + 30i - 30i + 15i = 0$$

从而求出：

$$i = 8\ \text{A}$$

计算各元件的吸收功率为：

$$p_{120V} = (120) \times (-8) = -960\ \text{W}$$

$$p_{30\Omega} = (8)^2 \times (30) = 1\,920\ \text{W}$$

$$p_{dep} = (2v_A) \times (8) = 2[(-15) \times (8)] \times (8) = -1\,920\ \text{W}$$

$$p_{15\Omega} = (8)^2 \times (15) = 960\ \text{W}$$

我们注意到，如果将所有吸收功率（根据无源符号规则来计算）相加，将得到零，这符合能量守恒原理。

练习

3.5　在图 3.13 所示电路中，分别计算电路中 5 个元件吸收的功率。

答案：(按顺时针方向，从左边起) 0.768 W；1.920 W；0.205 W；0.179 2 W；-3.07 W

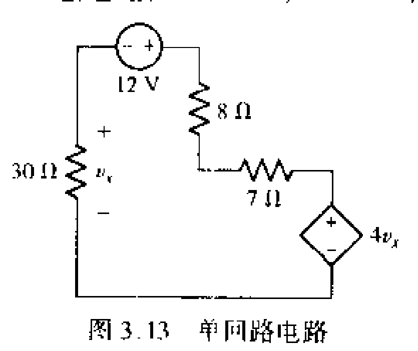


图 3.13　单回路电路

3.6 单节点对电路

在前面章节中已经讨论了单回路电路，与之相对应的是单节点对电路，单节点对电路的每一个元件都连接在相同的节点对中。这种电路的一个例子如图 3.14(a)所示，其中两个电流源和电阻的大小均为已知。首先，假定每一个元件两端的电压为 v，并任意指定它的参考极性。根据 KVL 可知，任何一个支路两端的电压与其他支路两端的电压相同。电路中所有元件两端具有共同的电压，则称它们为并联连接。

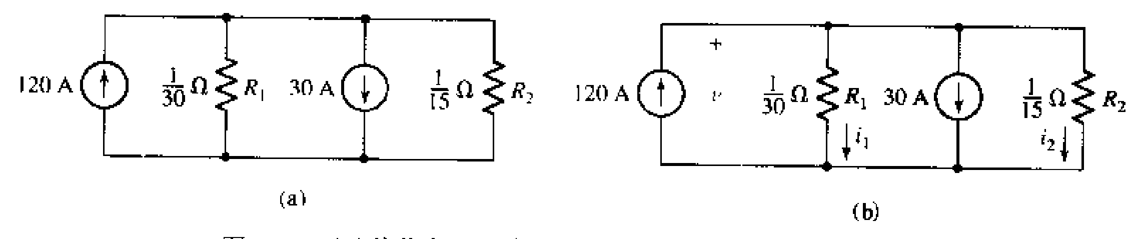


图 3.14　(a)单节点对电路；(b)已指定了一个电压和两个电流

例题 3.6　求图 3.14(a)所示电路中每个元件的电压、电流和功率

首先，定义电压 v，并任意指定它的极性，如图 3.14(b)所示。流过两个电阻的两个电流的方向根据无源符号规则确定，它们已在图 3.14(b)中标出。

如果已经求出 i_1 或者 i_2，那么就可以得到电压 v 的值，所以下一个步骤就是对电路中的两个节点应用 KCL。通常，对正参考电压极性的端点应用 KCL 更为清晰一些，所以对从上端节点流出的电流求代数和，并令它等于零：

$$-120 + i_1 + 30 + i_2 = 0$$

根据欧姆定律，把两个电流用电压 v 表示：

$$i_1 = 30v \text{ 和 } i_2 = 15v$$

得到：

$$-120 + 30v + 30 + 15v = 0$$

求解以上关于 v 的方程得到：

$$v = 2\text{ V}$$

再应用欧姆定律,有:

$$i_1 = 60\ \text{A} \ 和\ i_2 = 30\ \text{A}$$

这时可以计算出每个元件所吸收的功率 对于两个电阻,有:

$$p_{R1} = 30 \times (2)^2 = 120\ \text{W} \qquad p_{R2} = 15 \times (2)^2 = 60\ \text{W}$$

对于两个电源,有:

$$p_{120\text{A}} = 120 \times (-2) = -240\ \text{W} \qquad p_{30\text{A}} = 30 \times (2) = 60\ \text{W}$$

既然 120 A 的电流源吸收了负的 240 W,那么它实际上是向电路中的其他元件提供功率。采用类似的方法,可以知道 30 A 的电流源实际上是吸收功率,而不是提供功率。

上面的结论是合理的或者是所预期的吗? 显然不是,因为通常都希望电路中的每一个"电源"都提供功率。然而,这并不是必然的,正如在这个例子所看到的那样。

练习

3.6 求图 3.15 所示电路的 v。

答案:50 V

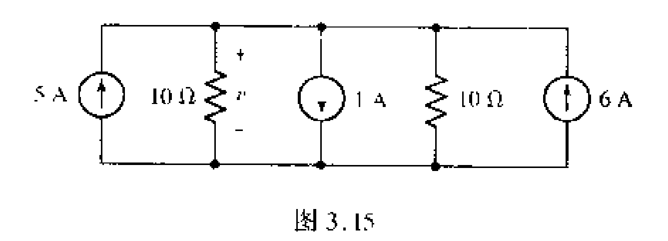


图 3.15

例题 3.7 求图 3.16 所示电路中的 v 值和独立电流源提供的功率

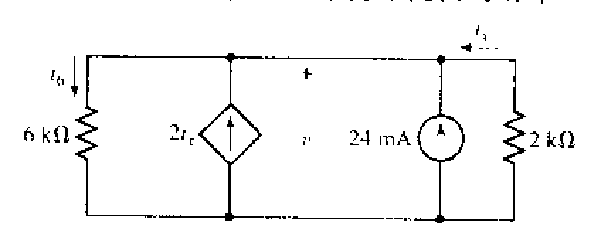


图 3.16 这是一个包含受控源的单节点对电路,已给定了电压 v 和电流 i_6

根据 KCL,从上端节点流出的电流的代数和为零,所以:

$$i_6 - 2i_x - 0.024 - i_x = 0$$

再次注意到,尽管只有在分析完电路后才能知道受控源的确切值($2i_x$),但是可以将它和任何其他电流同样对待。

下一步,对每一个电阻应用欧姆定律:

$$i_6 = \frac{v}{6\,000} \qquad i_x = \frac{-v}{2\,000}$$

因此:

$$\frac{v}{6\,000} - 2\left(\frac{-v}{2\,000}\right) - 0.024 - \left(\frac{-v}{2\,000}\right) = 0$$

于是 $v = (600) \times (0.024) = 14.4$ V。

此时，很容易得到电路中任何其他想要的信息，并且通常只需要一步。例如，独立源提供的功率为 $p_{24} = 14.4 \times (0.024) = 0.3456$ W(345.6 mW)。

练习

3.7　如图 3.17 所示的单节点对电路，求 i_A，i_B 和 i_C。

答案：3 A；−5.4 A；6 A

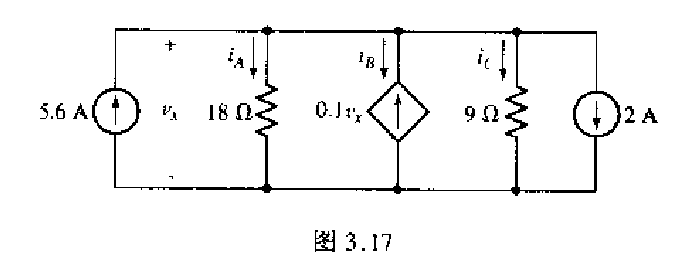


图 3.17

例题 3.8　对图 3.18(a)所示的电路，求 i_1，i_2，i_3 和 i_4

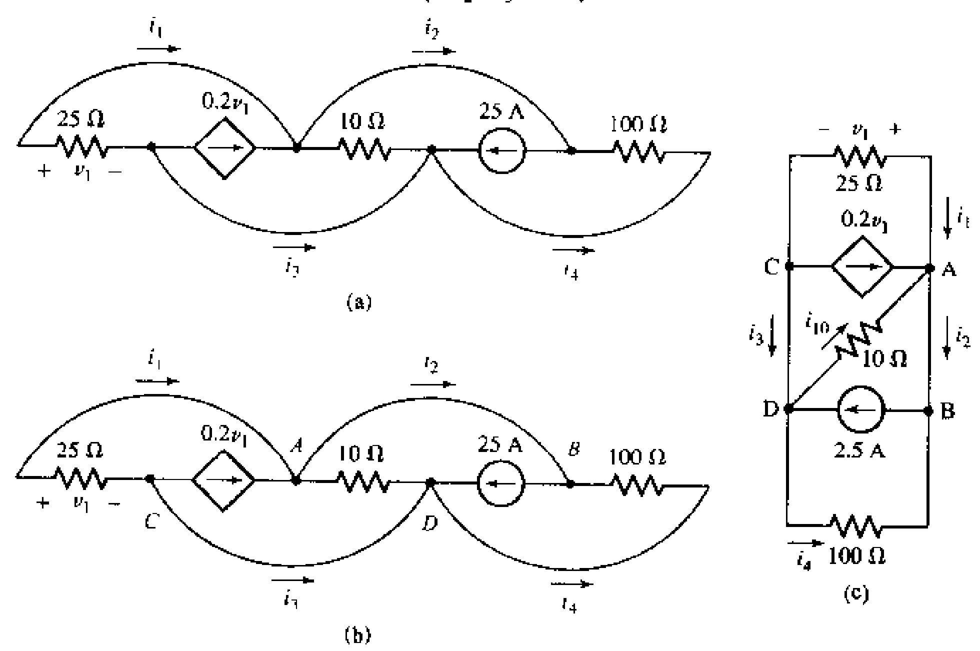


图 3.18　(a) 单节点对电路；(b) 标注了一些点，便于重画电路；(c) 重画后的电路

从表面上看，分析这个电路有点困难，于是先在图中标上 A，B，C 和 D，如图 3.18(b)所示，最后将它重画为图 3.18(c)。为了便于以后运用 KCL，还定义了一个电流 i_{10}，它流过 10 Ω 的电阻。

直接从电路图上看，要求的电流中没有任何一个可以立即求得，所以考虑利用欧姆定律来求解。三个电阻的两端都具有共同的电压(v_1)，简单地对流入最右边的节点的电流求和：

$$-\frac{v_1}{100} - 2.5 - \frac{v_1}{10} + 0.2v_1 - \frac{v_1}{25} = 0$$

求解方程，得到 $v_1 = 250/5 = 50$ V。

考虑电路的底端可以注意到：

$$i_4 = \frac{-v_1}{100} = -\frac{50}{100} = -0.5\ \mathrm{A}$$

采用同样的方式，可求出 $i_1 = -2$ A、剩下的两个电流 i_2 和 i_3 可以通过对左边和右边的两个节点应用 KCL 得到。因此：

$$i_2 = i_1 + 0.2v_1 + i_{10} = -2 + 10 - 5 = 3\ \mathrm{A}$$

和

$$i_3 = i_{10} - 2.5 + i_4 = -5 - 2.5 - 0.5 = -8\ \mathrm{A}$$

3.7　独立源的串联和并联

在分析串并联电路时，通过将源合并，可以减少方程的个数。但需要注意的是，必须保证电路中所有未合并部分的电流、电压和功率关系不改变。例如，几个串联的电压源可以用一个等值的电压源来代替，其电压是各独立电压源的代数和[见图 3.19(a)]。同样，对于并联的电流源，也可以通过对各独立的电流求代数和将它们合并，并且相互之间的次序可以根据需要重新排列[见图 3.19 (b)]。一般来说，对于含有受控源的电压源或者电流源，对它们进行合并却不能带来多少好处。

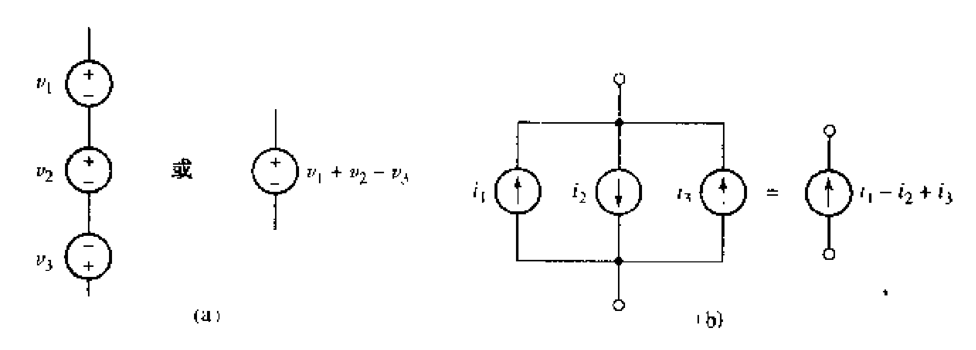


图 3.19　(a) 串联连接的电压源可以用单个电压源代替；
(b) 并联连接的电流源可以用单个电流源代替

作为对串并联电源合并讨论的结束，最后考虑两个并联的电压源和两个串联的电流源的合并。例如，一个 5 V 电压源和一个 10 V 电压源并联等效于什么？根据电压源的定义，电压源两端的电压不能改变；那么由基尔霍夫电压定律，5 等于 10，这是不可能的。因此，只有当任何时刻理想电压源的电压均相同时，才允许将它们并联。同样，只有当任何时刻两个电流源具有相同的电流(包括符号)，才允许将它们串联。

例题 3.9　判断图 3.20 所示电路中哪个是合理的

图 3.20(a)的电路包含两个并联的电压源，它们的大小不相同，因此该电路违反了 KVL。例如当有一个电阻并接在 5 V 电压源的两端，那么它也并接在 10 V 电压源上。这样，电阻两端的电压值将是歧义的，因此显然不能构造出这样的电路。如果设法在现实生活中构造出这样的电路，将会发现并不存在“理想”电压源，因为所有实际的电压源都具有内阻。正是由于内阻的存在，才使得实际的电源电压可以不同。根据这种说法，图 3.20(b)所示的电路是完全合理的。

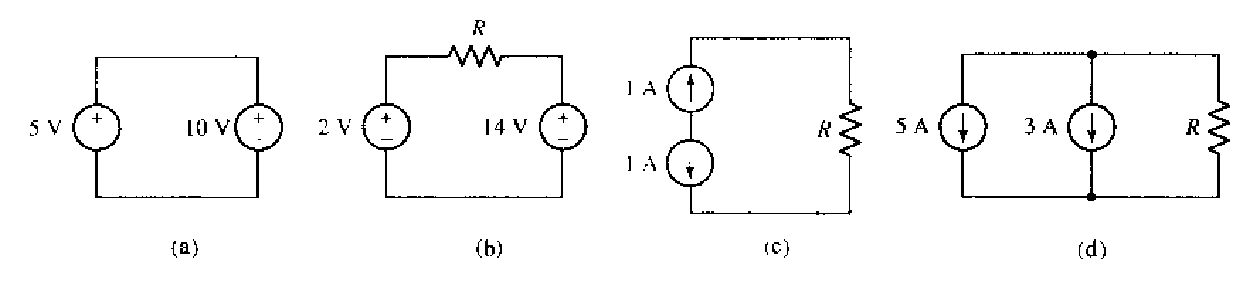


图 3.20　(a)～(d)是多电源电路的例子，其中有些违反了基尔霍夫定律

图 3.20(c)所示的电路违反了 KCL：因为流过电阻 R 中的电流是哪一个并不明确。图 3.20(d)的电路则不违反任何物理定律，但如果移走电阻 R，它将成为无意义的电路，因为这意味着将 5 A 和 −3 A 电流源串联，从而违反了 KCL。

练习

3.8　先合并三个电流源，然后求出图 3.21 所示电路中的 v。

答案：50 V

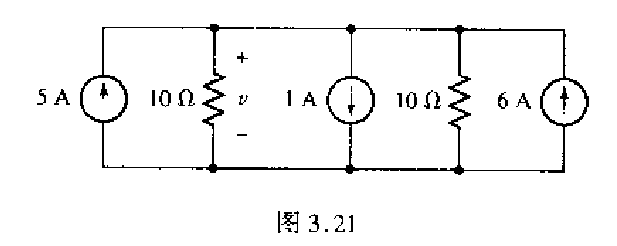


图 3.21

3.8　电阻的串联和并联

通常，可以用单个等效电阻来代替相对复杂的电阻组合。在不关心电阻组合中每个电阻的电流、电压或者功率时，这种方法特别有用。但是，必须保证电路中剩余部分的电流、电压和功率关系不改变。

考虑如图 3.22(a)所示的 N 个电阻的串联连接，为了简化电路，希望用单个电阻 R_{eq} 来代替这 N 个电阻，使得电路的剩余部分(在这里只是电压源)不会感觉到这种变化，即电流、电压和功率关系必须在替换前后保持不变。

首先，应用 KVL：

$$v_s = v_1 + v_2 + \cdots + v_N$$

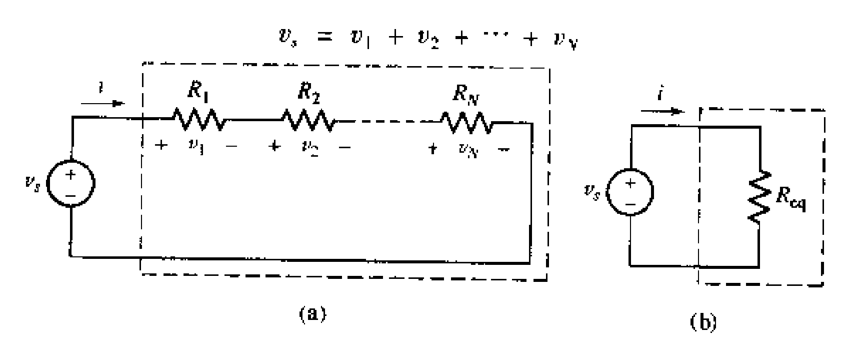


图 3.22　(a) N 个电阻的串联组合；(b) 其等效电路

然后应用欧姆定律，可以得到：

$$v_s = R_1 i + R_2 i + \cdots + R_N i = (R_1 + R_2 + \cdots + R_N) i$$

根据图 3.22(b)所示等效电路，可以得出一个简单的结果，与上式进行比较，可以得到：

$$v_s = R_{eq} i$$

因此，N 个串联电阻的等效电阻为：

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_N$$

由此，可以用单个二端元件 R_{eq} 来替代由 N 个串联电阻组成的二端网络，并且 v-i 关系保持不变。

值得再次强调的是，人们有时会对合并前某个元件的电流、电压或者功率关系感兴趣。例如，受控电压源的电压可能依赖于电阻 R_3 两端的电压，一旦 R_3 和其他几个电阻一起合并成了一个等效电阻，它就不再存在，因此不能确定其两端的电压，除非把 R_3 从组合中移出来。这种情况下，最好先考察一下电路，不把 R_3 包括在组合中。

另一个提示：考察串联电路的 KVL 方程的形式可知，电路中元件的放置次序对方程没有影响。

例题 3.10 如图 3.23(a)，利用电阻和电源合并的方法，计算电流 i 以及 80 V 电压源输出的功率

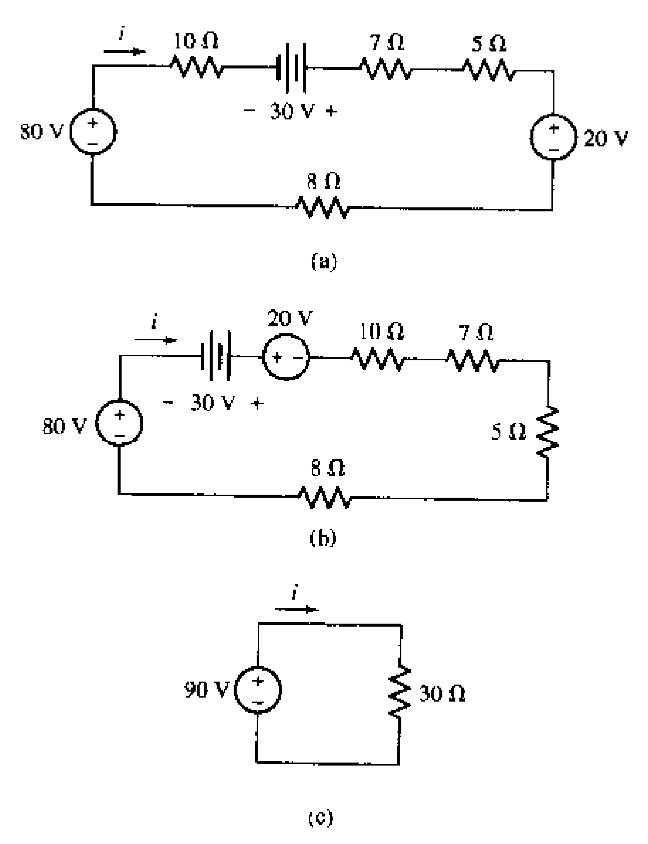


图 3.23 (a) 含有几个电阻和电源的串联电路；(b) 为清晰起见，重新安排了元件的位置；(c)简化后的等效电路

首先，交换一下电路中元件的位置，并注意保持电源的方向不变，如图 3.23(b)所示。下一步，把三个电压源合并成为一个 90 V 的等效电压源，把四个电阻合并成一个等效的 30 Ω电阻，如图 3.23(c)所示。这样，不用写成：

$$-80+10i-30+7i+5i+20+8i=0$$

而简单写成：

$$-90+30i=0$$

因而可以得到：

$$i=3\ \text{A}$$

为了计算所给出电路中的 80 V 的电源向电路输出的功率，需要回到图 3.23(a)，已经求出电流的大小是 3 A，于是所求的功率为 80 V × 3 A = 240 W。

有趣的是，在等效电路中不包含任何初始的元件。

练习

3.9　如图 3.24 所示电路，求 i。

答案：−333 mA

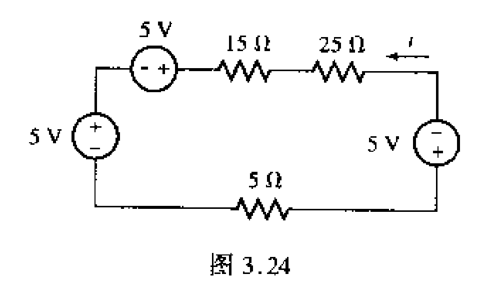


图 3.24

对于并联电路，可以采用类似的方法进行简化。对于图 3.25(a)所示电路，其中有 N 个并联的电阻，可以写出 KCL 方程为：

$$i_s=i_1+i_2+\cdots+i_N$$

或

$$i_s=\frac{v}{R_1}+\frac{v}{R_2}+\cdots+\frac{v}{R_N}=\frac{v}{R_{eq}}$$

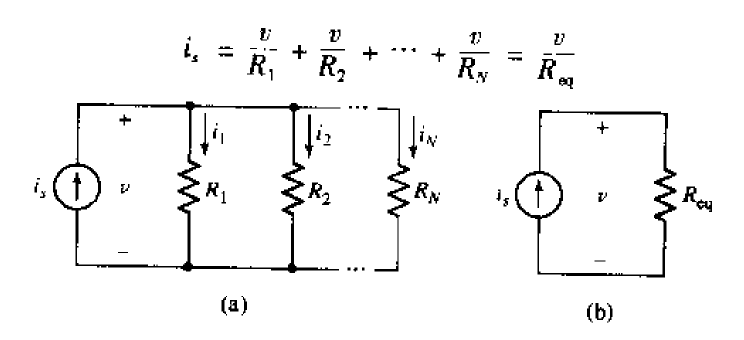


图 3.25　(a) N 个电阻并联的电路；(b) 等效电路

因此：

$$\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\cdots+\frac{1}{R_N}$$

可以写成：

$$R_{eq}^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1} + \cdots + R_N^{-1}$$

或者写成电导的形式：

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \cdots + G_N$$

简化后的等效电路如图 3.25(b)所示。

通常用下面的简写符号来表示并联连接：

$$R_{eq} = R_1 \| R_2 \| R_3$$

通常遇到的是两个电阻并联的情况，可表示为：

$$R_{eq} = R_1 \| R_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

或者，更简洁地表示为：

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{3.8}$$

应该记住最后的形式，不过要注意的是，不要错误地把它推广到两个电阻以上的情形，比如：

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

检查公式的单位，可以立即看出以上表达式不可能是正确的。

练习

3.10 如图 3.26 所示电路，通过合并三个电流源和两个 10 Ω 电阻来求 v。

答案：50 V

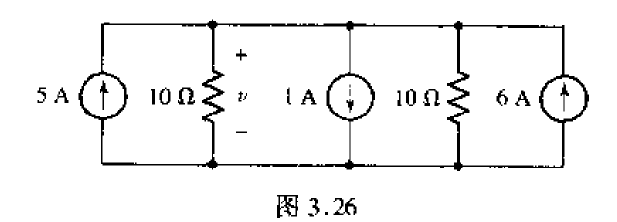


图 3.26

例题 3.11 如图 3.27(a)所示电路，求受控源的功率和电压

先不考虑受控源，把剩下的两个电源合并成一个 2 A 的电流源。可以看到，两个 6 Ω 电阻是并联的，可以简化为一个 3 Ω 的等效电阻。既然两个并联的 6 Ω 电阻又和 15 Ω 电阻串联，因此，3 Ω 的等效电阻也和 15 Ω 电阻串联。因此，可用一个 18 Ω 电阻替代 15 Ω 电阻和两个 6 Ω 电阻的组合，得到如图 3.27(b)所示电路。

这时，如果继续合并 3 Ω，9 Ω 和 18 Ω 的电阻，将会失去 i_3 的信息，而 i_3 决定了受控源的大小。因此只合并 9 Ω 和 18 Ω 的电阻以进一步简化电路，如图 3.27(c)所示。

对图 3.27(c)中上端的节点应用 KCL，可以得到：

$$-0.9i_3 - 2 + i_3 + \frac{v}{6} = 0$$

为求出受控源两端的电压 v，必须首先求出控制电流 i_3 的值。根据欧姆定律，有：

$$v = 3i_3$$

由此可计算出：

$$i_3 = \frac{10}{3}\ \text{A}$$

因此受控源两端的电压(同时也是 3 Ω 电阻两端的电压)为：

$$v = 3i_3 = 10\ \text{V}$$

因此受控源向电路中提供了 $v \times 0.9i_3 = 10 \times (0.9) \times (10/3)$ W 的功率。

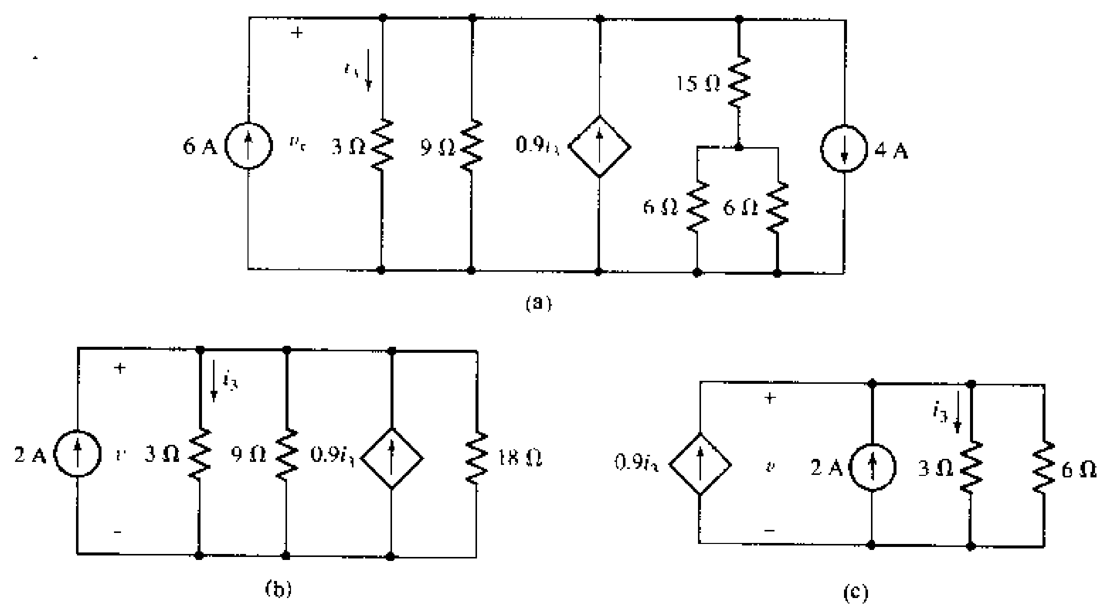


图 3.27　(a) 一个多节点电路；(b) 已将两个独立电流源合并成一个 2 A 的电流源，并将 15 Ω 电阻和两个 6 Ω 电阻的组合合并成一个 18 Ω 电阻；(c) 简化后的等效电路

现在，如果要计算 15 Ω 电阻消耗的功率，必须回到初始的电路。15 Ω 电阻和 3 Ω 的等效电阻串联，与之等效的 18 Ω 电阻两端的电压是 10 V，因此流过 15 Ω 电阻的电流为 5/9 A，消耗的功率为 $(5/9)^2 \times (15)$，即 4.63 W。

练习

3.11　如图 3.28 所示电路，求电压 v。

答案：12.73 V

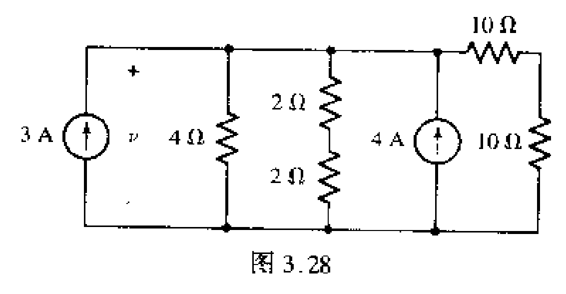


图 3.28

最后，对串并联合并做三点说明。第一点，参看图 3.29(a)所示电路，问：v_s 和 R 是串联的还是并联的？答案为：都是。两个元件流过同一个电流，因而是串联的；同时，它们两端具有同一个电压，因而又是并联的。

第二点要说明的是，电路可能会画成难以识别串并联关系的形式，对于不熟练的学生尤其要特别注意。例如在图 3.29(b)中，并联的电阻只有 R_2 和 R_3，而串联的电阻只有 R_1 和 R_8。

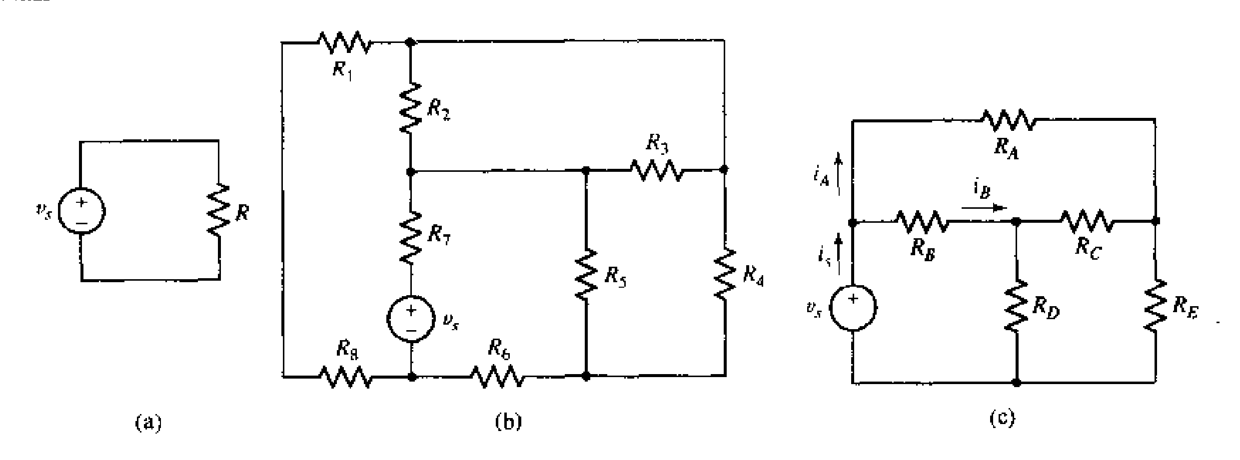


图 3.29 (a)这两个电路元件既是并联连接,又是串联连接;(b) R_2 和 R_3 是并联连接,R_1 和 R_8 是串联连接;(c) 不存在任何的电路元件相互间是串联或者并联连接

最后要说明的是,一个电路元件并不一定非得和其他元件相串联或并联。例如,对于图 3.29(b)所示的 R_4 和 R_5,它们不和电路中的任何的其他元件相串联或并联;又如图3.29(c)中,不存在任何元件和其他的元件相串联或并联。换句话说,不能用本章所讨论的方法来进一步简化这些电路。

3.9 分压和分流

通过对电阻和电源的合并,已经找到了一个简化电路分析的方法。另一个有用的方法是采用分压和分流的思想。分压指的是以总电压来表示多个串联连接电阻中的一个电阻上的电压。在图 3.30 中,R_2 两端的电压可以通过 KVL 和欧姆定律求出:

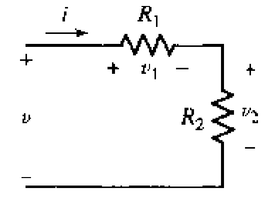


图 3.30 分压的例子

$$v = v_1 + v_2 = iR_1 + iR_2 = i(R_1 + R_2)$$

所以:

$$i = \frac{v}{R_1 + R_2}$$

从而:

$$v_2 = iR_2 = \left(\frac{v}{R_1 + R_2}\right) R_2$$

或者:

$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v$$

与此类似,R_1 两端的电压为:

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v$$

如果将图 3.30 所示网络中的 R_2 替换成 $R_2, R_3, \cdots, R_N$ 的串联组合，那么就可以得到 N 个串联电阻的分压关系：

$$v_k = \frac{R_k}{R_1 + R_2 + \cdots + R_N} v \tag{3.9}$$

于是可以计算出串联电阻中任何一个电阻 R_k 两端的电压 v_k。

例题 3.12　如图 3.31(a)所示电路，求 v_x

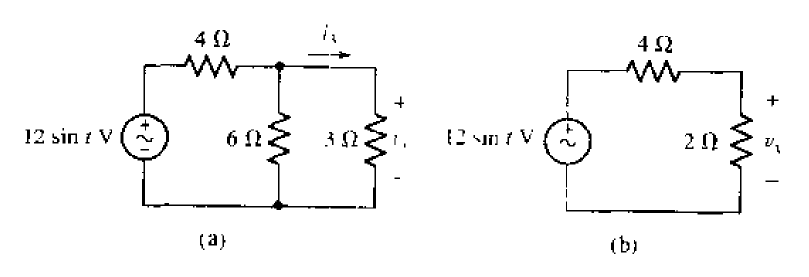


图 3.31　电阻组合和分压的数值例子：(a) 初始电路；(b) 简化后的电路

首先合并 6 Ω 和 3 Ω 电阻，将其替换为 $(6)\times(3)/(6+3)=2\ \Omega$ 的电阻。由于 v_x 并接在并联组合的两端，所以简化后不会失去 v_x。但是，如果为了进一步简化电路，再把 4 Ω 电阻和刚才求得的 2 Ω 电阻进行合并将会丢失 v_x。

这时，把分压关系应用到图 3.31(b)中的电路得到：

$$v_x = (12\sin t)\frac{2}{4+2} = 4\sin t\ \text{V}$$

练习

3.12　如图 3.32 所示电路，利用分压关系求 v_x。

答案：2 V

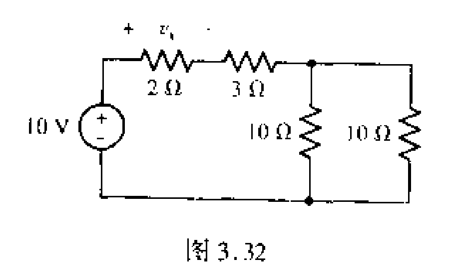


图 3.32

分压的对偶[①] 是分流。现在让一个总电流流过几个并联连接的电阻，如图 3.33 所示。

① 在工程中经常可以碰到对偶这个概念，将在第 7 章比较电感和电容的时候做一个简要的讨论。

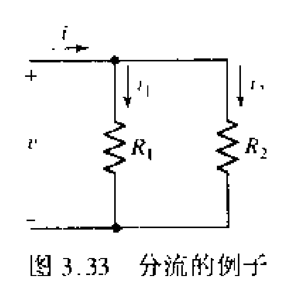


图 3.33 分流的例子

流过 R_2 的电流是：

$$i_2 = \frac{v}{R_2} = \frac{i(R_1 \parallel R_2)}{R_2} = \frac{i}{R_2}\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

或者：

$$i_2 = i\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

类似地：

$$i_1 = i\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

遗憾的是，最后这两个公式都有一个因子和分压中相应的因子稍有不同，因此需要小心对待以免犯错误。很多同学把分压表达式视为"显然"的，而把分流关系视为"异常"的。根据分流关系可知，并联连接中电阻越大其上流过的电流越小。

对于 N 个电阻的并联连接，流过电阻 R_k 上的电流是：

$$i_k = i\frac{\frac{1}{R_k}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N}} \tag{3.10}$$

或者写成电导的形式：

$$i_k = i\frac{G_k}{G_1 + G_2 + \cdots + G_N}$$

这和分压的公式(3.9)非常相似。

例题 3.13 如图 3.34 所示电路，写出 3 Ω 电阻上的电流表达式

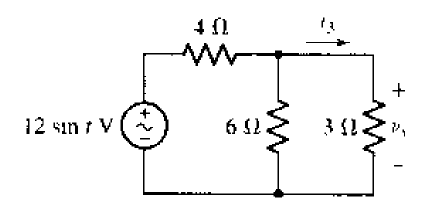


图 3.34 一个分流的例子。电压源符号中的波浪线表示一个随时间变化的正弦量

流入 3 Ω 和 6 Ω 电阻的并联组合的总电流是：

$$i(t) = \frac{12\sin t}{4 + 3 \parallel 6} = \frac{12\sin t}{4 + 2} = 2\sin t\ \text{A}$$

于是根据分流关系，得到所求电流为：

$$i_3(t) = (2\sin t) \times \left(\frac{6}{6+3}\right) = \frac{4}{3}\sin t\ \mathrm{A}$$

遗憾的是，在一些不适用的场合，分流常常被误用。比如，对于如图 3.29(c)所示的电路，已经知道该电路不存在任何串联或并联元件。既然没有并联的元件，那么就不可以应用分流关系。虽然如此，有很多学生会简单地看到电阻 R_A 和 R_B 后，就试图利用分流关系，从而写出了不正确的方程，比如：

$$i_A = i_s \frac{R_B}{R_1 + R_B}$$

需要记住的是，并联的各电阻必须位于同一对节点之间的不同支路上。

练习

3.13　如图 3.35 所示电路，利用电阻合并方法和分流关系求 i_1、i_2 和 v_3。

答案：100 mA；50 mA；0.8 V

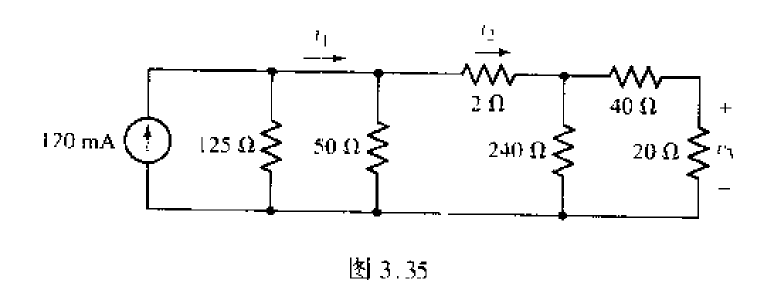


图 3.35

实际应用

非地理学的"地"

到目前为止，电路原理图都是以类似于图 3.36 所示电路的方式画出的，其中的电压均定义在明确标出的两端之间。特别需要强调的是，电压不能定义在单个点上——它定义为两点之间的电位差。但是，许多电路原理图都使用了将大地电压定义为零的约定，其他电压都是相对于该电压而言的。这个概念通常称为"接地"(earth ground)，它与防止火灾、致命的电击或者其他的伤害而制定的安全规定有关。接地符号如图 3.37(a)所示。

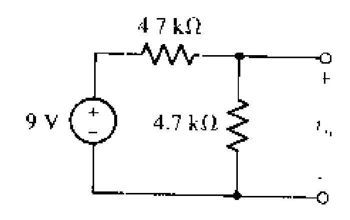


图 3.36　一个简单电路，两端的电压定义为 v_a

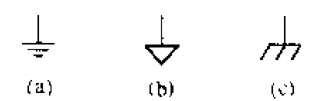


图 3.37 三个用于表示地或公共端的符号:(a)大地的地;(b)信号地;(c)外壳地

既然将“地”定义为零电压,那么在原理图中把它当做公共端通常比较方便。以这种方式重画图 3.36,得到的电路如图 3.38 所示,其中的接地符号代表公共节点。需要指出的是,对于 v_o 的数值而言,这两个电路是等效的(这里均为 4.5 V),但它们却不完全一样。图 3.36 所示的电路称为“浮动的”,因为它可以根据实际应用需要安装到地球同步卫星(或者比如是飞往冥王星的卫星)的一块电路板上,而图 3.38 所示的电路总是需要以某种方式通过导线在物理上与大地相连接。因为这个原因,有时候也用另外两个符号来表示公共端。图 3.37(b)所示的符号通常称为信号地,任何与信号地相连的端子可能(而且通常)与大地间存在一个大的电压。

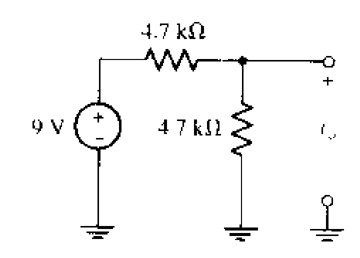


图 3.38 用接地符号重画图 3.36 后的电路。最右边的接地符号是多余的,只需要标出 v_o 的正端即可,负端隐含为地或者具有零电压

如果电路的公共端没有通过某些低阻抗的路径与大地相接,就可能导致潜在的危险。来看图 3.39(a),一个人正准备去触摸一个由交流电源供电的设备,电源插座只使用了两端,地线端是悬空的。该设备的所有电路的公共端都接在一起,并在电气上与设备的外壳相连。通常用图 3.37(c)中的外壳地(chassis ground)符号来表示这种公共端。但是,到大地的电气连接往往具有非零的阻抗。无论如何,没有理由去期望外壳地等同于大地“地”。这种情形如图 3.39(b)所示(图中将人用其等效电阻表示)。如果那个人的等效电阻要远小于与大地相连的其他所有路径的电阻,那么……只能说,不是所有的故事都有一个好的结局。

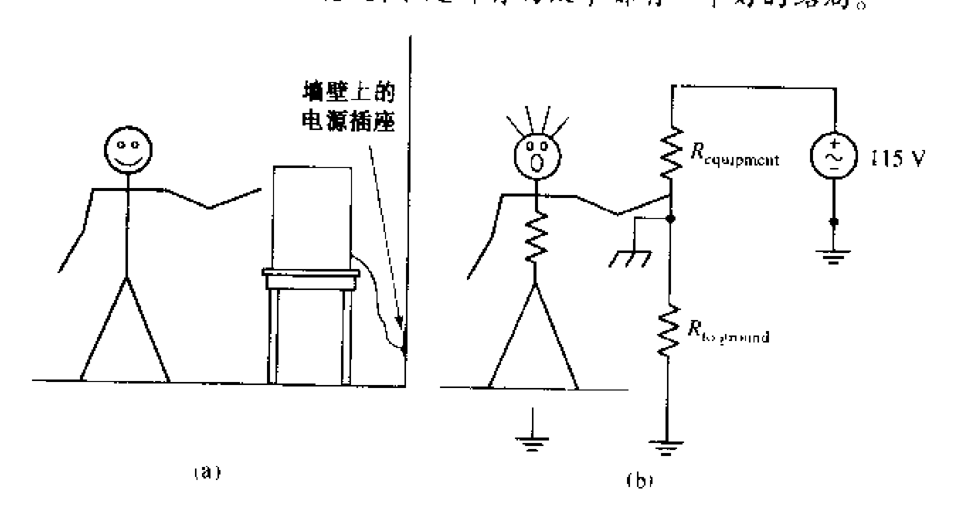


图 3.39 (a)一个人准备去触摸未正确接地的设备;(b)等效电路图,这里将人用其等效电阻表示,设备也用其等效电阻表示,除了人以外的接地路径也用其等效电阻表示

并不是所有的"地"均为"大地"这样一个事实会引起很多的安全和电噪声问题。例如，在老建筑物中有时会遇到这样的情况，其中的管道最初是由导电的铜管组成，在这些建筑物中，这样的水管通常构成一条到大地的低阻抗路径，因此用在许多电气连接中。但是，随着这些具有腐蚀性的管道被更现代和更低成本的非导电 PVC 管道系统所取代，这些到大地的低阻抗路径将不复存在。这样将产生一个相应的问题，即在某个特定的地区，地的成分差异很大，这样，两幢独立建筑物的"地"事实上可能并不相等，于是它们之间可能存在电流流动。

本书只使用一个接地符号，但需要指出的是，实际中的地并不都是相同的。

3.10　小结与复习

- 基尔霍夫电流定律（KCL）表述为：流入任何节点电流的代数和为零。
- 基尔霍夫电压定律（KVL）表述为：沿电路的任何闭合路径的电压代数和为零。
- 电路中的所有元件都流过同一个电流，称为串联连接
- 电路中的所有元件具有共同的端电压，称为并联连接。
- N 个电阻的串联连接可以用单个电阻表示，其阻值为 $R_{eq}=R_1+R_2+\cdots+R_N$。
- 串联连接的电压源可以用单个电压源来表示，但是要注意各独立源的极性。
- N 个电阻的并联连接可以用单个电阻表示，其阻值为：

$$\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\cdots+\frac{1}{R_N}$$

- 并联连接的电流源可以用单个电流源来替换，但是要注意各电流源的箭头方向。
- 利用分压关系，可以计算出串联连接电阻中的一个或者一组电阻从总电压中分配的电压。
- 利用分流关系，可以计算当一个总电流流过并联连接的一排电阻后，其中的任何一个电阻从总电流中分配的电流。

习题

1. 重画图 3.40 所示的电路，合并节点使得节点数尽可能少。

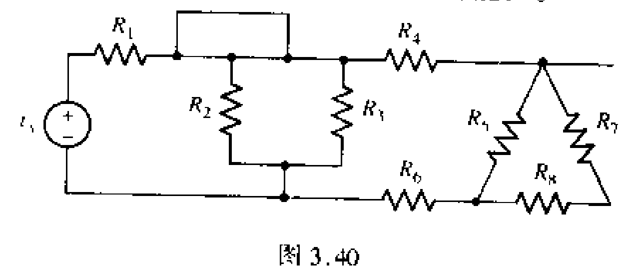


图 3.40

2. 如图 3.40 所示电路，计算（a）节点数；（b）支路数。
3. 在图 3.41 中：（a）有几个节点？（b）有几条支路？（c）从 A 到 B，经过 E，D，C，再到 B，形成一条路径或回路吗？
4. 在图 3.42 中：（a）有几个节点？（b）有几条支路？（c）如果从 B 到 F，经过 E，再到 C，形

成一条路径或回路吗?

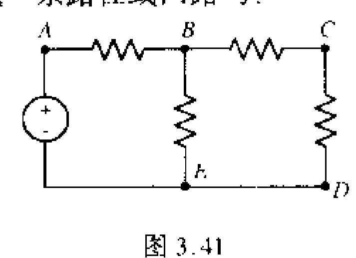


图 3.41

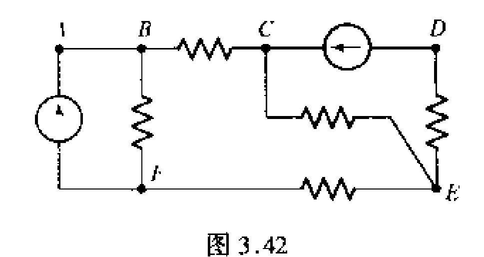


图 3.42

5.求图 3.43 中各电路的 i_x

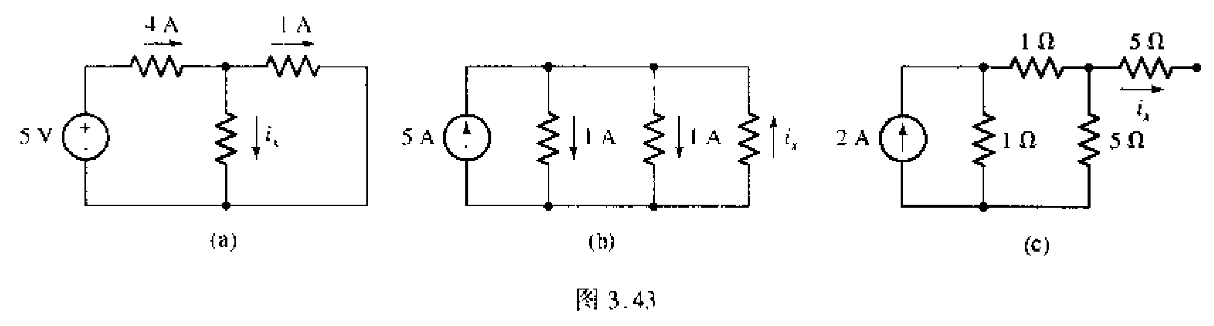


图 3.43

6.参看图 3.44 所示电路:(a)如果 $i_x=2$ A,$i_z=0$ A,求 i_y;(b)如果 $i_x=2$ A,$i_z=2i_y$,求 i_y;(c) 如果 $i_x=i_y=i_z$,求 i_z。

7.如图 3.45 所示电路,求 i_x 和 i_y。

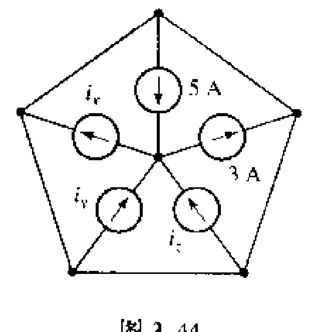


图 3.44

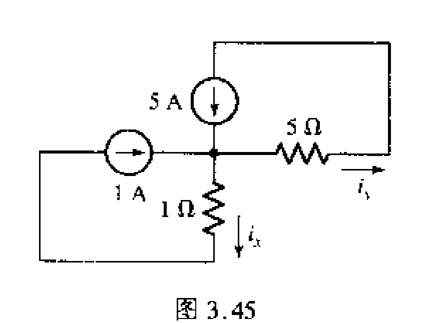


图 3.45

8.如图 3.46 所示电路:

(a) 如果 $i_z=-3$ A,求 v_x。

(b) 如果 $i_z=0.5$ A,需要用多大电压的电压源来替换 5 V 电压源,可以使得 $v_y=-6$ V?

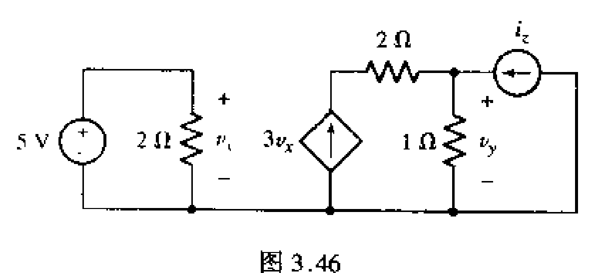


图 3.46

9.参看图 3.47(a)中的电路:

(a)如果 $i_x=5$ A,求 v_1 和 i_y;(b)如果 $v_1=3$ V,求 i_x 和 i_y;(c)怎样的 i_x 使得 $v_1\neq v_2$?

10.如图 3.47(b)所示电路,如果 5 V 电源提供的功率为 100 W,40 V 电源提供的功率为 500 W,求 R 和 G。

11.求图 3.48(a)和图 3.48(b)所示电路的电流 i。

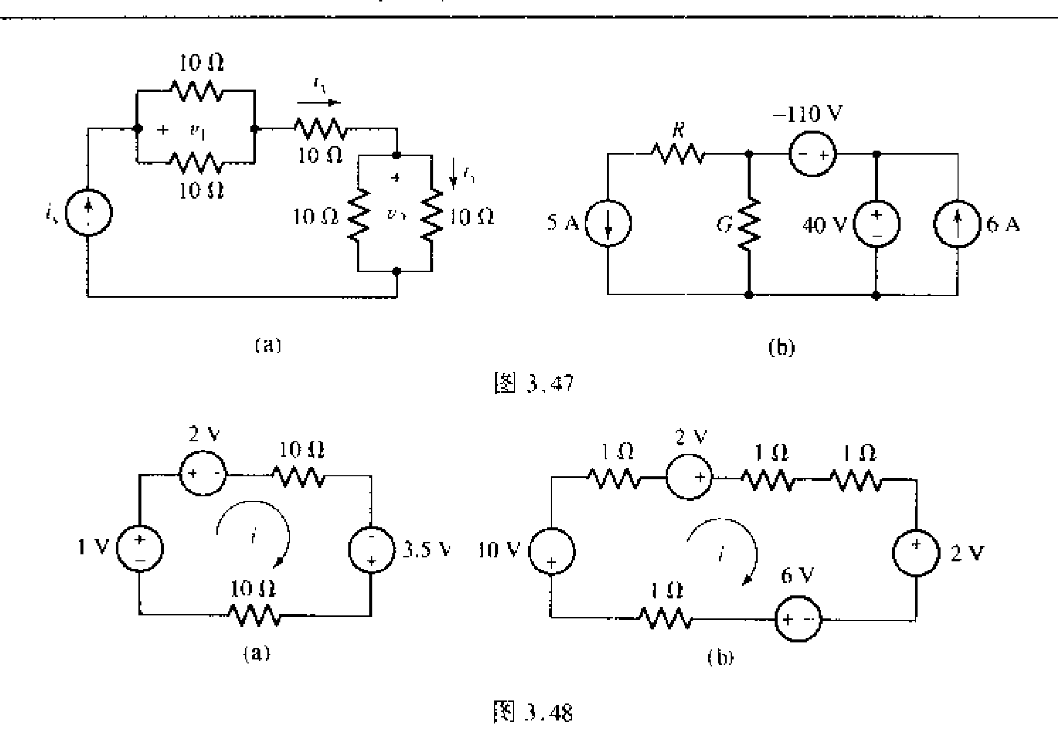


图 3.47

图 3.48

12. 应用欧姆定律和基尔霍夫定律，求图 3.49 所示电路的(a) v_x；(b) i_m；(c) I_s；(d)受控源提供功率。

13. (a)应用基尔霍夫和欧姆定律，求图 3.50 所示电路中的所有电流和电压并写出每一步的过程；(b) 求 5 个元件每个吸收的功率，并证明它们的和为零。

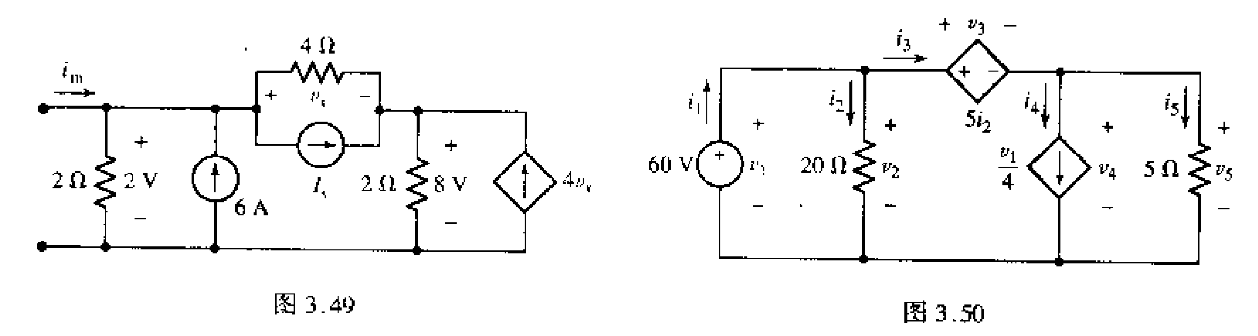


图 3.49

图 3.50

14. 参看图 3.51 所示的电路，分别求出 7 个元件所吸收的功率。

15. 某电路含有 6 个元件和 4 个节点，依次标记为 1、2、3 和 4。每个电路元件连接到不同的节点对上。已知电压 v_{12} 为 12 V(参考极性"+"为第一个脚标所对应的节点)，且 $v_{34} = -8$ V。当 v_{14} 为(a)0；(b)6 V；(c) −6 V 时，求 v_{13}，v_{23} 和 v_{24}。

16. 参看图 3.52 中的晶体三极管电路。记住，尽管还不知道该器件的电压－电流关系，但它同样遵守 KCL 和 KVL。(a) 如果 $I_D = 1.5$ mA，求 V_{DS}；(b) 如果 $I_D = 2$ mA，$V_G = 3$ V，求 V_{GS}。

17. 如图 3.53，求当 X 为下列元件时，它所吸收的功率：(a) 100 Ω 电阻；(b) 40 V 独立电压源，参考极性"+"在上端；(c) 受控电压源 $25i_x$，参考方向"+"在上端；(d) 受控电压源 $0.8v_1$，参考极性"+"在上端；(e) 2 A 独立电流源，箭头方向向上。

18. 如图 3.54 所示的电路，求 i_1，如果受控电压源为：(a)$2v_2$；(b)$1.5v_3$；(c) $-15i_1$。

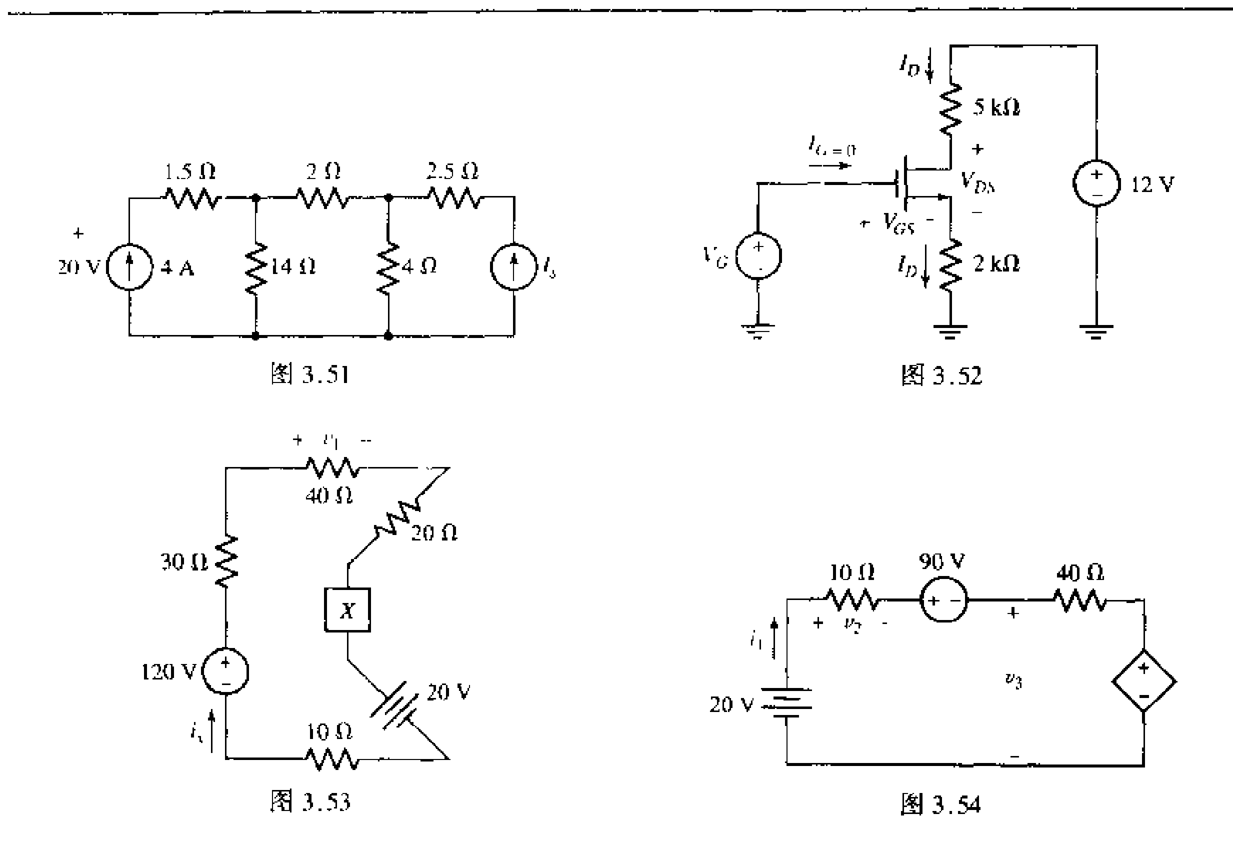


图 3.51

图 3.52

图 3.53

图 3.54

19.参看图 3.54 所示的电路,受控源为 $1.8v_3$。求下列情况下 v_3 的值:(a) 90 V 电源输出功率为 180 W;(b) 90 V 电源吸收功率为 180 W;(c) 受控源输出功率为 100 W;(d) 受控源吸收功率为 100 W。

20.电池充电器的模型如图 3.55 所示,求可变电阻 R 的值,使得:(a)充电电流为 4 A;(b)向该电池(0.035 Ω 和 10.5 V)输送的功率为 25 W;(c)电池(0.035 Ω 和 10.5 V)两端的电压为 11 V。

21.修改图 3.55 所示电路,把一个受控电压源并接到电池的两端。参考极性"+"位于底端,控制量为 $0.05i$,这里 i 为顺时针方向的回路电流。如果 $R=0.5\ \Omega$,求包括受控源在内的电池的电流和端电压。

22. 分别出求图 3.56 所示电路中的 6 个元件所吸收的功率。

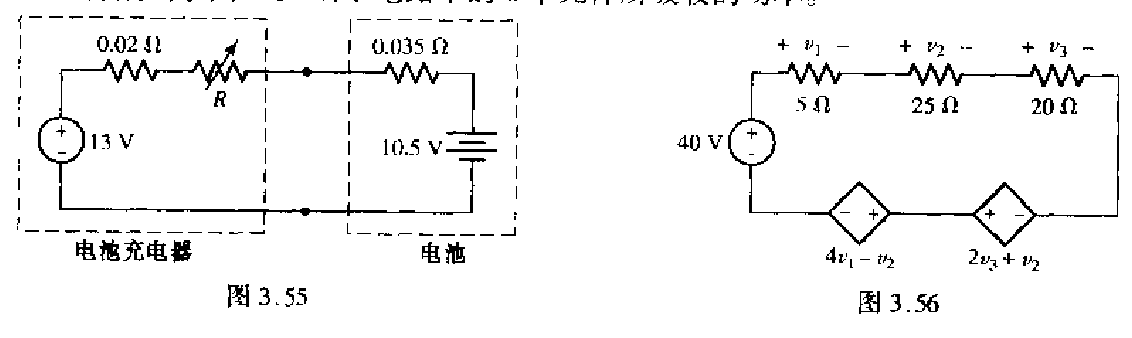


图 3.55

图 3.56

23.如图 3.57 所示电路:(a) 求电阻 R 的值使得 25 kΩ 电阻吸收的功率为 2 mA;(b) 求电阻 R 的值使得 12 V 电源向电路输出的功率为 3.6 mA;(c) 用一个电压源替换电阻 R,使得剩下的两个电阻均不吸收功率,画出替换后的电路,并标出新电源的极性。

24. 参看表 2.3，如果图 3.58 所示电路中下端的导线为 22 AWG 的实心铜导线，长 3 000 英尺，计算电流 i。



图 3.57　　　图 3.58

25. 图 3.59 中，如果 $g_m = 25 \times 10^{-3}$S，$v_s = 10 \cos 5t$ mV，求 $v_o(t)$。

26. 不管欧姆定律是否适用，基尔霍夫定律总是适用的。例如，二极管的 I-V 特性为：

$$I_D = I_S(e^{V_D/V_T} - 1)$$

其中，室温下 $V_T = 27$ mV，I_S 可以在 10^{-12}A 到 10^{-3}A 范围内变化。对于图 3.60 所示电路，如果 $I_S = 3$ μA，应用 KVL/KCL 求解 V_D（注：求解该问题将得到一个超越方程，需要用迭代的方法得到数值解，大多数科学计算器都提供这样的功能）。

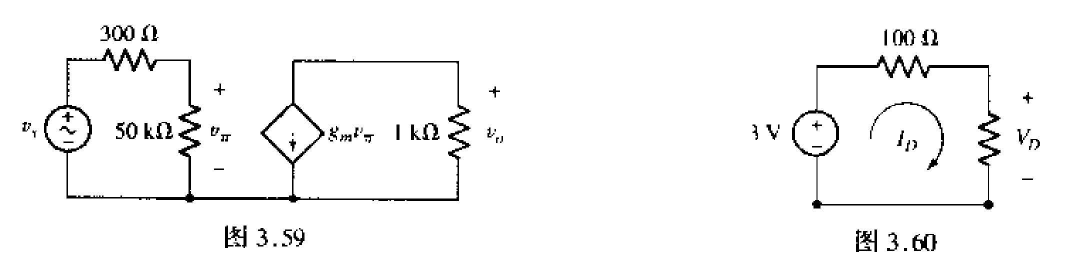


图 3.59　　　图 3.60

27. 求图 3.61 中的每个元件吸收的功率，如果受控源为(a) $0.8i_x$；(b) $0.8i_y$。

28. 如图 3.62 所示电路，求 i_x。

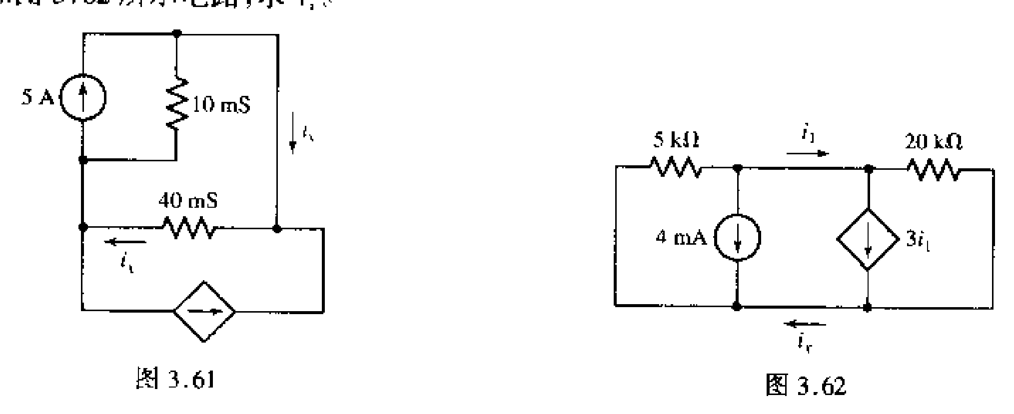


图 3.61　　　图 3.62

29. 如图 3.63 所示单节点对电路，求各个元件所吸收的功率。

30. 如图 3.64 所示电路，求元件 X 吸收的功率，如果它是一个(a)4 kΩ 电阻；(b)20 mA 独立电流源，参考箭头方向向下；(c) 受控源 $2i_x$，参考箭头方向向下；(d) 60 V 独立电压源，参考极性"+"在上端。

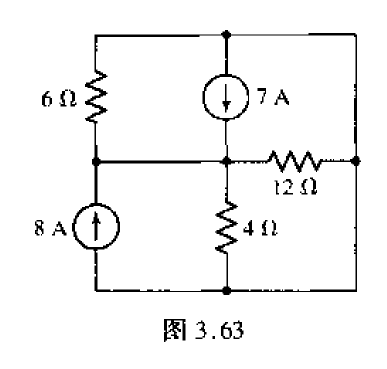


图 3.63

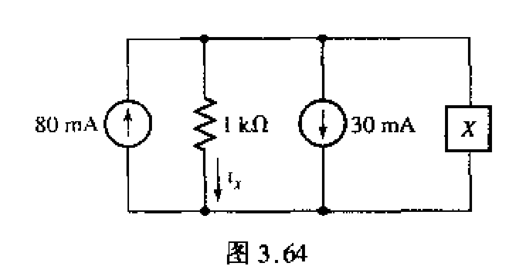


图 3.64

31. 如图 3.65 所示电路，设元件 X 为一个独立电流源 i_s，箭头方向向上。(a) 如果四个电路元件均不吸收任何功率，则 i_s 的值为多少？(b)设元件 X 为一个独立电压源 v_s，参考极性"+"在上端。如果该电压源不吸收任何功率，则 v_s 的值为多少？

32. 对图 3.66 电路中的右上节点应用单节点对的分析方法，(a)求 i_x；(b)然后处理右下的节点，求 v_8；(c)5 A 电源提供了多大的功率？

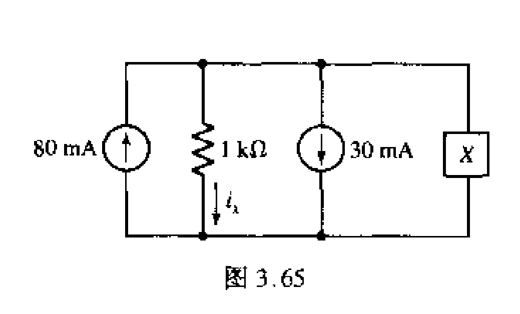


图 3.65

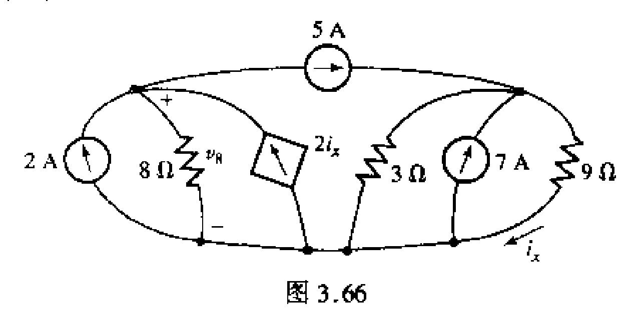


图 3.66

33. 在图 3.67 中，求 5 Ω 电阻吸收的功率。

34. 在图 3.68 中，计算各元件提供的功率。

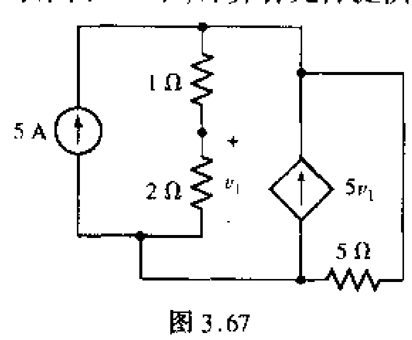


图 3.67

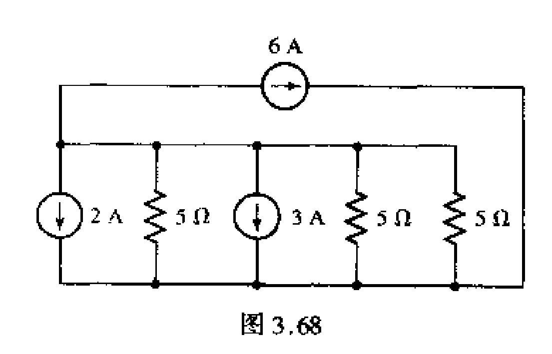


图 3.68

35. 参看表 2.3，为了使图 3.69 所示的 ab 部分的电流为 i_1 = 5 A，需要多少英里长的 28 AWG 导线？

36. 如图 3.70 所示电路，如果 v = 6 V，求 i_s。

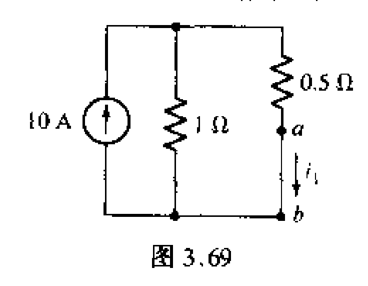


图 3.69

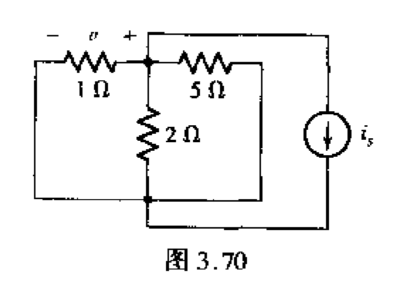


图 3.70

37. 应用电源的串联合并方法，计算图 3.71 所示两个电路中的 i。

38. 通过首先合并电源，计算图 3.71 所示两个电路中的 v。

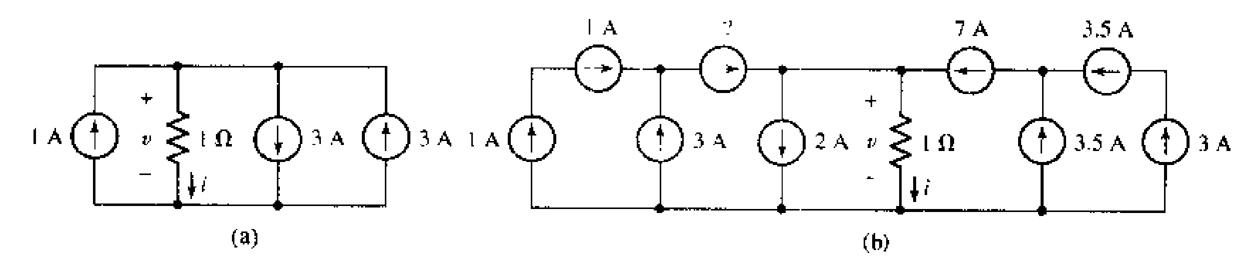


图 3.71

39. 如图 3.72 所示两个电路，计算电流 i。

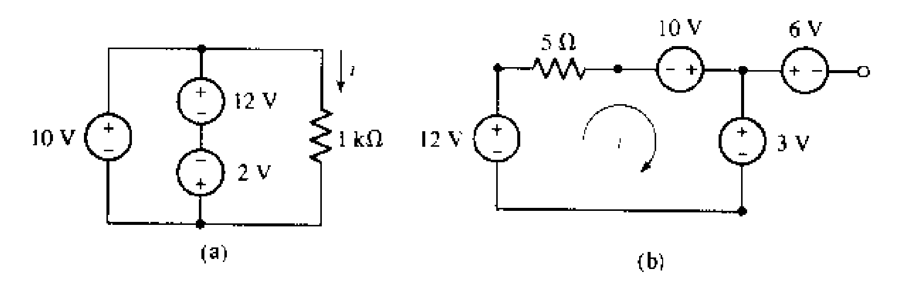


图 3.72

40. 如图 3.73 所示电路，分别求出两个 16 Ω 电阻所吸收的功率。

41. 如图 3.74 所示电路，计算 i，如果：(a) $v_1 = v_2 = 10$ V 和 $v_3 = v_4 = 6$ V；(b) $v_1 = v_3 = 3$ V 和 $v_2 = v_4 = 2.5$ V；(c) $v_1 = -3$ V，$v_2 = 1.5$ V，$v_3 = -0.5$ V 和 $v_4 = 0$ V。

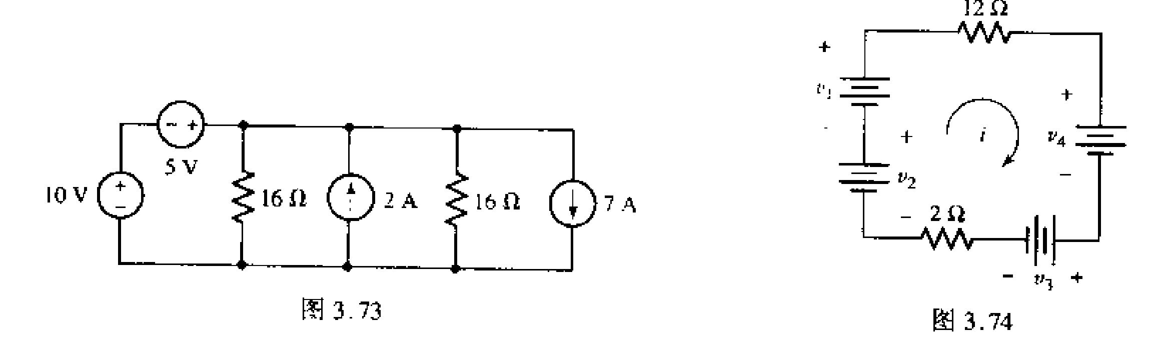


图 3.73

图 3.74

42. 如图 3.75 所示电路，选择 v_1 使得电流 i_x 为 2 A。

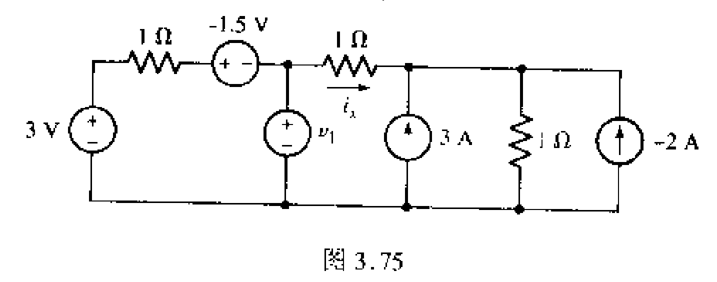


图 3.75

43. 如图 3.76 所示电路，求电压 v。

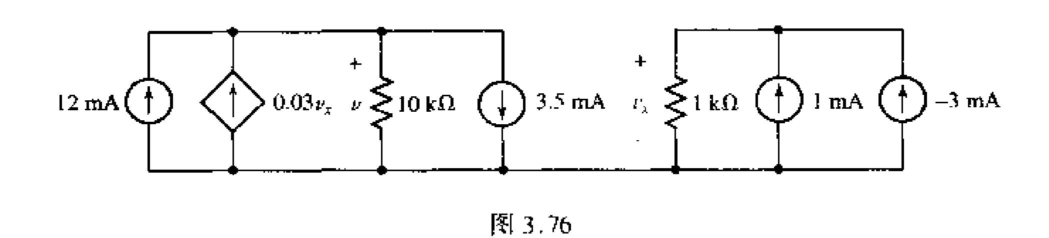


图 3.76

44. 图 3.77 所示电路中包含有几个串联或并联的电压源或电流源。(a) 求各个电源所吸收的功率;(b) 把 4 V 电源的值改为多少,将使得 − 5 A 电源提供的功率减小到零?

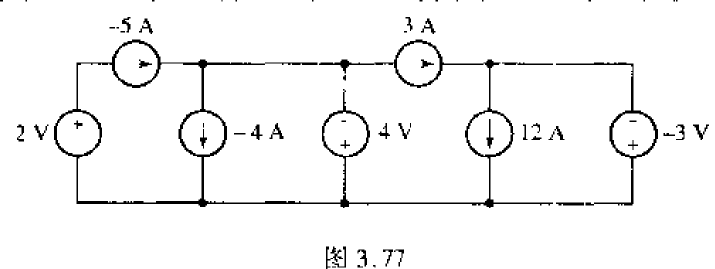


图 3.77

45. 如图 3.78 所示电路,如果各个电阻均为 1 kΩ,计算它的等效电阻。

46. 对于图 3.79 中的电路:(a) 计算其等效电阻;(b) 如果将电路扩展到 N 条支路,每条支路比它左边的支路多一个电阻,给出等效电阻的表达式。

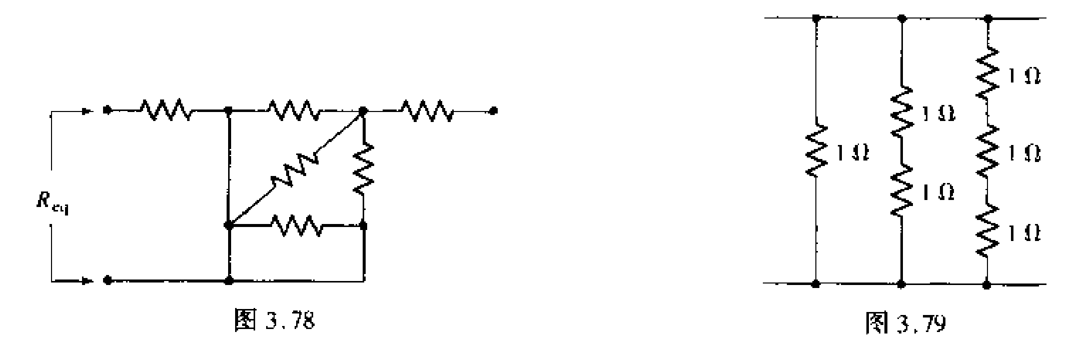


图 3.78　　　　图 3.79

47. 已有三个 10 kΩ 电阻,三个 47 kΩ 电阻和三个 1 kΩ 电阻,求出一种组合(无需用尽所有电阻)得到:(a) 5 kΩ;(b) 57 333 Ω;(a) 29.5 kΩ

48. 应用电阻和电源合并方法,简化图 3.80 所示的网络

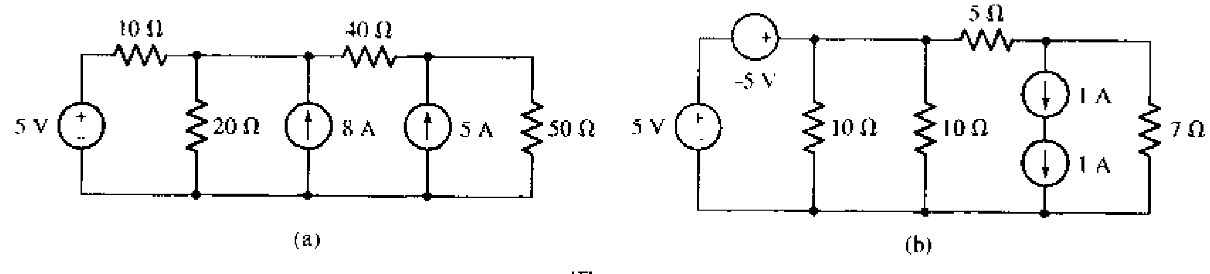


图 3.80

49. 计算图 3.81 所示电路的等效电阻。

50. 求出图 3.82 所示各个电阻电路的 R_{eq}:

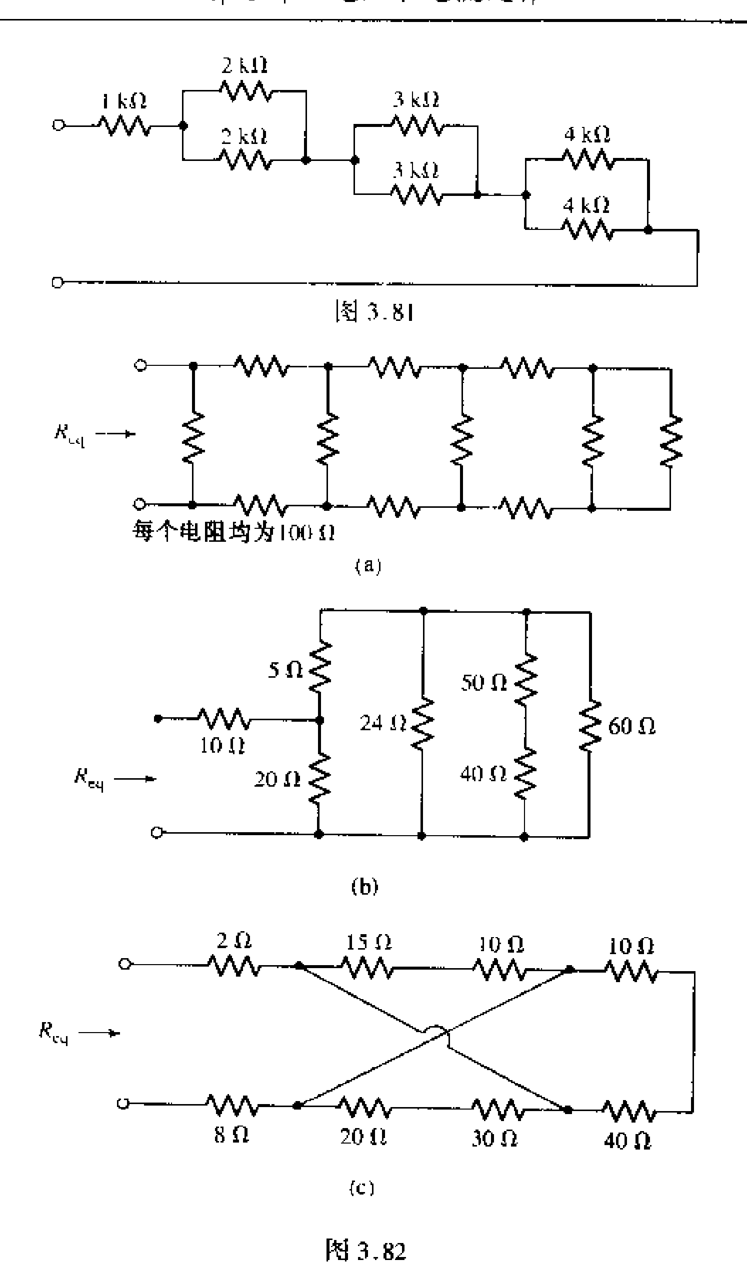


图 3.81

(a)

(b)

(c)

图 3.82

51. 如图 3.83 所示的网络：(a) 如果 $R = 80\ \Omega$，求 R_{eq}；(b) 如果 $R_{eq} = 80\ \Omega$，求 R；(c) 如果 $R = R_{eq}$，求 R。

52. 说明如何组合四个 100 Ω 电阻以得到等效电阻为 (a) 25 Ω；(b) 60 Ω；(c) 40 Ω。

53. 计算图 3.84 所示电路中各个元件吸收的功率。

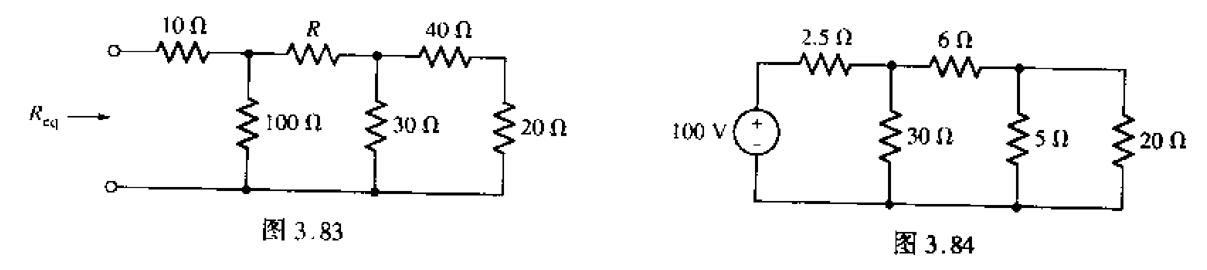


图 3.83

图 3.84

54. 应用电阻和电源合并方法，求出图 3.85 所示电路中的 v_x 和 i_x。

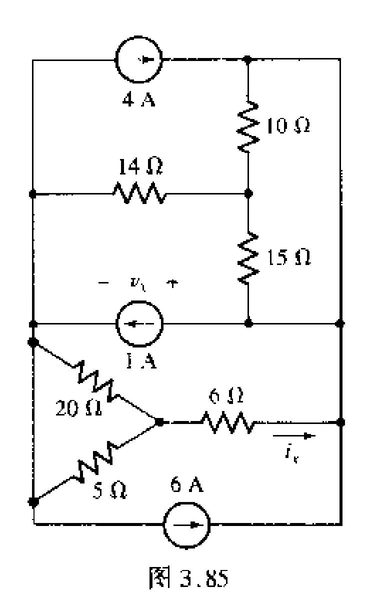


图 3.85

55. 确定图 3.86 所示的各个网络的 G_{in},图中所给值的单位均为 mS。

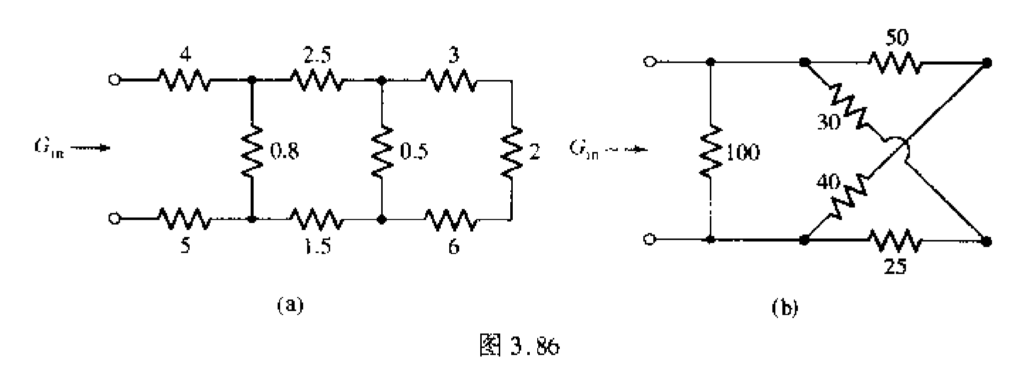


图 3.86

56. 对于图 3.87 所示的电路,在应用分流关系的同时应用电阻合并和电源合并方法,分别求出 1 Ω, 10 Ω 和 13 Ω 电阻吸收的功率。

57. 电位器是一种可以通过调节旋钮来改变电阻的装置;它通常应用于音量控制器和电灯调光器中。设计一个电位器,阻值可从 1 Ω 变化到 10 Ω,其中 1 Ω 对应于旋钮 0°,10 Ω 对应于 180°的旋转,并解释如何实现该装置的电路(提示:参考例题 2.3,并且假定在室温下进行操作)。

58. 从以下给定的电阻值中选取电阻(可以使用多次),确定图 3.88 中 v_s,R_1 和 R_2 的值,使得 $v_x = 5.5$ V[1 kΩ,3.3 kΩ,4.7 kΩ,10 kΩ]。

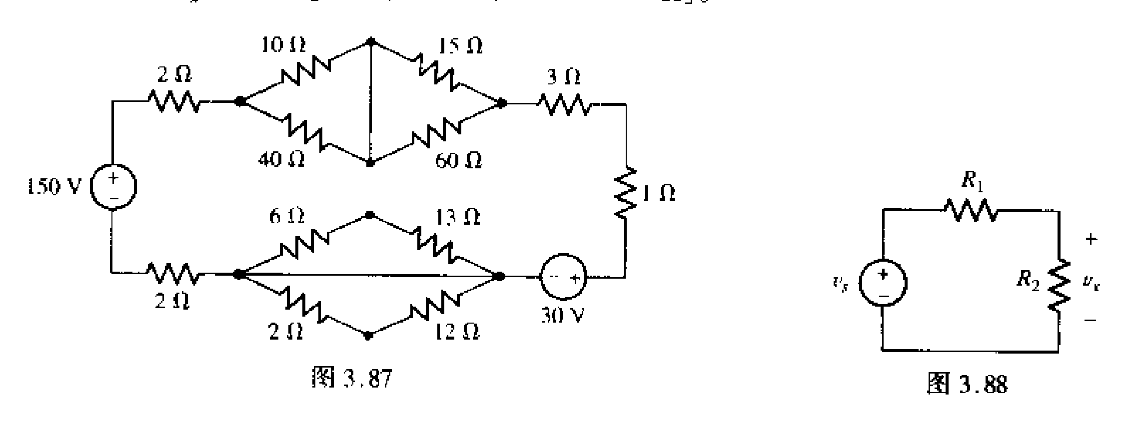


图 3.87　　　　图 3.88

59. 从以下给定的电阻值中选取电阻(可以使用多次),确定图 3.89 中 i_s, R_1 和 R_2 的值,使得 $v = 5.5$ V [1 kΩ, 3.3 kΩ, 4.7 kΩ, 10 kΩ]。

60. 计算图 3.90 中的 15 kΩ 电阻消耗的功率。

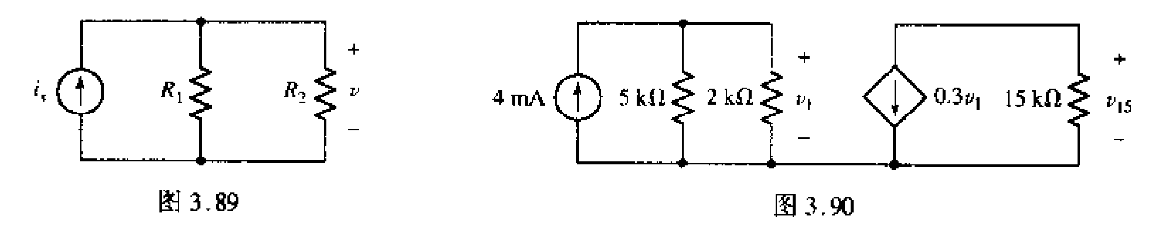


图 3.89　　　图 3.90

61. 对于图 3.91 所示电路,求 i_x,并计算 15 kΩ 电阻消耗的功率。

62. 对于图 3.92 所示电路,求 i_x, i_y 和 3 Ω 电阻消耗的功率。

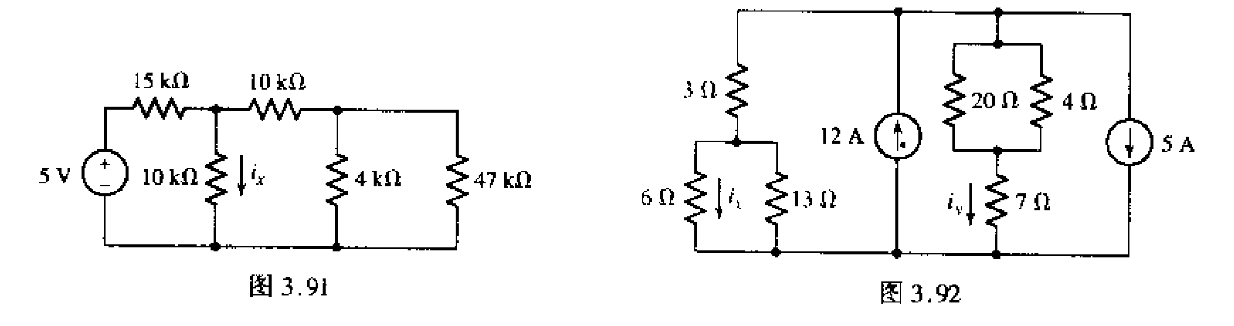


图 3.91　　　图 3.92

63. 图 3.93 中,47 kΩ 电阻消耗的功率是多少?

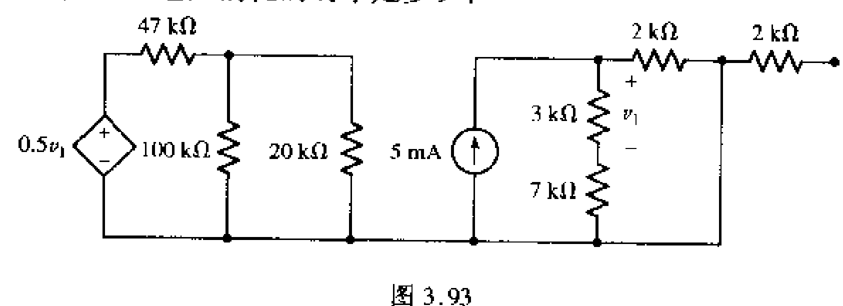


图 3.93

64. 解释为什么不能利用分压关系来求图 3.94 中的 v_1?

65. 对图 3.95 所示电路应用分流和分压关系,求(a) v_2;(b) v_1;(c) i_4 的表达式。

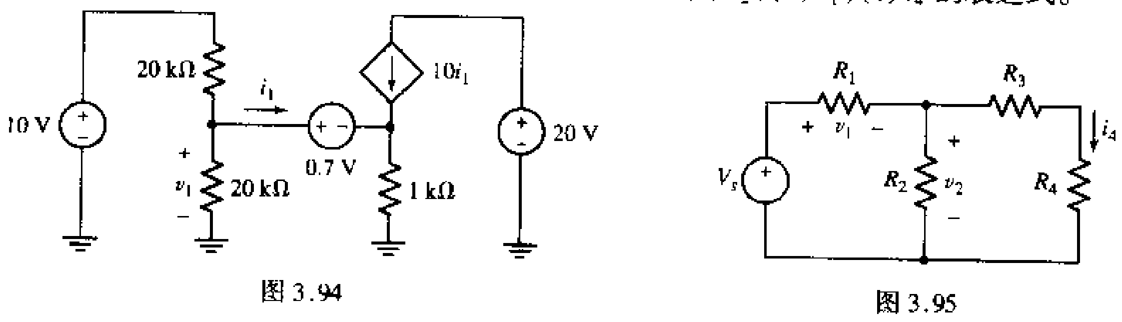


图 3.94　　　图 3.95

66. 参看图 3.96 所示电路:(a)假设 $v_s = 40$ V, $i_s = 0$,求 v_1;(b)假设 $v_s = 0$, $i_s = 3$ mA,求 i_2 和 i_3。

67. 图 3.97 中：(a)假设 $v_x = 10$ V，求 I_x；(b) 假设 $I_x = 50$ A，求 v_x；(c) 计算比值 v_x/I_x。

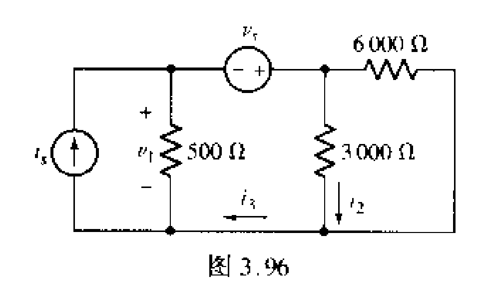


图 3.96

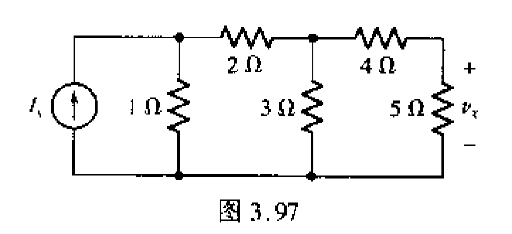


图 3.97

68. 计算图 3.98 所示电路中的 R_x 吸收了多少功率。

69. 利用分流和分压关系，求图 3.99 中 v_5 的表达式。

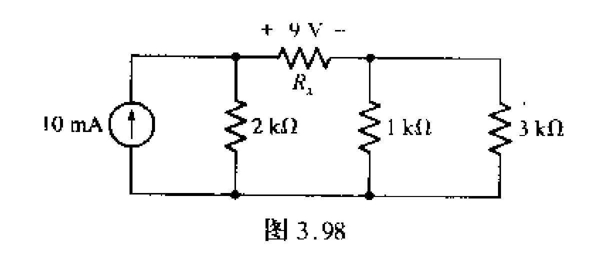


图 3.98

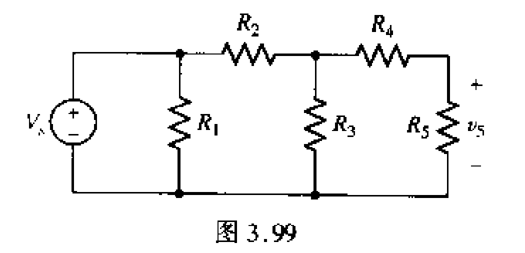


图 3.99

70. 参看图 3.100 所示电路，(a)如果 $I_1 = 12$ mA，求 I_x；(b)如果 $I_x = 12$ mA，求 I_1；(c) 如果 $I_2 = 15$ mA，求 I_x；(d)如果 $I_x = 60$ mA，求 I_1。

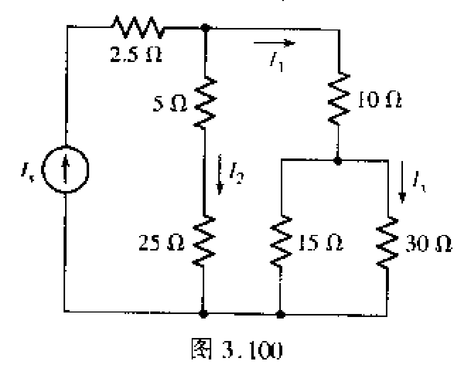


图 3.100

71. 图 3.101 为 MOSFET 放大器交流特性等效电路模型，如果 $g_m = 4$ mS，计算 v_{out}。

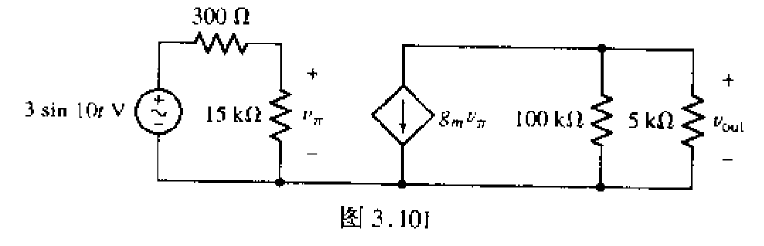


图 3.101

72. 图 3.102 为双极型晶体管放大器交流特性等效电路模型，如果 $g_m = 38$ mS，计算 v_{out}。

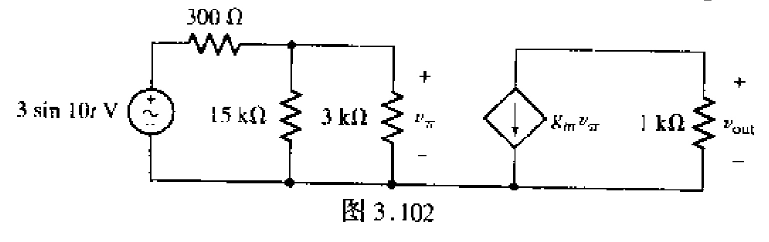


图 3.102

第4章 基本节点和网孔分析

本章要点：

- 节点分析的应用
- 网孔分析的应用
- 超节点和超网孔的应用
- 学会根据实际需要选择节点分析或网孔分析
- 熟悉计算机辅助电路分析的基本方法

4.1 引言

本章将引入两种不同的方法来分析电路。其中的一种方法称为节点分析，它基于基尔霍夫电流定律（KCL），运用节点分析方法可以对各种不同的电路建立方程。另一种方法称为网孔分析，它基于基尔霍夫电压定律（KVL），同样是电路分析中的一个很有用的方法。在很多场合下，这两种方法都可以使用，然而，由于电路元件的排列和类型的不同，其中的一种方法往往比另一种具有明显优势。

4.2 节点分析

现在已经熟悉了欧姆定律和基尔霍夫定律，以及它们在简单串联和并联电路分析中的应用。而且已经知道，可以对串联或者并联的电阻或者电源进行合并，并导出了与之相关的分压和分流原理。前面分析过的大多数电路都比较简单，虽然这在学习如何应用基本理论时是有用的，但它们是否具有实际重要性还是个疑问。所以现在必须开始分析更复杂的电路，这些更大规模的电路可能是控制电路、通信系统、电动机和发电机、功率分配网络或者是含有集成电路的电子系统，还可能是非电子系统的电路模型。

下面将要学习一种化简电路的方法，称为节点分析，它是一种有效和通用的方法。

上一章分析了仅由两个节点组成的简单电路，其中主要的一步是得到一个含有一个未知量的方程，该未知量为节点对两端的电压。现在令节点数增加，每增加一个节点，则需要增加一个未知量和一个方程。因此，3节点电路需要2个未知电压和2个方程，10节点电路需要9个未知电压和9个方程，N 节点电路需要$(N-1)$个电压和$(N-1)$个方程。

本节将讨论节点分析的原理。作为一个例子，考虑图4.1(a)所示的3节点电路。

例题4.1 求出图4.1(a)中各简单元件两端的未知电压值

第一步，重画该电路图以强调只有3个节点，如图4.1(b)所示。现在把每个节点和一个电压联系起来，但是必须记住：电压只能定义在网络中的两个节点之间。因而，首先选取一个节点作为参考节点，然后定义其余各节点相对于参考节点之间的电压。这里再次看

到，N 节点电路中只需要定义 $(N-1)$ 个电压。

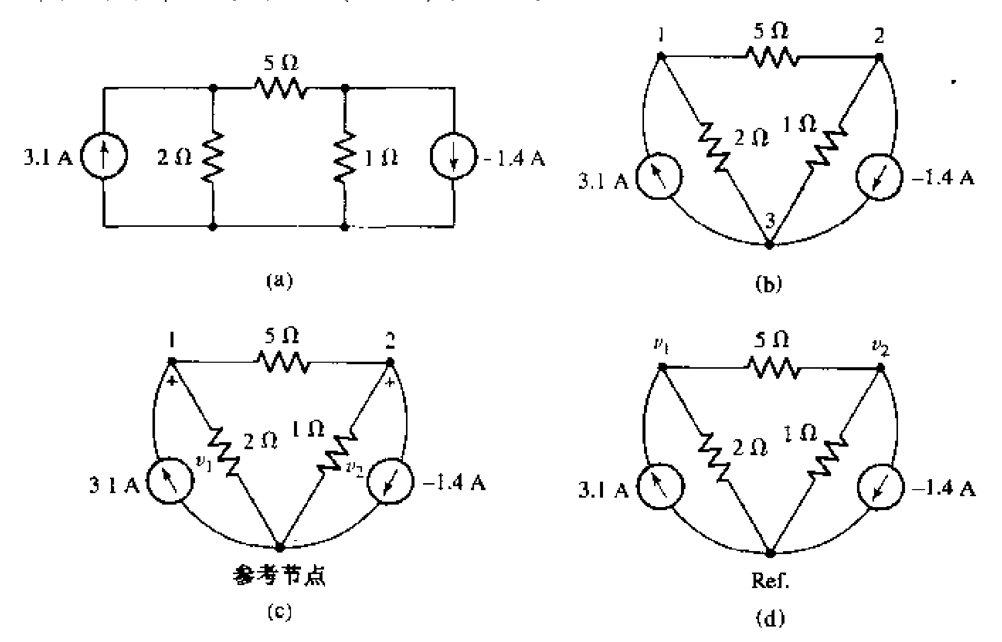


图 4.1 (a)简单的 3 节点电路；(b)为强调节点而重画的电路；(c)已选取了参考节点并标出了各电压；(d)参考电压的简写。如果需要，可以用接地符号代替"Ref."(参考节点的简写)

如果将具有最大连接支路数的节点定义为参考节点，那么可以得到简单一些的方程。如果存在接地节点，则通常选取它为参考节点将最为方便。在电路图中，接地节点通常以底端的公共导线的形式存在。在本例，选取节点 3 作为参考节点。

在电路原理图中，隐含定义参考电压为零伏。但是要记住，可以指定任何接线端为参考节点。因此参考节点为零电压是相对于其他节点电压而言的(并非相对于大地而言)。这就是说，把参考端标记为某种接地符号只是通常的做法。

将节点 1 相对于参考节点的电压定义为 v_1，将节点 2 相对于参考节点的电压定义为 v_2。定义这两个电压就足够了，因为任何两个节点间的电压都可以用它们来表示。例如，节点 1 相对于节点 2 的电压是 $v_1 - v_2$。电压 v_1，v_2 和它们的参考极性如图 4.1(c)所示。为了清晰起见，标出参考节点之后，通常就将参考极性略去，而将标有电压的节点认为是正极端[图 4.1(d)]，这可以理解为电压记号的某种简写。

现在对节点 1 和节点 2 应用 KCL，令从节点往两个电阻流出的总电流等于从电源流入节点的总电流。因此：

$$\frac{v_1}{2} + \frac{v_1 - v_2}{5} = 3.1$$

或

$$0.7v_1 - 0.2v_2 = 3.1 \tag{4.1}$$

对节点 2，得到：

$$\frac{v_2}{1} + \frac{v_2 - v_1}{5} = -(-1.4)$$

或

$$-0.2v_1 + 1.2v_2 = 1.4 \tag{4.2}$$

方程(4.1)和方程(4.2)是含有两个未知量的两个方程，这正是所需要的，并且很容易求解，解出 $v_1 = 5$ V 和 $v_2 = 2$ V。

从上可以直接求出 5 Ω 电阻两端的电压为：$v_{5\Omega} = v_1 - v_2 = 3$ V，5 Ω 电阻上的电流和它吸收的功率也可以经过一步运算得到。

练习

4.1　对图 4.2 所示电路，计算每个电流源两端的电压。

答案：$v_1 = v_2 = 20$ V（注：这意味着没有电流流过 15 Ω 电阻）

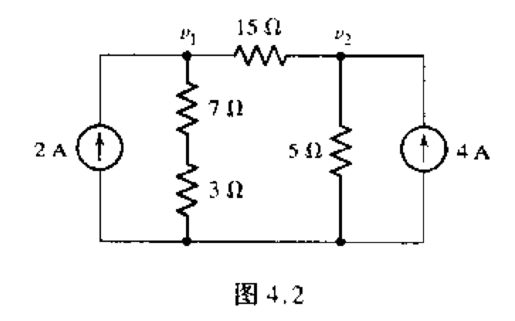


图 4.2

现在将节点数增加，运用该方法来分析一个稍微复杂的问题。

例题 4.2　求图 4.3(a)所示电路中各节点的电压

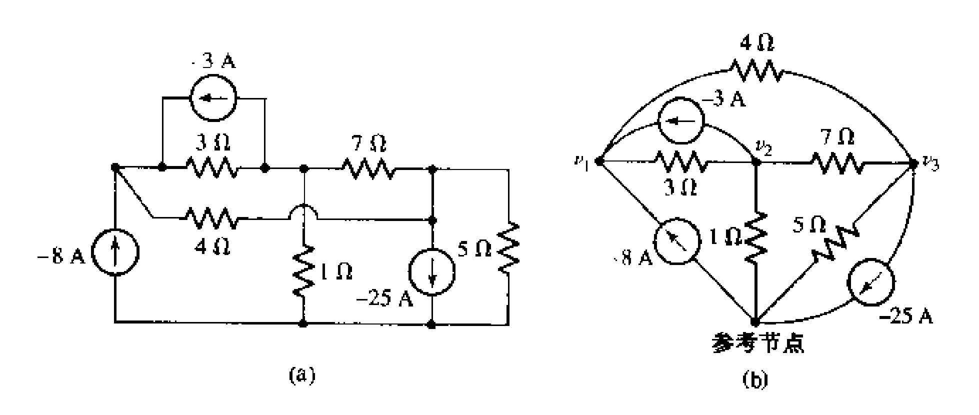


图 4.3　(a)一个 4 节点电路；(b)重画后的电路，已选定参考节点和标出了各电压

- 弄清问题的目标：

该电路有 4 个节点。选取底端的节点为参考节点，并标出其他 3 个节点的电压，如图 4.3(b)所示(为方便起见，重画了该电路)。

- 收集已知信息：

这里有 3 个未知电压：v_1，v_2 和 v_3。已经给定了所有电流源和电阻的数值，并标示在电路图中。

- 选择最适合问题的已有方法：

这个问题非常适合于用刚刚介绍的节点分析法来分析，可以列出三个独立的含有电流源和各电阻上的电流的 KCL 方程。

● 建立适当的方程组：

首先对节点 1 运用 KCL 方程：

$$-8-3=\frac{v_1-v_2}{3}+\frac{v_1-v_3}{4}$$

或

$$0.583\,3v_1-0.333\,3v_2-0.25v_3=-11 \tag{4.3}$$

注意，为了保持一致性，式中把所有的电流源(定义为流入节点 1)放在了方程左边，把所有经过电阻流出节点的电流放到方程右边。这样做的好处是使得方程的形式类似，有助于检查错误。

对节点 2：

$$-(-3)=\frac{v_2-v_1}{3}+\frac{v_2}{1}+\frac{v_2-v_3}{7}$$

或

$$-0.333\,3v_1+1.476\,2v_2-0.142\,9v_3=3 \tag{4.4}$$

以及对节点 3：

$$-(-25)=\frac{v_3}{5}+\frac{v_3-v_2}{7}+\frac{v_3-v_1}{4}$$

或

$$-0.25v_1-0.142\,9v_2+0.592\,9v_3=25 \tag{4.5}$$

● 确定是否还需要其他信息：

前面已得到含有三个未知数的三个方程。如果它们是独立的，就可以由此确定出三个电压。

● 试解：

方程(4.3)到方程(4.5)可以通过逐次消元法、矩阵法或者利用克莱姆(Gramer)法则和行列式运算来求解。使用后者，可得到：

$$v_1=\frac{\begin{vmatrix}-11 & -0.333\,3 & -0.250\,0\\ 3 & 1.476\,2 & -0.142\,9\\ 25 & -0.142\,9 & 0.592\,9\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}0.583\,3 & -0.333\,3 & -0.250\,0\\ -0.333\,3 & 1.476\,2 & -0.142\,9\\ -0.250\,0 & -0.142\,9 & 0.592\,9\end{vmatrix}}=\frac{1.714}{0.316\,7}=5.412\text{ V}$$

类似地：

$$v_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0.5833 & -11 & -0.2500 \\ -0.3333 & 3 & -0.1429 \\ -0.2500 & 25 & 0.5929 \end{vmatrix}}{0.3167} = \frac{2.450}{0.3167} = 7.736\ \text{V}$$

和

$$v_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0.5833 & -0.3333 & -11 \\ -0.3333 & 1.4762 & 3 \\ -0.2500 & -0.1429 & 25 \end{vmatrix}}{0.3167} = \frac{14.67}{0.3167} = 46.32\ \text{V}$$

求解线性系统方程组的方法有很多。在科学计算器发明以前，电路分析中常用到的方法就是克莱姆法则。为了让学生熟悉克莱姆法则的使用，这里采用了该法则，但是，以后学生可以根据自己爱好，采用任何恰当的方法。更多的细节可从附录 B 中查到。

● 验证所得解是否合理和满足要求：

一种验证解答的方法是采用另一种方法来求解上面的三个方程。除此之外，还能是否判断出这三个电压是否为"合理"值呢？在该电路的任何地方，最大可能的电流为 3 + 8 + 25 = 36 A，最大的电阻为 7 Ω，所以不可能得到任何大于 7 × 36 = 252 V 的电压。

4.2.1 电导矩阵

例题 4.2 中的三个电压表达式的分母行列式是相同的。对于既不包含电压源，也不包含受控电源的电路(即电路只包括含独立的电流源)，该分母为一个矩阵的行列式，这个矩阵定义为电路的电导矩阵：

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0.5833 & -0.3333 & -0.2500 \\ -0.3333 & 1.4762 & -0.1429 \\ -0.2500 & -0.1429 & 0.5929 \end{bmatrix}$$

需要指出的是，该矩阵是方程(4.3)、方程(4.4)和方程(4.5)中的系数的有序排列，每个元素具有电导的单位。第一行由在第一个节点的 KCL 方程的系数组成，且该系数按 v_1，v_2 和 v_3 的次序排列；第二行对应于第二个节点，以此类推。

电导矩阵是关于对角线对称的，且所有非对角元素为负值，而所有位于对角线的元素为正值，这是在选取变量，对节点应用 KCL，对方程进行排序时采用了系统方法的结果。

练习

4.2　对于图 4.4 中的所示电路，计算各电流源两端的电压。

答案：$v_{3A} = 5.235$ V，$v_{7A} = 11.47$ V

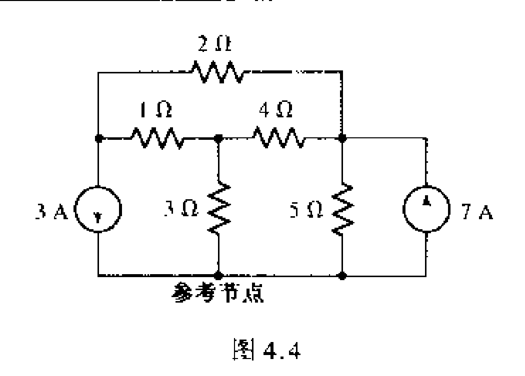


图 4.4

4.3 超节点

当然,还需要考虑电压源和受控源对节点分析的影响,下面将首先考虑电压源的影响。

作为一个典型的例子,考虑图 4.5(a)所示电路,它相当于将原来的 4 节点电路中节点 2 和节点 3 之间的 7 Ω 电阻用 22 V 电压源来代替。同样地定义相对参考节点的电压 v_1,v_2 和 v_3。在上节的例题中,接下来的一步是分别对三个非参考节点应用 KCL。这里如果也试图这样做,将会发现对节点 2 和节点 3,在列方程时都会碰到一些困难,因为不知道电压源所在支路的电流。电压源的定义规定了其电压与电流无关,所以没有办法将该电流表示为节点电压的函数。

有两种方法可以摆脱以上困境。稍为麻烦的方法是,在运应用 KCL 之前,给包含电压源的支路指定一个未知的电流,然后和前面一样对节点 2 和节点 3 运应用 KVL。对本例而言,可以得到含有 4 个未知数的 4 个方程。

更简单些的方法是将节点 2、节点 3 和电压源一起视为一种超节点(supernode),并同时对这两个节点运用 KCL,用图 4.5(a)虚线所包围的区域表示超节点。显然可以这么做,因为如果流出节点 2 的总电流为零、流出节点 3 总的电流为零,那么流出这两个节点的组合总电流也为零,这个概念可以用图 4.5(b)中局部放大的视图来表示。

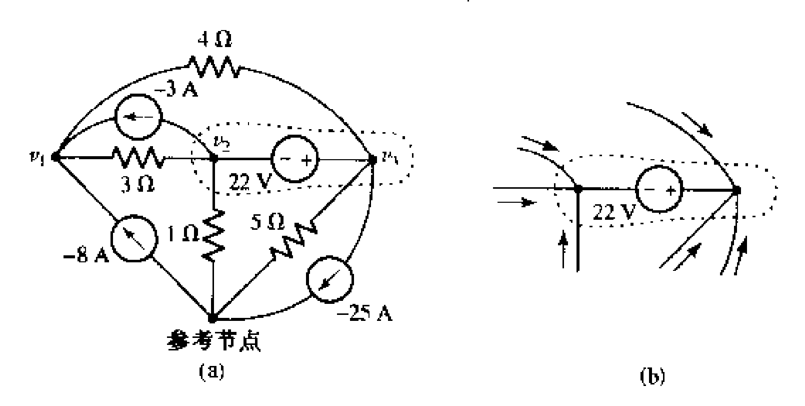


图 4.5 (a)将例题 4.2 中的 7 Ω 电阻替换为 22 V 电压源后的电路;(b)超节点区域的局部放大图。KCL要求流入区域的总电流为零,否则将会积累或者消耗电子

例题 4.3 求图 4.5(a)所示电路中的未知节点电压 v_1

节点 1 的 KCL 方程和前面例子中的一样,即

$$-8-3=\frac{v_1-v_2}{3}+\frac{v_1-v_3}{4}$$

或

$$0.5833v_1-0.3333v_2-0.2500v_3=-11 \tag{4.6}$$

首先把流出超节点的 6 个电流之和设为零。对于超节点，从 3 Ω 电阻的支路开始，按顺时针方向列出 KCL 方程：

$$3+25=\frac{v_2-v_1}{3}+\frac{v_3-v_1}{4}+\frac{v_3}{5}+\frac{v_2}{1}$$

或

$$-0.5833v_1+1.3333v_2+0.45v_3=28 \tag{4.7}$$

因为这里有三个未知量，所以还需要增加一个方程，它必须利用下面这个条件：在节点 2 和节点 3 之间有一个 22 V 的电压源。于是可得到：

$$v_2-v_3=-22 \tag{4.8}$$

求解方程(4.6)到方程(4.8)，得到 v_1 的解为 1.071 V。

练习

4.3 对图 4.6 所示的电路，计算各电流源两端的电压。

答案：5.375 V，375 mV

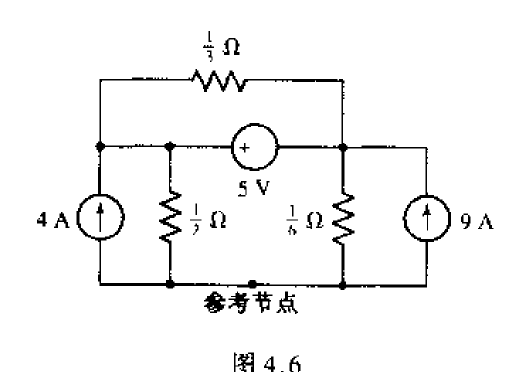


图 4.6

可以看到，电压源的存在使得非参考节点的数目减少了一个(必须在该节点应用 KCL 来得到一个方程)，不管电压源是连接在两个非参考节点之间还是在一个非参考节点与参考节点之间。当分析练习 4.3 这样的电路时，也应该要小心，因为电阻的两端为超节点的一部分，所以实际上在 KCL 方程中必须要有两个与之相应的电流项，但是它们相互抵消了。对于任何电路，用这种方法来得到节点方程组的过程，可以总结如下：

- 画出简单和整洁的电路图。标出所有元件和电源的值，每个电源应该有一个参考方向。
- 假定电路有 N 个节点，选取其中的一个为参考节点，然后依次标上节点电压 $v_1, v_2, \cdots, v_{N-1}$。记住各个电压应理解为相对于参考节点的值。
- 如果电路只包含电流源，对每个非参考节点应用 KCL，令经由电阻流出节点的总电流与流入该节点的电流源总电流相等，并按照从 v_1 到 v_2 的顺序排列。对每个受控电流源，把其电流和控制量与变量 $v_1, v_2, \cdots, v_{N-1}$ 关联起来。
- 如果电路包含电压源，则对每个电压源，把它和它的两端用虚线包围起来，形成一个超

节点。这样，当有一个电压源存在时，就减少一个节点数，原来设定的节点电压将不变。

对每个非参考节点和不包含参考节点的超节点应用 KCL。把各个电源电压和变量 v_1，v_2，…，v_{N-1}关联起来。

根据以上方法，下面考虑图 4.7 所示电路，它包含了所有的 4 种类型的电源，含有 5 个节点。

例题 4.4 求图 4.7 所示电路中各节点相对参考节点的电压

选取中间节点为参考节点，如图 4.7 所示，并从左边的节点开始，按顺时针方向依次指定电压为 v_1 到 v_4。

在每一个电压源周围建立一个超节点，然后可以看到，只需要对节点 2 和包含受控源的超节点列出 KCL 方程，而不需要另外对包含节点 1 和独立电压源的超节点列方程，因为很明显 $v_1 = -12$ V。

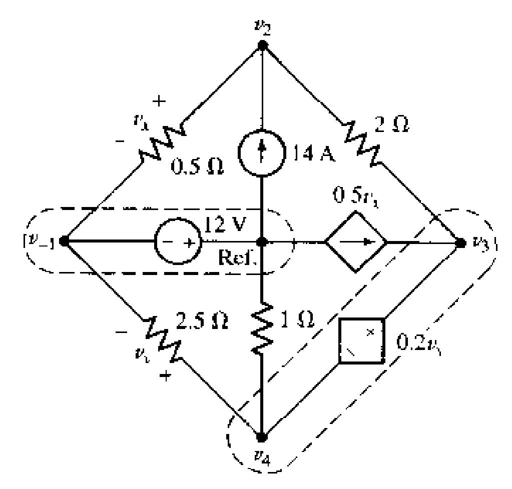


图 4.7 具有 4 种不同类型电源的 5 节点电路

在对节点 2：

$$\frac{v_2 - v_1}{0.5} + \frac{v_2 - v_3}{2} = 14 \tag{4.9}$$

对超节点 3～4：

$$0.5v_x = \frac{v_3 - v_2}{2} + \frac{v_4}{1} + \frac{v_4 - v_1}{2.5} \tag{4.10}$$

下一步，把电源电压和节点电压联系起来：

$$v_3 - v_4 = 0.2v_y \tag{4.11}$$

和

$$0.2v_y = 0.2(v_4 - v_1) \tag{4.12}$$

最后，用设定的变量表示出受控电流源：

$$0.5v_x = 0.5(v_2 - v_1) \tag{4.13}$$

现在可以消去 v_x 和 v_y，得到含有以 4 个节点电压的方程组，它由 4 个方程组成：

$$-2v_1 + 2.5v_2 - 0.5v_3 = 14$$

$$0.1v_1 - v_2 + 0.5v_3 + 1.4v_4 = 0$$

$$v_1 = -12$$

$$0.2v_1 + v_3 - 1.2v_4 = 0$$

求解，得到 $v_1 = -12$ V，$v_2 = -4$ V，$v_3 = 0$ V 和 $v_4 = -2$ V

练习

4.4　如图 4.8 所示电路，用节点分析方法求出 v_x，如果元件 A 是(a) 一个 25 Ω 的电阻；(b) 一个 5 A 的电流源，箭头指向右；(c) 一个 10 V 的电压源，正极在右端；(d)一条短路线。

答案：10.91 V；-10 V；-16.67 V；-13.33 V

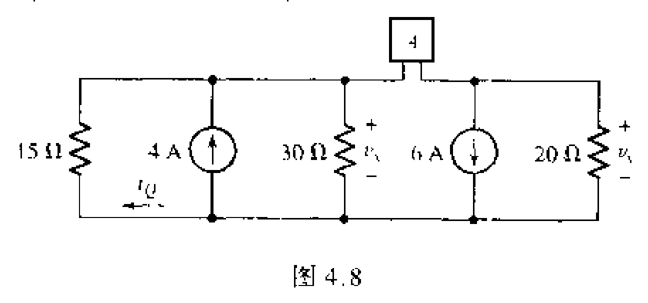


图 4.8

4.4　网孔分析

在前面所描述的节点分析方法是一种很通用的方法，总是可以将它应用于任何的电网络中。另一种可以替代的方法称为网孔分析，它有时更为简单。尽管这种方法不能适用于所有的网络，但它可以应用于大多数网络。不过，网孔分析只适用于平面网络，后面将给出平面网络的定义。

如果一个电路图可以在一个平面上画出，任何支路既不从上面也不从下面经过任何一个其他支路，那么这个电路就称为平面网络。因此，图 4.9(a)是一个平面网络，图 4.9(b)不是一个平面网络，而图 4.9(c)是一个平面网络，尽管它看起来不像平面网络。

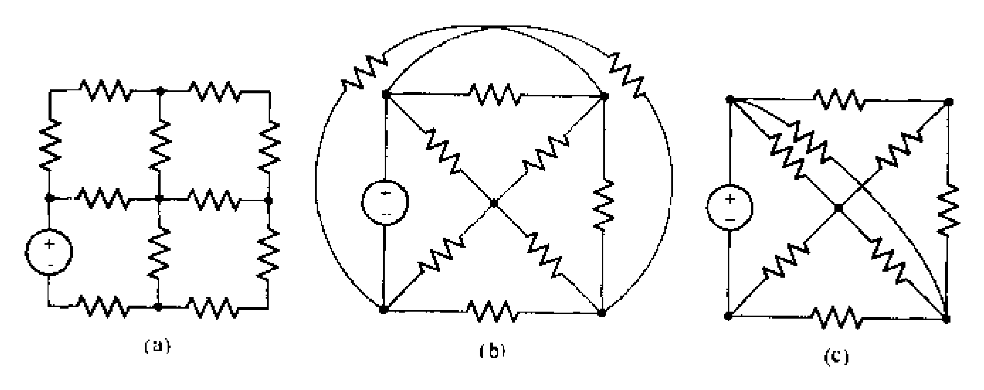


图 4.9　平面网络和非平面网络的例子，没有加实点的交叉导线不存在物理连接

在 3.1 节已经了定义路径、闭合路径和回路的概念。在定义网孔之前，先考虑图 4.10 中粗线表示的几组支路。第一组支路不是一条路径，因为 4 条支路都由中心间的节点连接，并且显然也不是一个回路；第二组支路也不构成一条路径，因为如果遍历它必然两次经过中间节

点;剩下其余的4条路径都是回路 该电路包含11条支路。

应该指出,对于非平面电路,不可能定义完备的惟一网孔集,所以不能指定一组惟一的网孔电流,因而网孔分析法不适用于非平面电路。

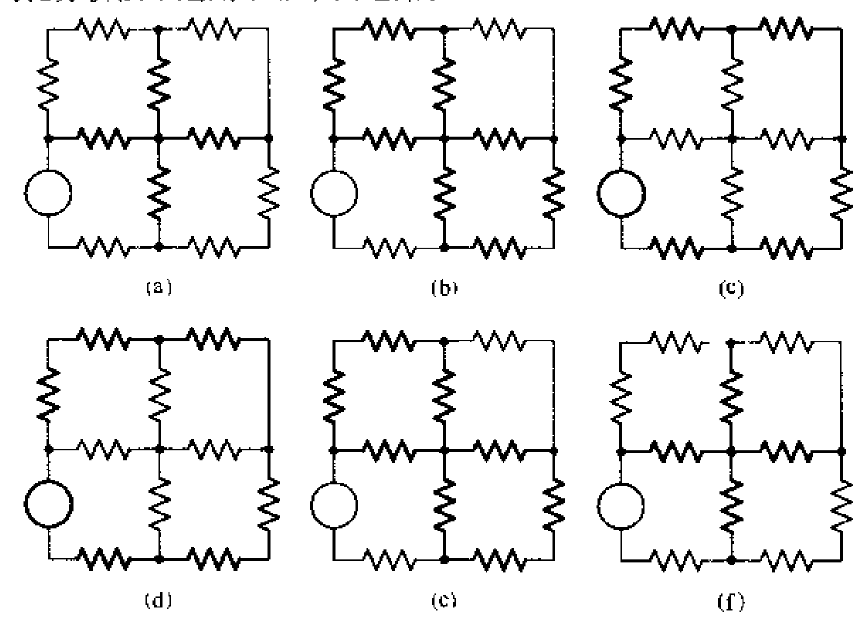


图4.10 (a)粗线表示的支路集既不是路径也不是回路;(b)这里的支路集不构成一条路径,因为要遍历这些支路必然两次经过中心节点;(c)该路径是一条回路,但不是网孔,因为它还包含其他回路;(d)该路径是一条回路,但不是一个网孔;(e,f)这两条路径均是回路,也是网孔

网孔是平面电路的一个特性,对于非平面电路没有定义。在一个电路中,网孔定义为不包含任何其他回路的回路。因此,图4.6(c)和图4.6(d)所示的回路不是网孔,而图4.6(e)和图4.6(f)是网孔。一个电路如果画成整洁的平面形式,它通常看起来像是一个多格子(multipaned)的窗口,在窗口中的每个格子的边界均可视为一个网孔。如果一个网络是平面的,就可以使用网孔分析方法,这种方法需要用到网孔电流的概念。在分析图4.11所示的两网孔电路时将引入这个概念。

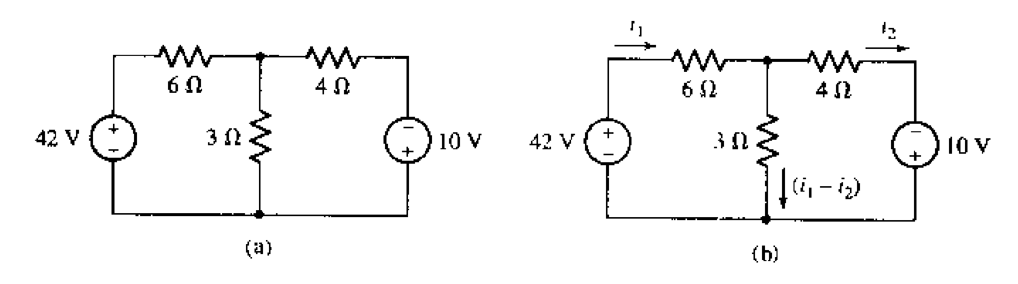


图4.11 求该简单电路中的电流

例题4.5 确定图4.11(a)所示电路中流过各电阻的电流

和单回路电路中分析一样,首先对通过每个支路的电流定义一个电流。定义向左流过6 Ω的电阻的电流为 i_1。对两个网孔分别应用KVL,得到的两个方程已足以求解出两个未知量。下一步,定义第二个电流 i_2 为向左流过4 Ω的电阻的电流。定义向下流过中间支路的电流为 i_3,根据KCL,显然,i_3 可以用前面已定义的两个电流表示为$(i_1 - i_2)$。所定义

的电流如图 4.11(b)所示。

现在，根据求解单回路电路的方法，对左边的网孔应用 KVL：

$$-42+6i_1+3(i_1-i_2)=0$$

或

$$9i_1-3i_2=42 \tag{4.14}$$

对右边的网孔应用 KVL：

$$-3(i_1-i_2)+4i_2-10=0$$

或

$$-3i_1+7i_2=10 \tag{4.15}$$

方程(4.14)和方程(4.15)是独立方程，即其中的一个不能从另一个导出。这里有两个方程和两个未知量，于是很容易求解得：

$$i_1=6\text{ A};i_2=4\text{ A 和 }(i_1-i_2)=2\text{ A}$$

如果电路包含 M 个网孔，那么将有 M 个网孔电流，因此需要列出 M 个独立方程。

现在，使用稍微不同于网孔电流定义的方式来考虑同样的问题。这样定义网孔电流的最大好处之一是基尔霍夫电流定律将自动满足，因为如果一个网孔电流流入某个节点，那么它也必然从该节点流出。

例题 4.6　使用网孔分析法，重做例题 4.5，求图 4.12 所示电路中的 i_1 和 i_2

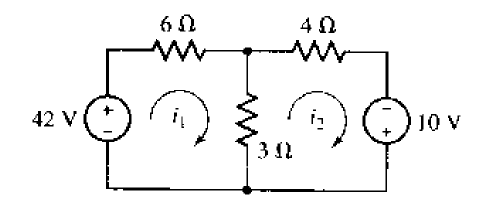


图 4.12　与例题 4.5 中的电路相同，但从另一个不同的方式来分析

如果把左边的网孔标为网孔 1，则可以建立一个网孔电流 i_1，它沿顺时针方向流动。网孔电流用几乎封闭的弯箭头表示，并在相应的网孔中画出，如图 4.12 所示。在另一个网孔中可以建立网孔电流 i_2，同样沿着顺时针方向。尽管网孔电流方向的选取是任意的，但将总是选取顺时针方向，因为由此得出的方程具有某种对称性，它可以减少错误。

这时，不再需要在各个支路中标上电流方向，任何支路的电流由它所在的各网孔的网孔电流来得到。做到这一点这并不困难，因为不存位于两个以上网孔的支路。例如，3 Ω 的电阻位于两个网孔中，向下流过入它的电流就是 i_1-i_2；6 Ω 的电阻只在网孔 1 中出现，于是在该支路中向右的电流等于网孔电流 i_1

对于左边的网孔：

$$-42+6i_1+3(i_1-i_2)=0$$

而对右边的网孔：

$$3(i_2 - i_1) + 4i_2 - 10 = 0$$

这两个方程等价于方程(4.14)和方程(4.15)

网孔电流往往等同于某个支路电流，如本例中所示的 i_1 和 i_2，但并不总是这样。例如考虑一个方形的 9 网孔的网络，可以发现，中间的网孔电流与任何支路中的电流都不同。

练习

4.5 求图 4.13 所示电路中的 i_1 和 i_2。

答案：$i_1 = +184.2$ mA；$i_2 = -157.9$ mA

接下来，考虑一个含有 5 个节点，7 条支路和 3 个网孔的的电路，如图 4.14 所示。由于多了一个网孔，这个电路比较复杂。

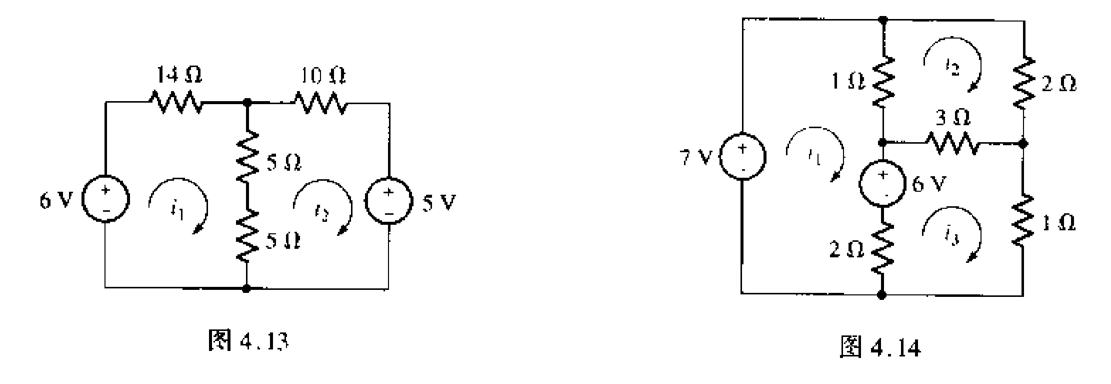


图 4.13　　　　图 4.14

例题 4.7 使用网孔分析法，求图 4.14 所示电路中的 3 个网孔电流

所要求解的 3 个网孔电流如图 4.14 所示，分别对各网孔应用 KVL，可得：

$$-7 + 1(i_1 - i_2) + 6 + 2(i_1 - i_3) = 0$$

$$1(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0$$

$$2(i_3 - i_1) - 6 + 3(i_3 - i_2) + 1i_3 = 0$$

化简后，可得：

$$3i_1 - i_2 - 2i_3 = 1$$

$$-i_1 + 6i_2 - 3i_3 = 0$$

$$-2i_1 - 3i_2 + 6i_3 = 6$$

求解，得到 $i_1 = 3$ A；$i_2 = 2$ A 和 $i_3 = 3$ A。

练习

4.6 求图 4.15 所示电路中的 i_1 和 i_2。

答案：2.220 A；470.0 mA

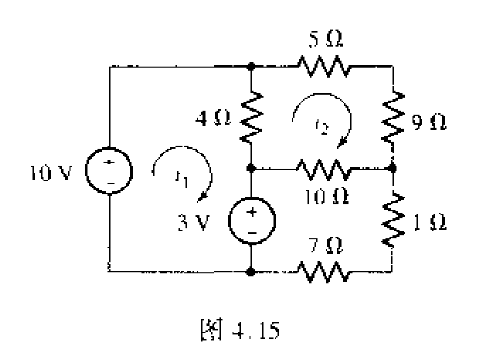


图 4.15

4.5 超网孔

当网络中有电流源时，如何修正前面的直接分析过程呢？从前面的节点分析可以得到启示，对于网孔分析也有两种可能的方法。第一种，可以对电流源两端设定一个未知电压，和以前一样，沿每个网孔应用 KVL，然后将电流源和设定的网孔电流联系起来，总的来说这种方法相对麻烦一些。

更好的方法是采用与节点分析中的超节点类似的方法。在那里构造了一个超节点，它将电压源完全包含在里面，这样，对于每一个电压源就减少了一个非参考节点。现在，用含有公共电流源的两个网孔来构造一个"超网孔"，该电流源位于超网孔的内部，这样存在电流源的地方就减少了一个网孔。如果电流源位于电路的边界，那么它所在的网孔就被略去。于是，可以仅对处理后的网络中的网孔或者超网孔应用基尔霍夫电压定律。

例题 4.8　使用网孔分析法，求图 4.16(a)中的 3 个网孔电流

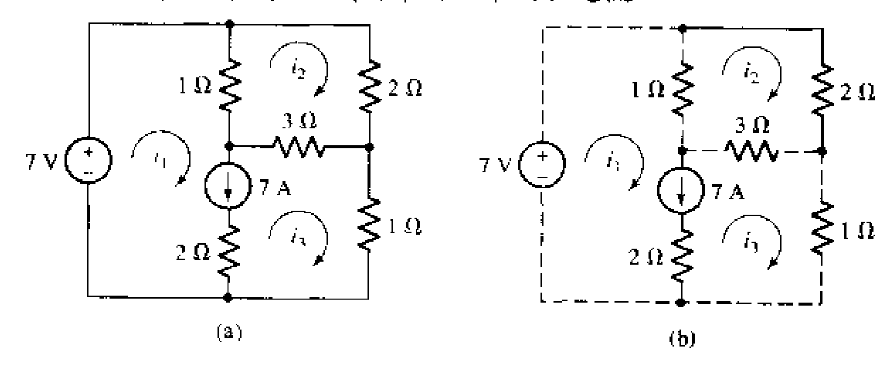


图 4.16　(a)包含一个独立电流源的 3 网孔电路；(b)虚线所示部分定义了一个超网孔

注意到，一个独立的 7 A 电流源位于两个网孔的公共边界上。已经设定网孔电流为 i_1，i_2 和 i_3，由于有电流源的存在，说明可以建立一个超网孔，它包含网孔 1 和网孔 3，如图 4.16 所示　沿该回路应用 KVL：

$$-7 + 1(i_1 - i_2) + 3(i_3 - i_2) + 1i_3 = 0$$

或

$$i_1 - 4i_2 + 4i_3 = 7 \tag{4.16}$$

沿网孔 2 则有：

$$1(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0$$

或

$$-i_1+6i_2-3i_3=0 \tag{4.17}$$

最后,把该独立源的电流和设定的网孔电流联系起来:

$$i_1-i_3=7 \tag{4.18}$$

求解方程(4.16)到方程(4.18),得到 $i_1=9$ A; $i_2=2.5$ A 和 $i_3=2$ A。

练习

4.7 求图4.17中的电路中的电流 i_1。

答案: -1.93 A

如果存在一个或多个受控源,只需要将各受控电源的大小及其控制量用网孔电流来表示即可。例如在图4.18中,注意到,在这个网络中,同时包含了一个受控源和一个独立源。下面将看到它们的存在如何影响了对电路的分析(实际上是简化了分析过程)。

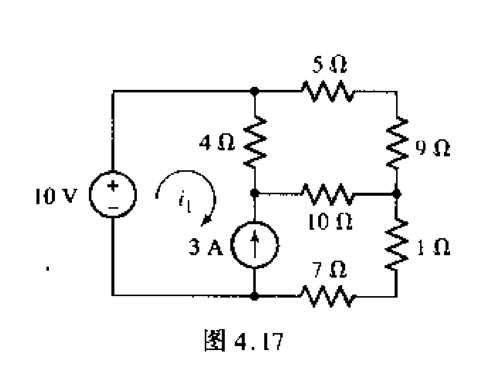


图4.17

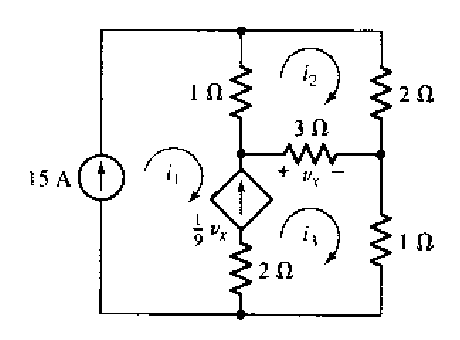


图4.18 带有一个受控源和独立源的3网孔电路

例题4.9 使用网孔分析法,求出图4.18中的3个未知电流

受控电流源位于网孔1和网孔3之间,而由于15 A的电源位于电路的边界,所以可以不考虑网孔1(显然有 $i_1=15$ A)。这样,受控源相当于位于电路的边界,于是不需要对网孔3列出任何方程,仅剩下网孔2,应用KVL有:

$$1(i_2-i_1)+2i_2+3(i_2-i_3)=0$$

现在来求各电源的大小,得到:

$$i_1=15\ \text{A}$$

和

$$\frac{v_x}{9}=i_3-i_1=\frac{3(i_3-i_2)}{9}$$

于是,有:

$$-i_1+6i_2-3i_3=0$$
$$i_1=15$$
$$-i_1+\frac{i_2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)i_3=0$$

求出 $i_1=15$ A; $i_2=11$ A 和 $i_3=17$ A。可以看到,前面浪费了一些时间来给左边的网孔设定网孔电流 i_1,因为本来可以简单地把它标为15 A

练习

4.8　使用网孔分析法，求出图 4.19 所示电路中的 v_3。

答案：79.2 V

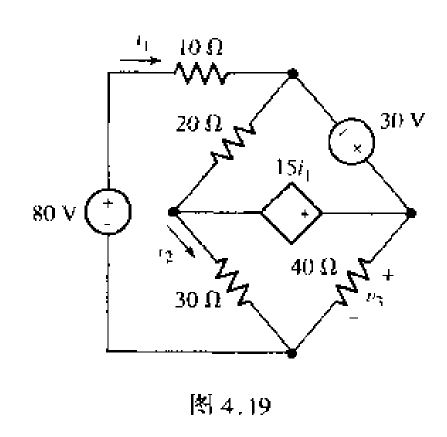


图 4.19

这里，将列写网孔方程组的方法总结如下：

- 确定网络是一个平面网络，否则网孔分析将不适用。
- 画出整洁和简单的电路图，并标出所有元件和电源的数值。
- 假定电路有 M 个网孔，对每个网孔设定一个顺时针方向的电流：$i_1, i_2, \cdots, i_M$。
- 如果电路只包含电压源，沿每个网孔应用 KVL；如果电路只包含独立电压源，令顺时针方向的电阻电压和等于反时针方向的所有电源的电压和，并按 i_1 到 i_M 的顺序排序。当存在一个受控电压源时，把电压源电压和受控量与变量 $i_1, i_2, \cdots, i_M$ 联系起来。
- 如果电路包含电流源，则对位于两个网孔之间的每一个电流源构造一个超网孔，沿着这两个网孔中由非公用支路组成一个更大的回路应用 KVL。如果一个网孔包含位于电路边界的电流源，则不需要对其应用 KVL。注意，已指定好的网孔电流不应该再改变。最后，把每个电源电流与变量 $i_1, i_2, \cdots, i_M$ 联系起来。

4.6　节点分析和网孔分析的比较

现在已经学习了两种截然不同的电路分析方法，很自然地要问，采用某一种方法是否比另一种方法更好呢？如果电路不是平面网络，那么没有选择的余地：只能采用节点分析法。

但是，对于平面网络而言，那么确实是这样的：其中一种方法要比另外一种方法好一些。如果采用节点分析法，那么具有 N 个节点的电路最多可以列出 $N-1$ 个 KCL 方程，而每定义一个超节点就可以减少一个方程。基于以上事实，应该选择可以得到最少的联立方程个数的方法。

从根本上说，两种方法所能得到的方程数目一样多，那么要看需要求解什么量。节点分析法可以直接给出节点电压，而网孔分析法则直接给出电流。例如，如果需要求出流过一组电阻上的电流，若采用节点分析法，将在完成节点分析之后，还必须对每一个电阻应用欧姆定律来求出电流。

举一个例子来说明，考虑图 4.20 所示电路，希望求出电流 i_x。

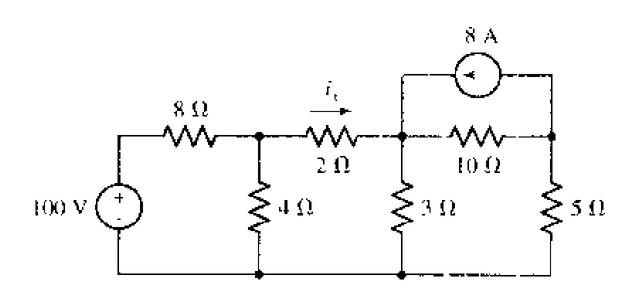


图 4.20　一个具有 5 节点和 4 网孔的平面电路

选取底端节点为参考节点，并且注意到该电路含有 4 个非参考节点，尽管这意味着可以列出 4 个不同的方程，但是并不需要标出在 100 V 电源和 8 Ω 电阻之间的节点的电压，因为很明显该节点该电压为 100 V。因此，只需将余下的节点电压分别标为 v_1，v_2 和 v_3，如图 4.21 所示。

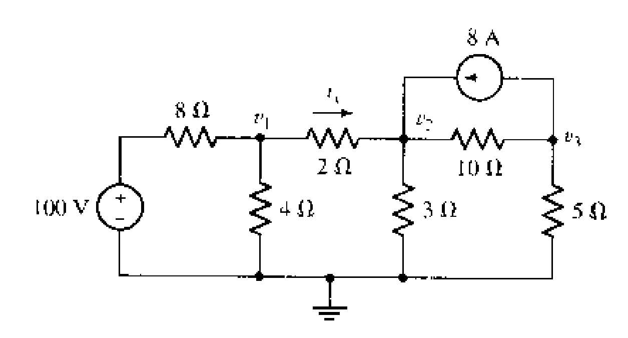


图 4.21　同图 4.20 中的电路，但已标出节点电压。需要注意的是，这里选取用了一个接地符号来表示参考端

对各节点应用 KCL，可以列出如下 3 个方程：

$$\frac{v_1-100}{8}+\frac{v_1}{4}+\frac{v_1-v_2}{2}=0 \quad 或 \quad 0.875v_1-0.5v_2=12.5$$

$$\frac{v_2-v_1}{2}+\frac{v_2}{3}+\frac{v_2-v_3}{10}-8=0 \quad 或 \quad -0.5v_1-0.933\,3v_2-0.1v_3=8$$

$$\frac{v_3-v_2}{10}+\frac{v_3}{5}+8=0 \quad 或 \quad -0.1v_2+0.3v_3=-8$$

求解，得到 $v_1=25.89$ V 和 $v_2=20.31$ V。应用欧姆定律，可以得到电流 i_x：

$$i_x=\frac{v_1-v_2}{2}=2.79\text{ A}$$

接下来，用网孔分析法来分析同一个电路。从图 4.22 可看出，电路有 4 个不同的网孔。很显然 $i_4=-8$ A，于是只需要列出三个不同的方程。

对网孔 1、网孔 2 和网孔 3 写出列出 KVL 方程：

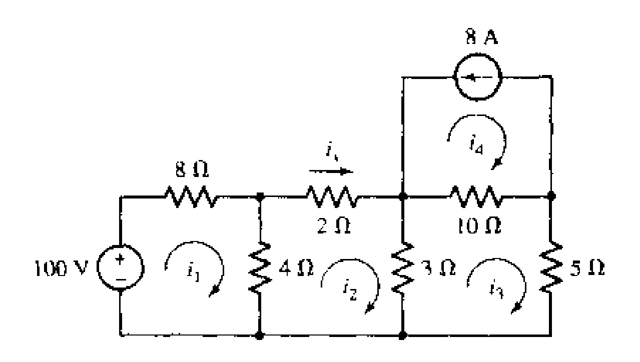


图 4.22 同图 4.20 中的电路,但已标出网孔

$$-100+8i_1+4(i_1-i_2)=0 \quad 或 \quad 12i_1-4i_2=100$$
$$4(i_2-i_1)+2i_2+3(i_2-i_3)=0 \quad 或 \quad -4i_1+9i_2-3i_3=0$$
$$3(i_3-i_2)+10(i_3+8)+5i_3=0 \quad 或 \quad -3i_2+18i_3=-80$$

求解,得到 $i_2(=i_x)=2.79$ A。对于本例的特定问题而言,证明用网孔分析法更简单些。但是,既然两种方法都适用,那么对同一个问题就可以采用两种不同的方法来求解,这可以作为检验答案的一种方法。

4.7 计算机辅助电路分析

前面已经看到,构造一个复杂的电路,并不需要用太多的元件。但在分析更复杂的电路时,很明显更容易犯错误,并且手工验算答案将变得很费时间。通常使用 PSpice 软件来进行快速的电路分析,PSpice 是一种功能强大的计算机软件包,它将原理图绘制工具和印刷电路板或者集成电路设计工具集成在一起。SPICE(Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis)最早是在 20 世纪 70 年代由加州大学伯克利分校开发出来的,现在已成为一个工业标准。1984 年,MicroSim 公司引入了 PSpice,它是以 SPICE 程序库为核心的一个直观的图形界面。根据实际电路应用的类型不同,有几种由不同的公司提供的基本 SPICE 软件包。

尽管计算机辅助分析是确定电路中电压和电流的一种相对快速的方法,但是不应该用它完全代替传统的"纸笔"分析。这是由于下面的几个原因,首先,先学会分析然后才能够进行设计,对软件工具的过多依赖将限制必要的分析技能的发展,这类似于过早在小学中引入计算器。其次,使用这些复杂的软件包很长时间后,在输入数据时显然不可能不犯一些错误。如果对仿真可以给出什么样的结果缺乏基本的理解,那么要确定该仿真形式的结果是否正确是不可能的。因此,"计算机辅助分析"这个名称本身就是一个恰当的描述。无论如何,人类的智慧是没有穷尽的。

举一个例子,考虑图 4.11(a)所示的电路,该电路包含有两个直流电压源和三个电阻。下面期望用 PSpice 来仿真该电路,以求出电流 i_1 和 i_2。图 4.23 显示了用原理图绘制工具画出的电路图[①],其中已插入伪元件 IPROBE,这样求出的电流值将显示在该电路图中。图 4.23 是仿真后的电路图,可以看到两个电流 i_1 和 i_2 分别为 6 A 和 4 A,和前面已求出的结果相同。

① 参看附录 D 中 PSpice 和原理图绘制工具的简明教程。

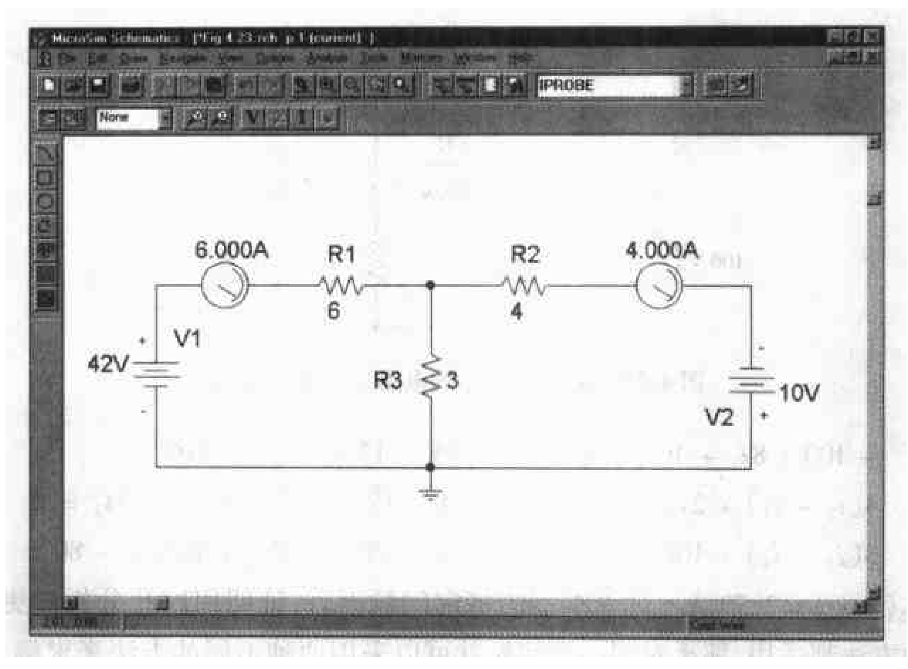


图 4.23　例题 4.5 中的电路图，用原理图绘制工具画出

许多新版本的 PSpice 均允许用户通过从工具条上选择适当的工具选项来显示所有的电压和电流。但这样做有时会使得电路图显得很凌乱，并且在仅需求出其中的一个或两个电压或电流时，就没有必要这样做，因此，通常每个用户可以根据自己爱好，从仿真中选择显示所要的分析结果。

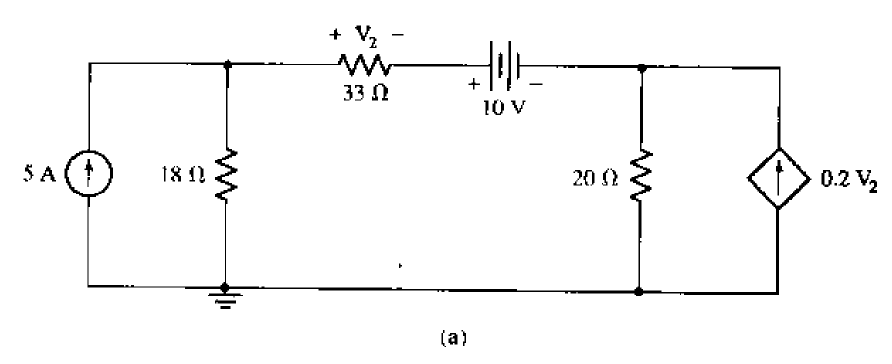
再来看一个例子，考虑图 4.24(a)所示的电路，它包含有一个直流电压源、一个直流电流源和一个压控电流源。用原理图绘制程序重画它，如图 4.24(b)所示，其中已采用了伪元件 VIEWPOINT 来显示电路中各节点上的电压。需要注意的是，用原理图绘制工具画受控电源的时候必须明确地将电源的两端接到控制电压和电流上。

在这里，计算机辅助分析的优势是显然的：一旦用原理图绘制程序画出了一个电路，就很容易进行实验，只需要更改元件的数值，然后观察电流和电压的变化即可。在这里，可以通过仿真前面的例子和练习所示的电路来获得一些实际的经验。

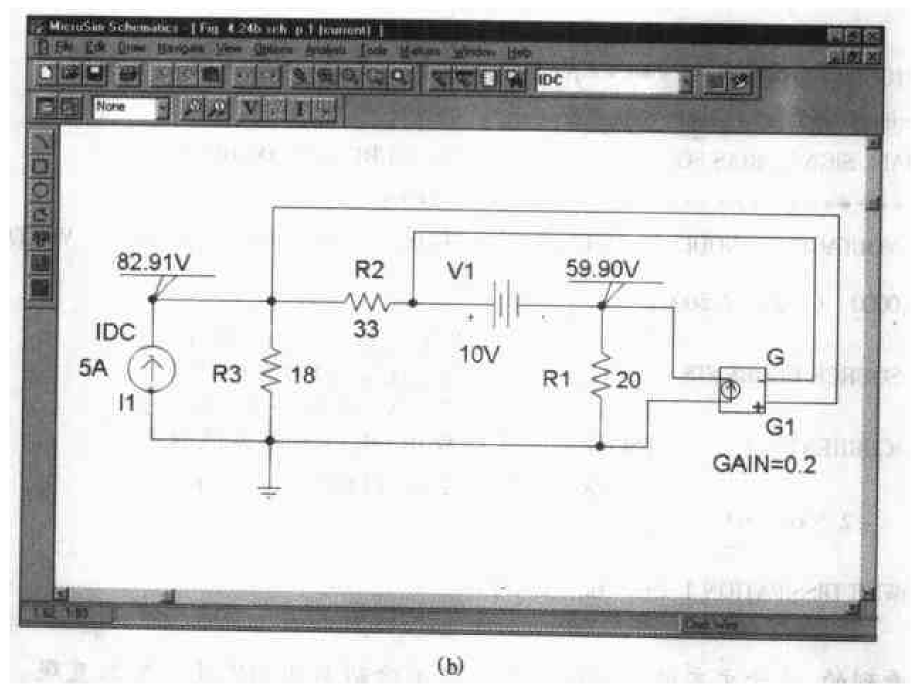
实际应用

基于节点的 PSpice 建模

用计算机辅助分析工具描述电路的最常用方法是使用某种图形化原理图绘制软件包，图 4.24 给出了一个用这种工具画出的电路例子。但是，SPICE 是在那些图形软件出现之前写出来的，因此，它需要把电路描述为基于文本的格式。这种格式基于穿孔机使用的语法，这样使它显得有所不同。电路描述的基础是元件的定义，每个元件的各端均指定一个节点号。所以尽管前面已经学习了两种一般的电路分析方法——节点分析和网孔分析，但有趣的是 SPICE 和 PSpice 都采用节点分析法来编写。



(a)



(b)

图 4.24 (a)含有受控源的电路;(b)用原理图绘制工具画出的电路图,仿真给出的结果已直接显示在电路图中

即使现代电路分析大多是通过面向图形的交互软件来完成,但当产生错误时(通常是因为在画电路图或在选择分析选项组合时),读懂由原理图绘制工具生成的基于文本的"输入面板(input deck)"对找出特定的问题是有帮助的。掌握这种能力的最简单方法是学习如何直接从用户编写的输入面板来运行 PSpice。

例如,考虑下面的输入面板的例子(以星号开头的行是注释,SPICE 运行时略过它们)。

```
.OP          ←——让 SPICE 确定电路的直流工作点。
R1 1 2 1k    ←——R1 定义在节点 1 和节点 2 之间,它的值为 1 kΩ。
R2 2 0 1k    ←——R2 定义在节点 2 和节点 0 之间,它的值为 1 kΩ。
V1 1 0 DC 5  ←——V1 定义在节点 1 和节点 0 之间,它的值为直流 5 V。
```

可以用类似 Notepad 的软件建立输入面板,并把它存为文件 example.cir。下一步启动 PSpice(参看附录 D),用 PSpice 打开并运行该文件,可以得到如下的输出:

```
**** 12/10/100 12:14:40 ******** NT Evaluation PSpice(July 1997) ***********
* Example input deck for a simple voltage divider.
```

```
**** CIRCUIT DESCRIPTION
******************************************
.OP
R1       1 2 1k
R2       2 0 1k
V1       1 0 DC  5
* End of input deck.
_
```

（以上）输出文件中包含了输入面板以作为参考

```
**** 12/10/100 12:14:40 ******** NT Evaluation PSpice(July 1997) ***********
* Example input deck for a simple voltage divider.
**** SMALL SIGNAL BIAS SOLUTION        TEMPERATURE = 27.000 DEG C
*****************************************
NODE   VOLTAGE   NODE   VOLTAGE   NODE   VOLTAGE   NODE   VOLTAGE
(  1)  5.0000   (  2)  2.5000

VOLTAGE SOURCE CURRENTS

NAME     CURRENT

V1          -2.500E-03

TOTAL POWER DISSIPATION 1.25E-02   WATTS
```

（以上）可以看到，5V电压源位于节点1和节点2之间，电阻R2（连接在节点2和节点0之间）两端的电压为2.5V。还需要指出的是SPICE的一个怪规定：由电流源提供的电流遵循无源符号规则（例如，-2.5mA）。

正如前面所看到的，基于文本的电路描述与原理图绘制工具相比没有那么直观。特别是，在仿真时，它在给节点编号时容易引入一些简单的（但是致命的）错误，因为在纸上写出的东西不够直观。不过，它输出的解释却是非常直接的，因此很值得读一些这种文件。

4.8 小结与复习

- 在开始分析之前，画出整洁和简单的电路图，并标出所有元件和电源的值。每个电源应该有一个参考符号。
- 如果采用节点分析：
  - 选取其中一个节点作为参考节点。然后标出节点电压 $v_1, v_2, \cdots, v_{N-1}$，并记住它们都是相对于参考节点而言的。
  - 如果电路只包含电流源，对各个非参考节点应用 KCL。
  - 如果电路包含电压源，分别对各个电压源构造一个超节点，然后对所有非参考节点和超节点应用 KCL。
- 如果采用网孔分析，首先确定该网络是否为平面网络。
  - 对每个网孔，指定一个顺时针方向的网孔电流：$i_1, i_2, \cdots, i_M$。

- 如果电路只包含电压源，沿每个网孔应用 KVL。
- 如果电路包含电流源，对位于两个网孔之间的每个电流源建立一个超网孔，然后沿每个网孔和超网孔应用 KVL。
- 对于一个平面网络，在决定采用节点分析还是网孔分析时，要记住，一个电路的节点或超节点数越少，应用节点分析得到的方程数目越少。
- 计算机辅助分析在检验结果和分析具有大数目元件的电路时是有用的。然而，通常还需要根据常识来检验仿真得到的结果。

习题

1.(a) 如果 $0.1v_1-0.3v_2-0.4v_3=0$，$-0.5v_1+0.1v_2=4$ 和 $-0.2v_1-0.3v_2+0.4v_3=6$，(b)求行列式：

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

2.(a) 如果 $v_A+v_B+v_C=27$，$2v_B+16=v_A-3v_C$ 和 $4v_C+2v_A+6=0$，求 v_A，v_B 和 v_C；(b)求行列式：

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

3.用节点分析法，求图 4.25 所示电路中的 v_P。

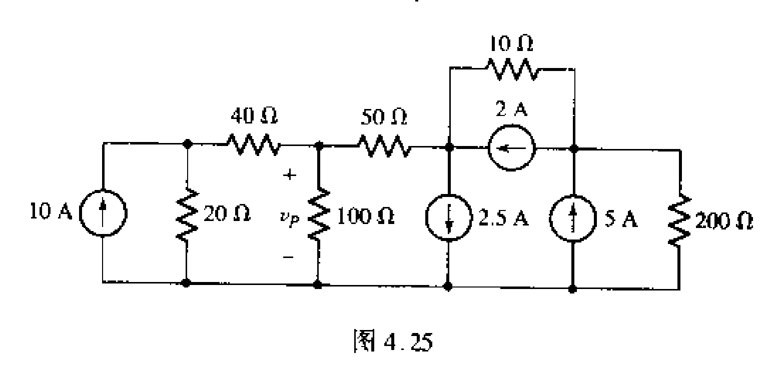


图 4.25

4.用节点分析法，求图 4.26 所示电路中的 v_x。

5.对图 4.27 所示电路，(a)用节点分析求出 v_1 和 v_2；(b)计算 6 Ω 电阻所吸收的功率。

6.运用节点分析方法，求图 4.28 所示电路中的 v_1 和 v_2。

7.参看图 4.29 所示电路，用节点分析法求出使 $v_1=0$ 的 V_2 的值。

8.对于图 4.30 中的电路，应用节点分析求电流 i_5。

9.应用节点分析，求图 4.31 所示的 v_x 值。

图 4.26

图 4.27

图 4.28

图 4.29

图 4.30

图 4.31

10.应用节点分析法,求图 4.32 所示电路中的电压 v。

11.用节点分析求图 4.33 所示电路中的 v_4。

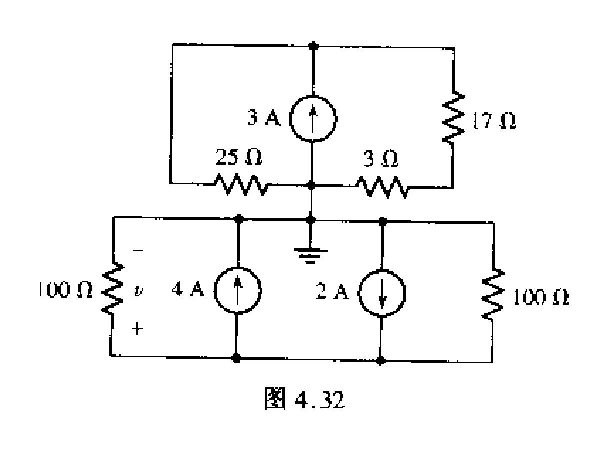


图 4.32

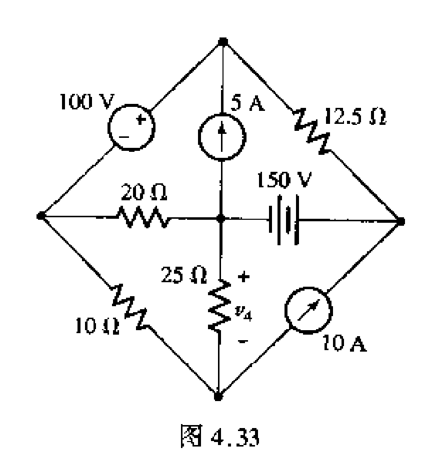


图 4.33

12. 利用节点分析法，在图 4.34 中，求(a)v_A；(b)25 Ω 电阻消耗的功率。

13. 如图 4.35 所示电路，用节点分析法求 v_1 和受控电流源所提供的功率。

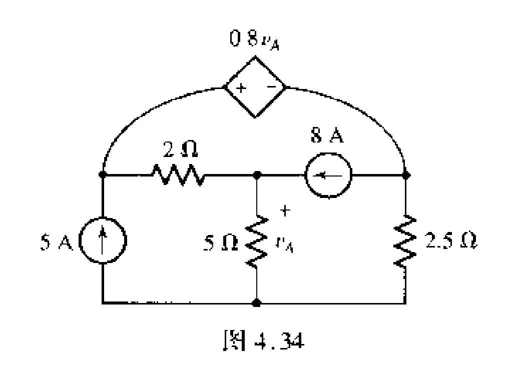


图 4.34

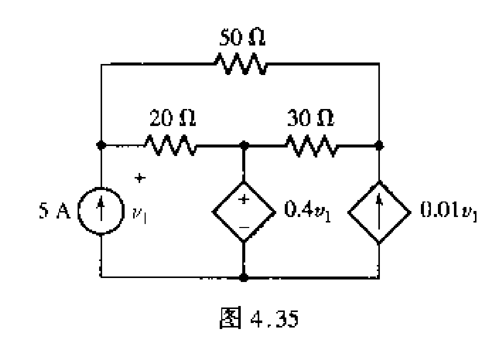


图 4.35

14. 在图 4.36 中，应用节点分析求 k 的值使得 v_y 为 0。

15. 考虑图 4.37 所示电路，求电流 i_1。

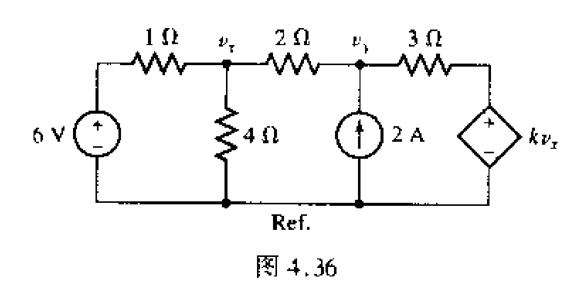


图 4.36

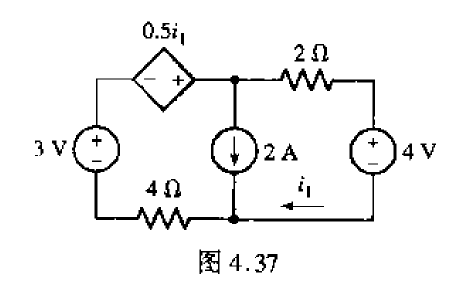


图 4.37

16. 利用超节点的概念，求图 4.38 中标为 v_{20}的电压。交叉的连线如果没有画实心点表示没有物理上的连接。

17. 对于图 4.39 所示电路，求所有 4 个节点电压。

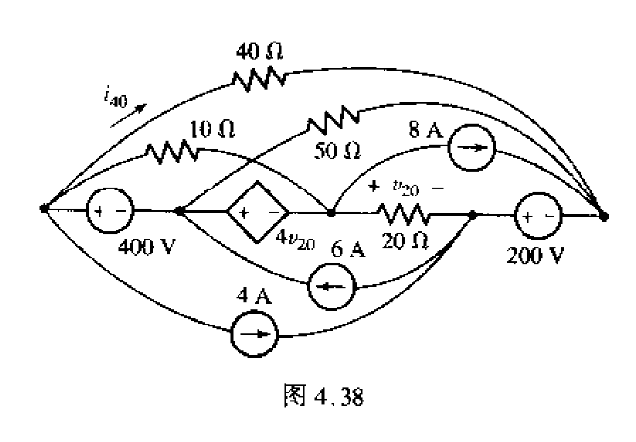


图 4.38

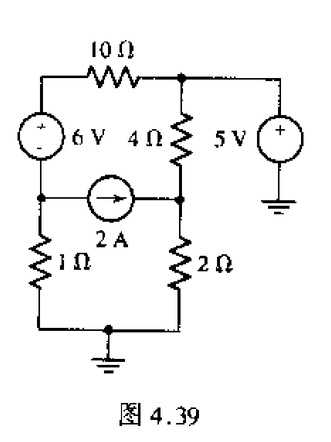


图 4.39

18. 求图 4.40 所示电路中 2 A 电源提供的功率。

19. 求图 4.41 所示电路中 2 A 电源提供的功率。

20. 求图 4.42 中描述电路特性的节点电压。

21. 应用网孔分析法求图 4.43 所示电路中的 i_x。

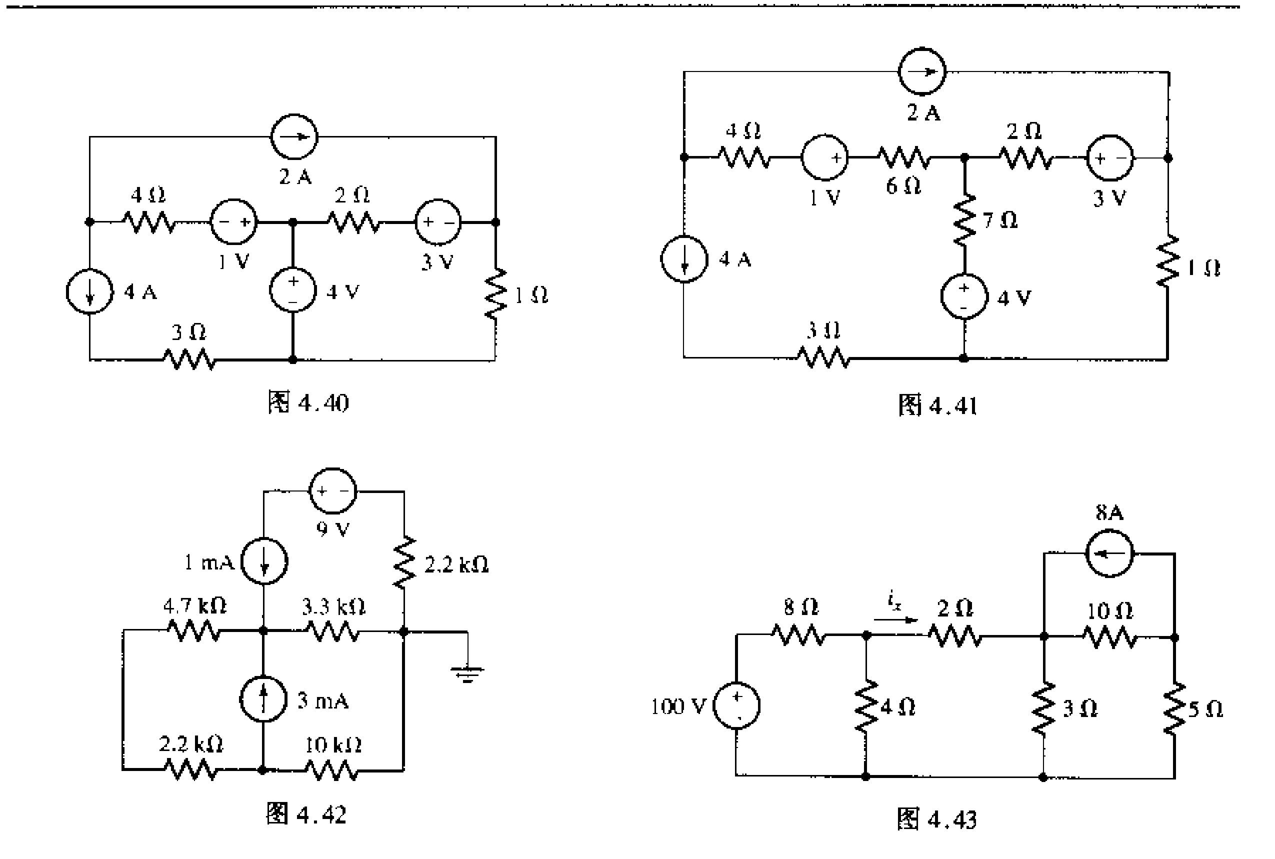


图 4.40

图 4.41

图 4.42

图 4.43

22.如图 4.44 所示电路,计算 2 Ω 电阻消耗的功率。

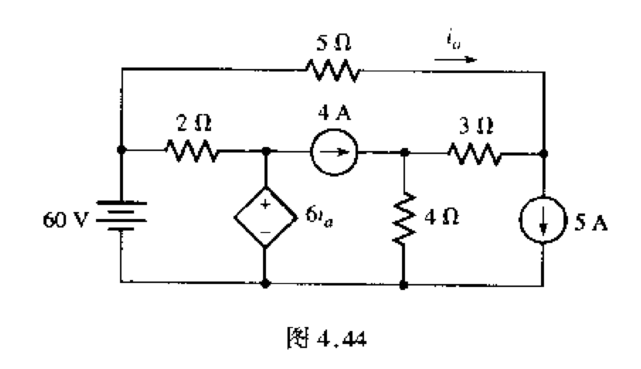


图 4.44

23.将网孔分析法应用于图 4.35 所示电路,求受控电压源提供的功率。

24.应用网孔分析法求,图 4.45 所示电路中的各网孔电流。

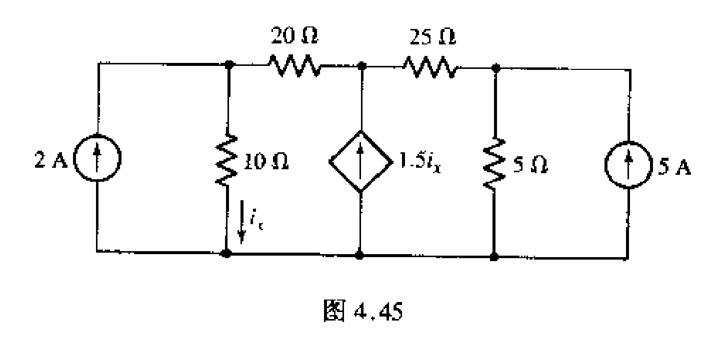


图 4.45

25.求图 4.46 所示电路中顺时针方向的网孔电流。

26. 求图 4.47 所示电路中的各网孔电流.

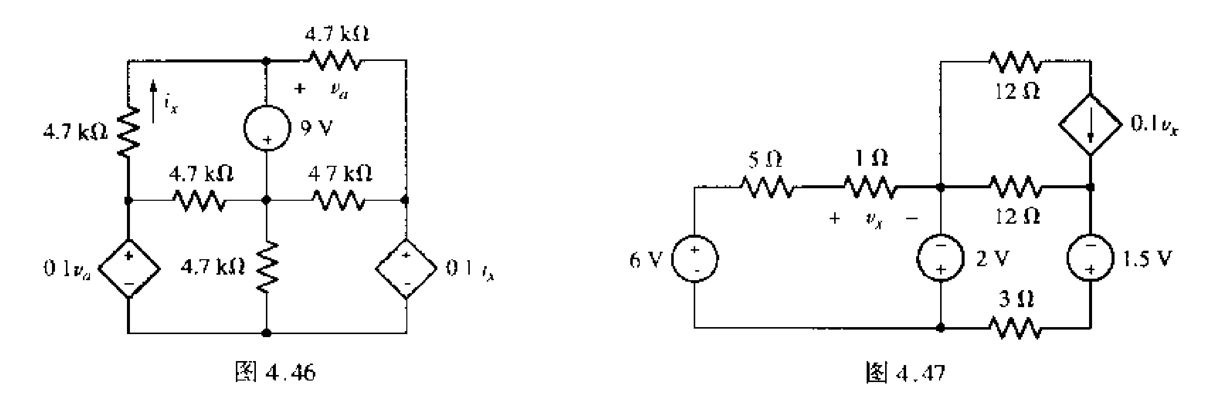


图 4.46　　　　图 4.47

27. (a)参看图 4.48 中的电路，如果已知网孔电流 $i_1 = 1.5$ mA，求 R 的值。(b)R 的值必须是惟一的吗？请解释

28. 对图 4.49 所示的电路，采用网孔分析方法求各电阻吸收的功率。

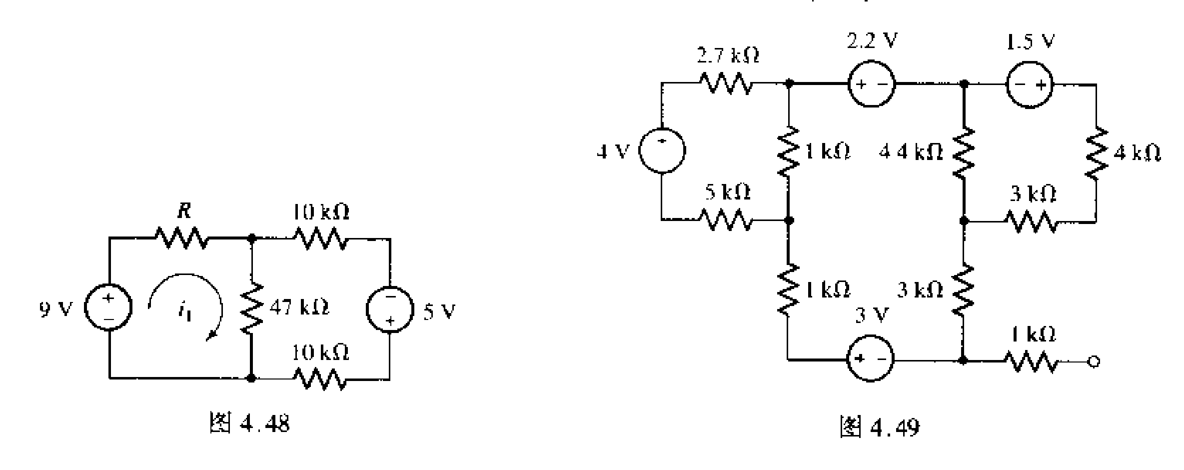


图 4.48　　　　图 4.49

29. 图 4.50 所示的电路为是共基双极型晶体管放大器的等效电路。输入源已经被短路，并且用一个 1 V 的电源代替了输出设备．(a)用网孔分析法求 I_x；(b)用节点分析法验证在(a)中的解答；(c)量 V_x/I_x 的物理含义是什么？

30. 在图 4.51 中，选取 3 个非零电压源的大小，使得电路中的任何电阻都没有电流流过。

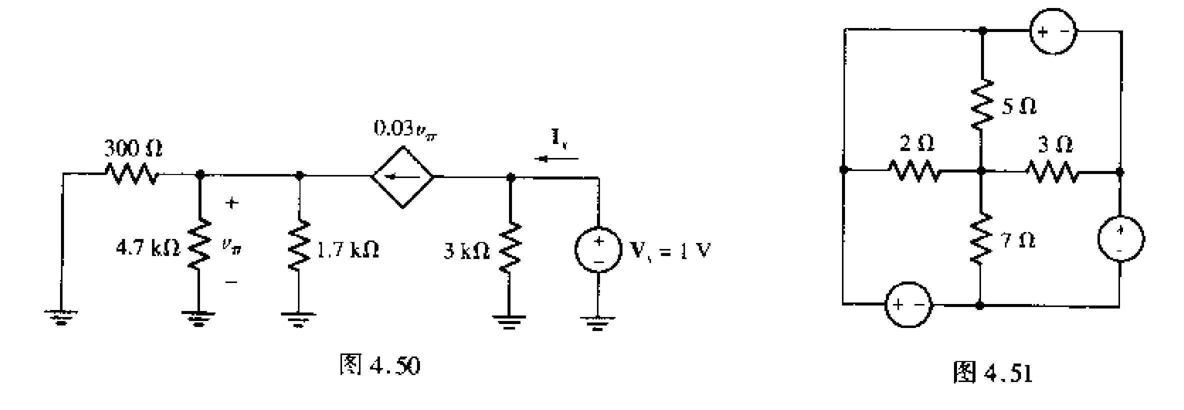


图 4.50　　　　图 4.51

31. 采用网孔分析方法，分别求图 4.52 中的 5 个电源所产生的功率。

32.求图 4.53 所示电路中的 i_1。

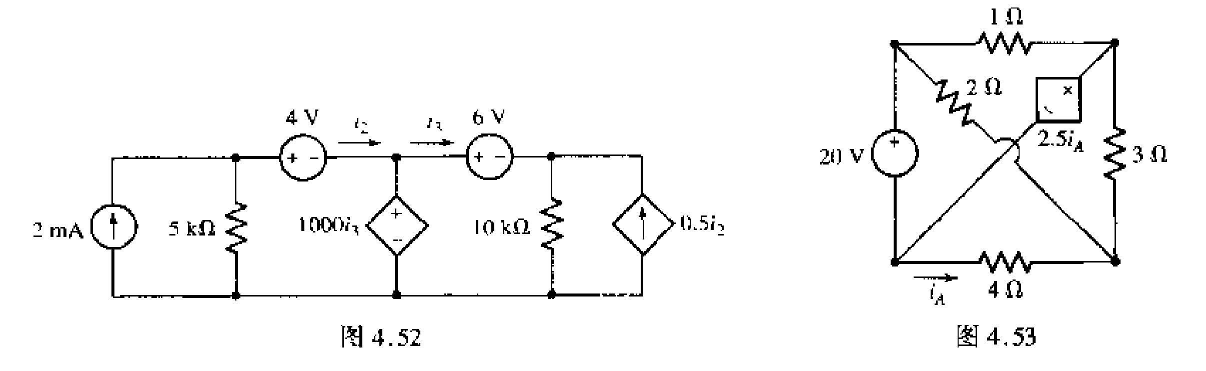


图 4.52　　图 4.53

33.利用超网孔的概念,求图 4.54 所示电路中 2.2 V 电源所提供的功率。

34.求图 4.55 中 2 mA 电源两端的电压,假定底端的节点为地。

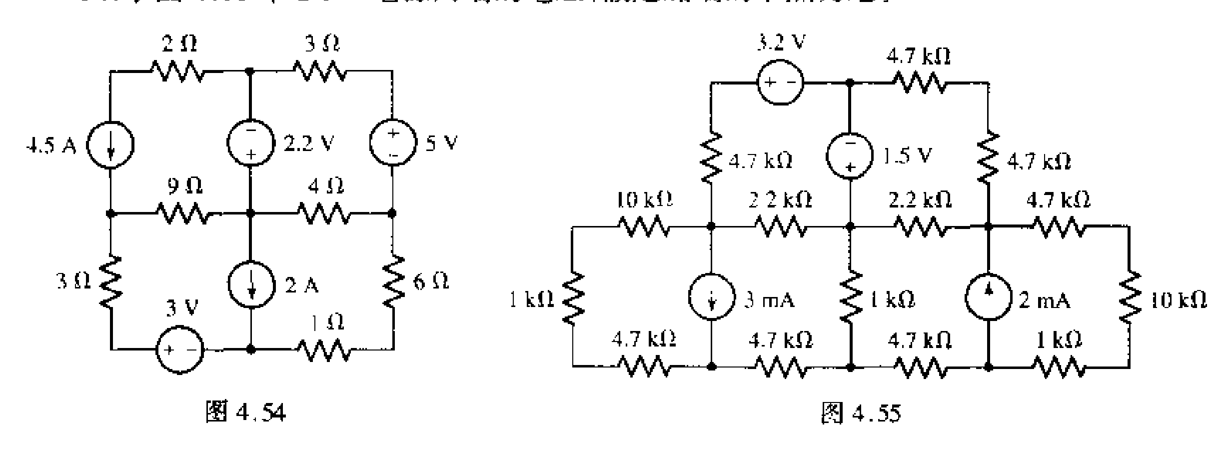


图 4.54　　图 4.55

35.使用网孔分析,求图 4.56 中 2.5 Ω 电阻两端的电压。

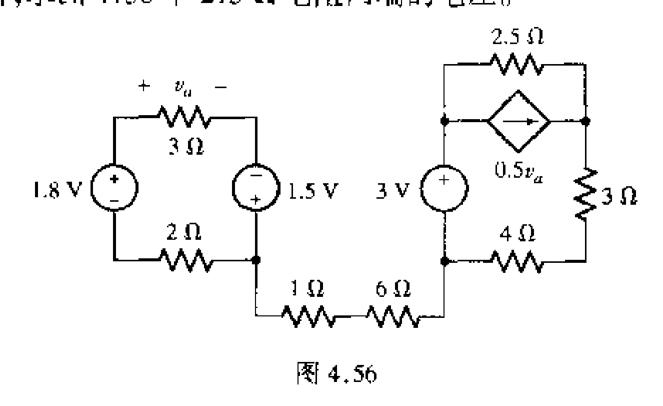


图 4.56

36.求图 4.57 所示电路中的各网孔电流。

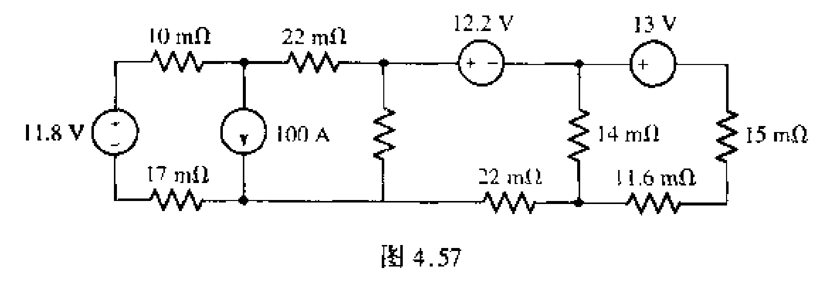


图 4.57

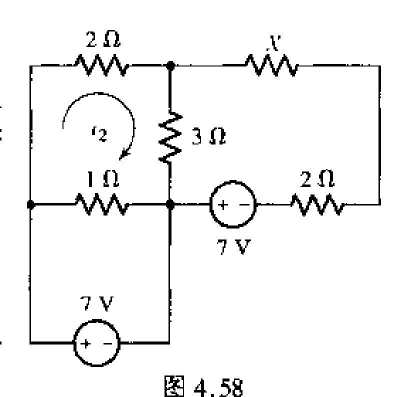


图 4.58

37. 对于图 4.58 的电路，如果 $i_2 = 2.273$ A，求电阻 X 的值。

38. 在图 4.58 中，以一个 3 A 的电源替换最右边的 7 V 的电源，并且假定标为 X 的电阻的阻值为 0.3 Ω，求这个新电路的 3 个网孔电流。

39. 求图 4.59 中各电路中的电压 v_x。

40. 求图 4.60 所示电路中的 v_3，如果元件 A 为(a)短路线；(b) 9 V 独立电压源，参考正极端在左边；(c) 受控电流源，箭头向左，大小为 $5i_1$。

41. 求图 4.60 所示电路中的 i_1 和 i_2，如果元件 A 为一个12 Ω电阻。解释选用节点分析法或者网孔分析法的合理性。

42. 如图 4.61 所示的电路，求电流 i_{10}的值。

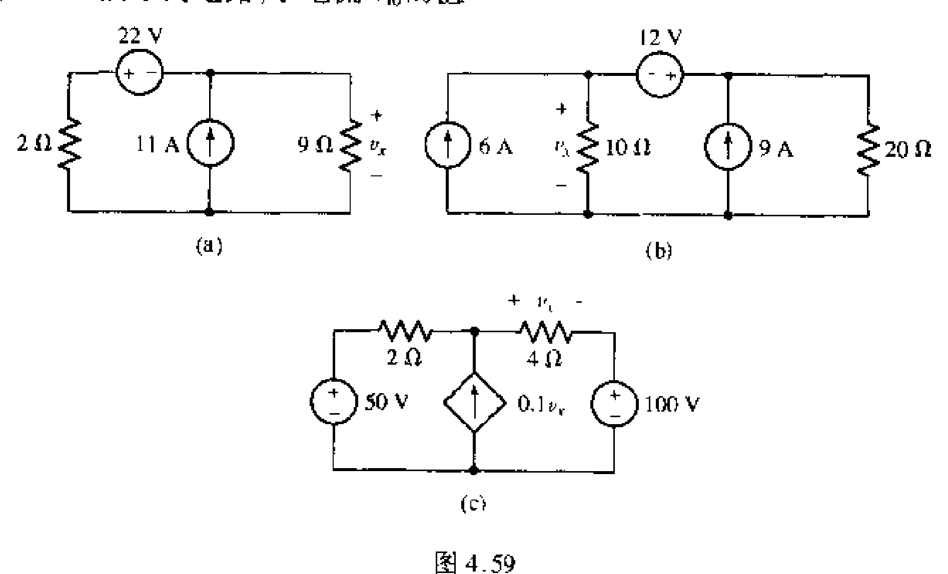


图 4.59

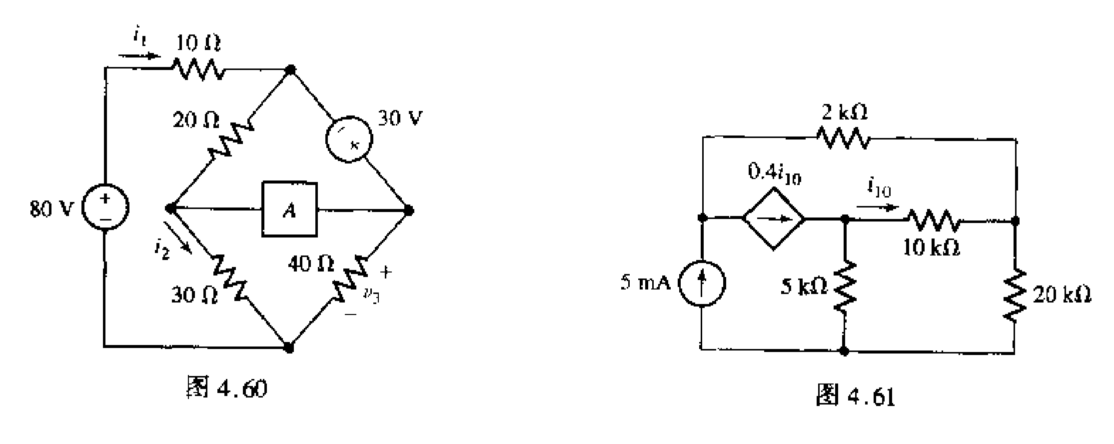


图 4.60　　　　图 4.61

43. 如图 4.62 所示电路，求标出的两个电流的值。

44. 对图 4.63 所示电路，求中间节点的电压。

45. 求流过图 4.64 所示电路各个支路的电流。

46. 求图 4.65 中 2 mA 电流源两端的电压。

图 4.62

图 4.63

图 4.64

图 4.65

47. 对于图 4.66 中的电路，设 A 为一个 5 V 电压源，参考正极性在上端，设 B 为一个 3 A 的电流源，箭头指向地，设 C 是为一个 3 Ω 电阻，设 D 为一个 2 A 电流源，箭头指向地，设 F 为一个 1 V 电压源，参考负极性在右边，以及 E 是为一个 4 Ω 电阻。计算 i_1。

48. 选取非零的 I_1，I_2 和 V_1 的值，使得图 4.67 所示电路中 6 Ω 电阻消耗的功率为 6 W。

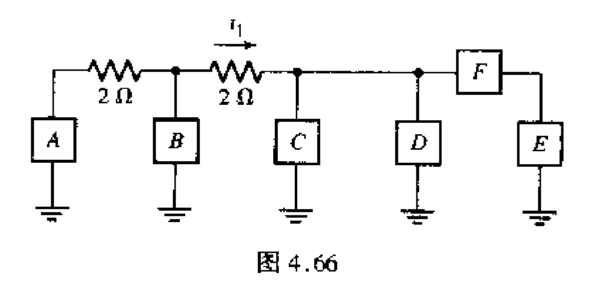


图 4.66

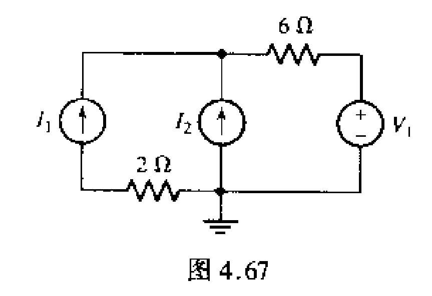


图 4.67

49. 参看图4.65的电路。把2 mA电流源替换为2 V电压源,3 V电压源替换为7 mA电流源,求新电路的各网孔电流。

50. 对于图4.66中的电路,A为一个受控电流源,箭头指向下,标为$5i_1$。设B和E为2 Ω电阻,设C为一个2 A电流源,箭头指向地,F为一个2 V电压源,参考负极性和地相连,设D为一个3 A电流源,箭头指向上。求各节点电压和所有的网孔电流。

51. 使用PSpice来验证习题4.42的解答。提交一个打印的和正确标注的原理图,并包括手算的结果。

52. 使用PSpice来验证习题4.44的解答。提交一个打印的和正确标注的原理图,并包括手算的结果。

53. 使用PSpice来验证习题4.46的解答。提交一个打印的和正确标注的原理图,并包括手算的结果。

54. 使用PSpice来验证习题4.48的解答。提交一个打印的和正确标注的原理图,并包括手算的结果。

55. 使用PSpice来验证习题4.50的解答。提交一个打印的和正确标注的原理图,并包括手算的结果。

56. 设计一个电路,它包含一个串接了100 Ω电阻的5 V电压源,电压源连接到一个网络上,该网络至少包含一个3 A电流源,三个不同的电阻和一个压控电流源,压控电流源受控于100 Ω电阻两端的电压。(a)求出所有的节点电压和所有的支路电流。(b)使用PSpice来验证手算的答案。

57. 用一个10 V电池,一个3 A电流源以及任意个1 Ω电阻来构造一个电路,使得3 A电流源两端的电压为5 V,并使用PSpice验证手算的结果。

58. 写出求解图4.68所示电路中v_5合适的SPICE输入面板。提交一个打印的输出文件,并特别注明你的解答。

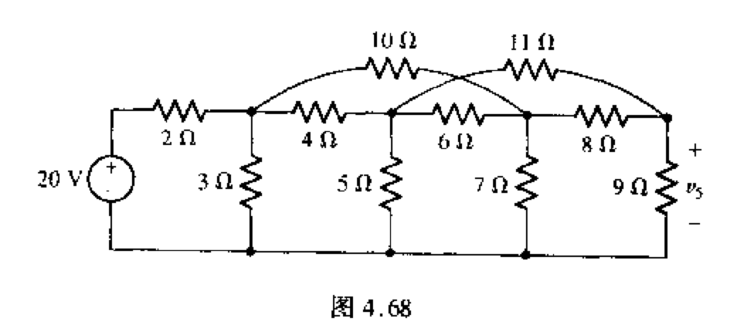


图4.68

59. 只用一个9 V电池和若干个电阻构造一个电路,使得该电路的各节点电压分别为4 V,3 V和2 V。写出一个合适的输入面板并用SPICE来仿真你的解答,并提交特别注明了所求电压的打印文件。作为一个参考,在打印出的图纸上画出标注好的原理图,并标出节点编号。

60. 在一所房子中安装了一长串户外彩灯,当加电的时候,房屋主人发现两盏灯已烧坏。(a)这些灯是串联连接还是并联连接的?(b)写出SPICE输入面板来仿真这些彩灯,假定使用20 AWG的导线,用115 V直流电源供电,单个灯的额定功率为1 W,共有400

盏灯。为简化起见，试用少于 25 个元件的等效电路来仿真它，提交一个打印的输出文件，并突出表示出插座电源提供的功率。(c)在替换了烧坏的灯后，房屋主人发现最靠近电源插座的那些灯比最远端的灯亮 10%。给出一个可能的解释，记住这一串彩灯中处处都是有电阻的。

第5章　常用电路分析方法

本章要点：

- 应用叠加原理确定总响应中单个电源的贡献
- 应用电源变换降低电路的复杂性
- 任意网络的戴维南等效电路
- 任意网络的诺顿等效电路
- 满足最大功率传输条件的负载电阻
- Δ形网络与Y形网络的互换
- 选定分析策略以确定特定的响应
- 用PSpice程序进行直流扫描

5.1　引言

本章的基本目的是学习简化复杂电路的分析方法。人们常常只是对复杂电路中某一可分离部分的特性感兴趣。所以非常需要一种方法，能用大为简化的等效电路代替电路的其余部分。等效电路的概念还可以在分析开始之前进行多元件电路的简化。在学习了几种新的电路分析方法之后，将培养选择最方便分析方法的能力。

5.2　线性和叠加

本书要分析的所有电路都可归并为线性电路类型，因此现在应当给线性电路一个更确切的定义。这样，就可以考虑线性性质的最重要结果——叠加原理。叠加原理是一个非常基本的原理，它将在线性电路分析中多次出现。事实上正是由于在非线性电路中不能应用叠加原理，才使得非线性电路的分析变得如此困难。

叠加原理指出，含有多个独立源的电路中的响应（电流或电压）可以通过将各个独立源单独作用的结果相加而得到。

5.2.1　线性元件和线性电路

首先，线性元件定义为具有电压-电流线性关系的无源元件。“线性电压-电流关系”是指，若通过元件的电流乘以常数 K，则元件两端的电压也将乘以常数 K。迄今只定义了一种无源元件（电阻），其电压-电流关系为：

$$v(t) = Ri(t)$$

显然它是线性的。实际上，如果将 $v(t)$ 作为 $i(t)$ 的函数作图，结果将是一条直线。

还需要定义线性受控源，线性受控源是这样的电流源或电压源，它的输出电流或电压与电

路中某处的电流或电压(或这些量之和)的一次幂成正比。例如,受控电压源 $v_s = 0.6i_1 - 14v_2$ 是线性的,而 $v_s = 0.6i_1^2$ 和 $v_s = 0.6i_1v_2$ 则不是。

线性电路定义为完全由独立源、线性受控源和线性元件所组成的电路。按照这一定义可以证明①"响应正比于源",或者说,将所有独立源的电流或电压增大为 K 倍,则所有电流或电压响应同样也增大为 K 倍(包括受控源的电流或电压输出)。

5.2.2 叠加原理

线性性质的最重要结果就是叠加性。为了导出叠加原理,首先考察图 5.1 的电路,它含有两个作用于电路的独立电流源 i_a 和 i_b。为此常常把源称为激励函数,电流源产生的节点电压称为响应函数,或简称为响应。激励函数和响应都可能是时间的函数。这个电路的两个节点方程为:

$$0.7v_1 - 0.2v_2 = i_a \tag{5.1}$$

$$-0.2v_1 + 1.2v_2 = i_b \tag{5.2}$$

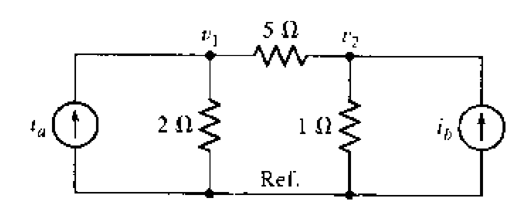


图 5.1 具有两个独立电流源的电路

现在来做个实验,将两个激励函数改为 i_{ax} 和 i_{bx},两个未知电压也将随之改变,称之为 v_{1x} 和 v_{2x}。因此:

$$0.7v_{1x} - 0.2v_{2x} = i_{ax} \tag{5.3}$$

$$-0.2v_{1x} + 1.2v_{2x} = i_{bx} \tag{5.4}$$

接着再做个实验,将源电流改为 i_{ay} 和 i_{by},然后测量响应 v_{1y} 和 v_{2y}:

$$0.7v_{1y} - 0.2v_{2y} = i_{ay} \tag{5.5}$$

$$-0.2v_{1y} + 1.2v_{2y} = i_{by} \tag{5.6}$$

这三组方程描写具有三套不同源电流的同一个电路。现在来"叠加"后两组方程。将式(5.3)和式(5.5)相加:

$$(0.7v_{1x} + 0.7v_{1y}) - (0.2v_{2x} + 0.2v_{2y}) = i_{ax} + i_{ay} \tag{5.7}$$

$$0.7v_1 \qquad - \qquad 0.2v_2 \qquad = i_a \tag{5.1}$$

再将式(5.4)和式(5.6)相加:

$$-(0.2v_{1x} + 0.2v_{1y}) + (1.2v_{2x} + 1.2v_{2y}) = i_{bx} + i_{by} \tag{5.8}$$

$$-0.2v_1 \qquad + \qquad 1.2v_2 \qquad = i_b \tag{5.2}$$

① 证明过程如下,首先对线性电路应用节点分析法得到如下形式的线性方程:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = b_1$$

其中 a_n 为常数(由电阻或电导值、出现在受控源的常数,以及 0 或 −1 组成),b_1 是独立源的值或其组合。给定一组这样的方程,如果将所有的 b 乘以 K,显然这一组新方程的解就是节点电压。

为了方便对比，将公式(5.1)和公式(5.2)分别重写于公式(5.7)和公式(5.8)之后。

利用这些方程的线性性质可以比较公式(5.7)与公式(5.1)，以及公式(5.8)与公式(5.2)，进而得到一个有趣的结论。如果选择 i_{ax} 和 i_{ay} 使它们之和等于 i_a，同时选择 i_{bx} 和 i_{by} 使它们之和等于 i_b，这样，所求的响应 v_1 和 v_2 可以分别通过 v_{1x} 和 v_{1y} 相加，以及 v_{2x} 和 v_{2y} 相加来得到。换句话说，可以做实验 x 并记下响应，再做实验 y 也记下响应，最后将两个响应相加。从这里得到叠加原理中的基本概念：可以将其他独立源"关闭"或"置零"以观察单个独立源以及它产生的响应。

如果将一个电压源的电压降低为 0 V，它实际上就是一个短接的电路[图 5.2(a)]。如果将一个电流源的电流降低到 0 A，它实际上就是一个断开的电路。所以，叠加原理可以叙述为：

在任何线性电阻性网络中，任何电阻或源两端的电压或流经的电流可由每一个独立源单独作用引起的电压或电流代数和得到，在某一独立源单独作用时，将所有其他独立电压源短路、独立电流源开路。

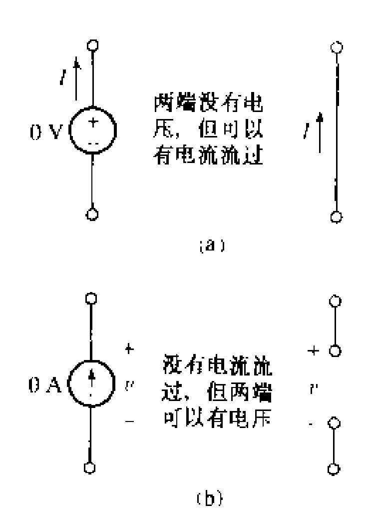


图 5.2　(a)一个置零的电压源的作用如同一个短接的电路；(b)一个置零的电流源的作用如同一个断开的电路

这样，如果存在 N 个独立源，必须做 N 次实验，每次实验中只有一个独立源作用，其他都不作用，即关断或置零。注意，受控源在每次实验中一般都起作用。

刚才的例子指出了一个很有用的定理。一组独立源可以选择性地设为活动和非活动。例如，假定有三个独立源。定理指出可以这样求得电路响应，将三个源单独作用的结果相加。或者让第一个和第二个源工作，而让第三个源不工作，然后将结果与第三个源单独工作的结果相加。这等于将这组电源看做一种特殊源，选择性地处理几个源的作用。

在上述几次实验中独立源并不一定只能取给定值或零，只要几次实验中源取值的和等于原来值就行。不过置零的源几乎总是使电路简化。下面通过两种独立源的例子，来说明叠加原理的应用。

例题 5.1　对于图 5.3(a)的电路，利用叠加原理写出未知支路电流 i_x 的表达式

首先将电流源设为零，重画电路如图 5.3(b)。由电压源产生的部分 i_x 用 i'_x 表示，容易得出 i'_x 为 0.2 A。

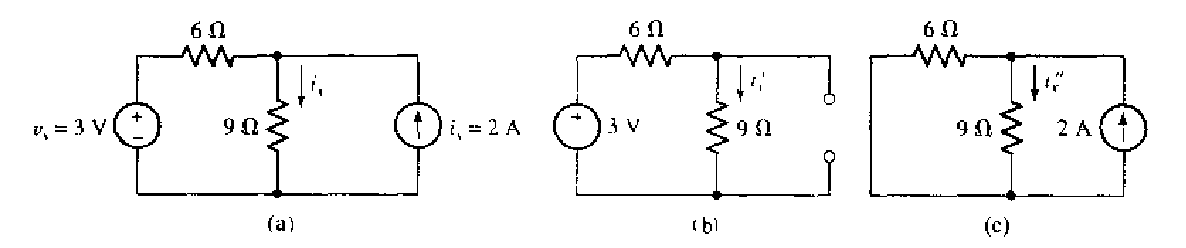


图 5.3 (a)具有两个独立源的电路例子,求支路电流 i_x;(b)电流源开路后的同一电路;(c)电压源短路后的原电路

下一步设图 5.3(a)中的电压源为零,再重画电路如图 5.3(c)。按分流关系可以确定 i''_x(由2 A电流源产生的部分 i_x)为 0.8 A。

现在求解完整的电流 i_x,它是两个单个成分之和:

$$i_x = i_x|_{3\,V} + i_x|_{2\,A} = i'_x + i''_x$$

$$= \frac{3}{6+9} + 2\left(\frac{6}{6+9}\right) = 0.2 + 0.8 = 1.0\ \text{A}$$

对本例题的另一种考虑是,3 V 电源和 2 A 电源都作用于电路,产生总电流 i_x 流过 9 Ω 电阻。可是 3 V 电源对 i_x 的贡献并不取决于 2 A 电源的贡献,反之亦然。例如,如果将 2 A 电源加倍到 4 A,它对于流经 9 Ω 电阻的总电流 i_x 的贡献为 1.6 A。而 3 V 电源对于 i_x 的贡献仍然为 0.2 A,新的总电流为 0.2 + 1.6 = 1.8 A。

练习

5.1 对于图 5.4 电路应用叠加原理计算电流 i_x。

答案:660 mA

如前所见,在考虑某个具体电路时,应用叠加原理一般并不减少工作量,因为它必须对几个新电路做分析,从而求得所需的响应。可是它在区分复杂电路中不同部分的重要性时确实很有用。

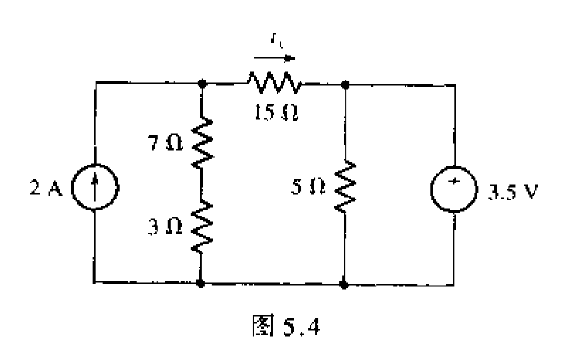


图 5.4

例题 5.2 参见图 5.5(a),确定电流源 I_x 的最大值,保证每个电阻上的功率不因超过额定值而过热

- 弄清问题的目标:

每个电阻额定的最大功耗为 250 mW。如果电路中实际功耗超过此值(过大电流流过两个电阻),将产生过热,很可能导致事故。6 V 电源不能改变,应该列出 I_x 的方程和每个电阻的最大电流的方程。

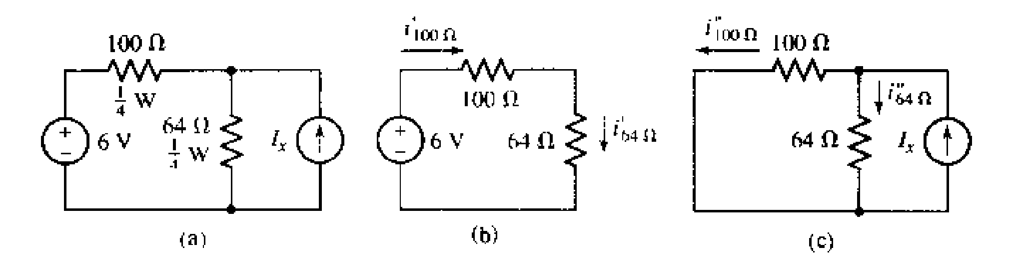


图 5.5 (a)含有两个 1/4 W 电阻的电路;(b) 6 V 电源单独工作时的电路;(c) I_x 电源单独工作时的电路

● 收集已知信息:

根据 250 mW 额定功耗,100 Ω 电阻所能承受的最大电流为:

$$i_{max} = \sqrt{\frac{P_{max}}{R}} = \sqrt{\frac{0.250}{100}} = 50\ \text{mA}$$

类似地,流过 64 Ω 电阻上的电流必须小于 62.5 mA。

● 选择最适合习题的已有方法:

节点分析和网孔分析都可用来解决此问题,但是叠加法更具优势,因为主要感兴趣的是电流源的作用。

● 建立适当的方程组:

应用叠加法重画电路于图 5.5(b),6 V 电源对 100 Ω 电阻贡献的电流为:

$$i'_{100\Omega} = \frac{6}{100 + 64} = 36.59\ \text{mA}$$

因为 64 Ω 电阻和 100 Ω 电阻相串联,6 V 电源对 64 Ω 电阻贡献的电流 $i'_{64\Omega} = 36.59$ mA。所以 6 V 电源单独作用时,两个电阻都不会有过热问题。

图 5.5(c)是个分流器电路,注意到 $i''_{64\Omega}$ 应该与 $i'_{64\Omega}$ 相加,但是 $i''_{100\Omega}$ 与 $i'_{100\Omega}$ 方向相反。这样 I_x 可以安全地贡献 62.5 − 36.59 = 25.91 mA 电流给 64 Ω 电阻,贡献 50 − (−36.59) = 86.59 mA 电流给 100 Ω 电阻。

100 Ω 电阻对 I_x 的限制如下:

$$I_x < (86.59 \times 10^{-3}) \times \left(\frac{100 + 64}{64}\right)$$

64 Ω 电阻则要求:

$$I_x < (25.91 \times 10^{-3}) \times \left(\frac{100 + 64}{100}\right)$$

● 试解:

首先考虑 100 Ω 电阻,可以看到 I_x 必须满足 $I_x < 221.9$ mA,64 Ω 电阻对 I_x 的限制为 $I_x <$ 42.49 mA。

● 证实所得解是否合理和满足要求:

为满足两个限制条件,I_x 必须小于 42.49 mA。如果电流增大,64 Ω 电阻会远在 100 Ω 电阻之前过热。考察这个解的特别有效的方法是应用下面第二个例题中介绍的 PSpice 中的直流扫描分析方法。可是一个有趣的问题是,64 Ω 电阻真的会首先过热吗?

开始觉得由于 100 Ω 电阻的最大允许电流较小,似乎它的电流应该超过电流限制 I_x。

可是因为 I_x 与 6 V 电源在 100 Ω 电阻上产生的电流相反，而与 6 V 电源在 64 Ω 电阻上产生的电流相同。因此，结论是 64 Ω 电阻限制了电流 I_x

例题 5.3 在图 5.6(a)中，用叠加原理确定 i_x 的值。

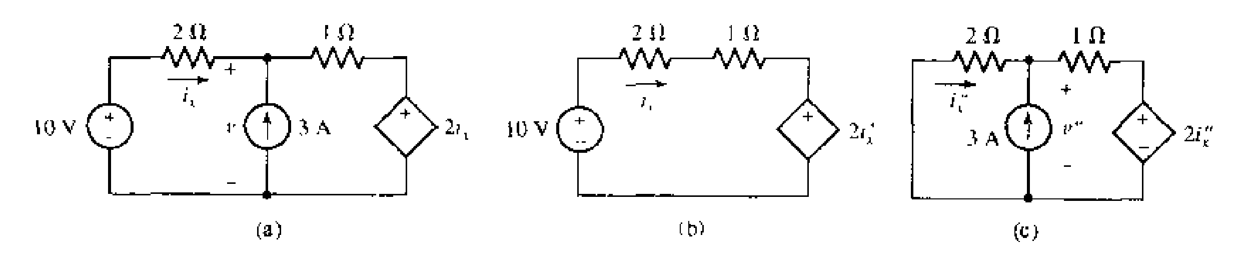


图 5.6 (a)具有两个独立源和一个受控源的电路例子，求其中的 i_x；(b)3 A 电源开路时的电路；(c)10 V 电源短路时的电路

首先将 3 A 电源开路[见图 5.6(b)]。单一网孔的方程为：

$$-10+2i'_x+1i'_x+2i'_x=0$$

所以：

$$i'_x=2\ \text{A}$$

接着将 10 V 电源短路[见图 5.6(c)]，单一节点的方程为：

$$\frac{v''}{2}+\frac{v''-2i''_x}{1}=3$$

将受控源控制量与 v'' 联系在一起：

$$v''=2(-i''_x)$$

求得：

$$i''_x=-0.6\ \text{A}$$

所以：

$$i_x=i'_x+i''_x=2+(-0.6)=1.4\ \text{A}$$

值得说明的是，总是使用某种下标以表示所引用变量不是原始变量，这样是为防止对有关变量求和时出现可能的灾难性错误

练习

5.2 对图 5.7 所示电路，利用叠加方法求每个电流源上的电压。

答案：$v_1|_{2A}=9.180$ V，$v_2|_{2A}=-1.148$ V，$v_1|_{3V}=1.967$ V，$v_2|_{3V}=-0.246$ V；$v_1=11.147$ V，$v_2=-1.394$ V

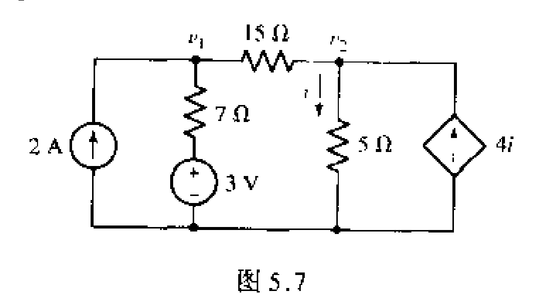


图 5.7

PSPICE 简介

PSpice 不仅对验证电路分析的正确性非常有用，而且还能帮助确定每个电源对某个响应的贡献大小。为此，需要应用直流参数扫描(DC Parameter sweep)。

考虑例题 5.2 中的电路，要求在两个电阻上的功率不超过额定功率的条件下，确定电流源允许提供的最大正电流。用 PSpice 电路图抓取工具(Schematic capture tool)重画电路于图 5.8。注意未给电流源指定具体数值。

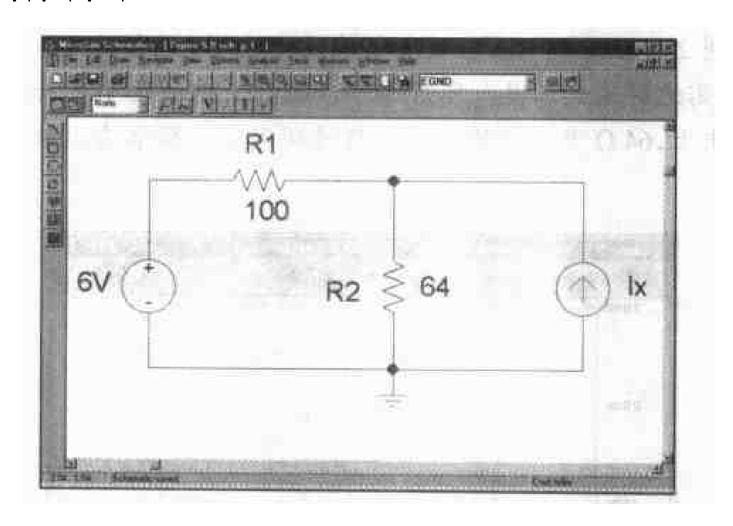


图 5.8　例题 5.2 的电路

将电路图输入并保存之后，下一步是确定扫描参数．这一选项允许为电压源或电流源(本例中为电流源 I_x)规定一个数值范围而不是一个确定值。在 Analysis 菜单下选择 Setup，点击 DC Sweep 选项。这时出现一个像图 5.9 那样的对话窗口。

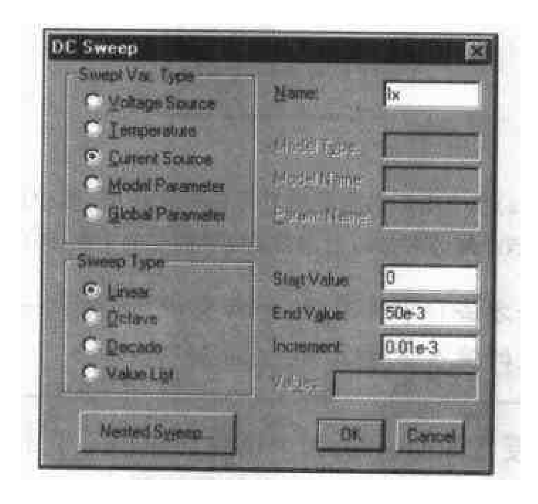


图 5.9　指定 I_x 为变量的直流扫描对话窗口

首先指定扫描变量类型为 Current Source，接着在 Name 一栏输入 I_x。在扫描类型下还有几个选项：Linear，Octave，Decade 和 Value List。最后一个选项允许确定赋值给 I_x 的每个值。为了产生光滑的曲线，还是选择 Linear 扫描，起始值为 0 mA，终止值为 50 mA，步进为

0.01 mA。

执行模拟过程后，绘图程序会自动弹出。这时出现一个窗口，它的横轴为变量 I_x，纵轴变量待选。从 Trace 菜单选择 Add Trace，点击 I(R1)，然后在 Trace Expression 选框中输入一个星号，再次点击 I(R1)，插入另一个星号，最后输入 100。这是让绘图程序画出 100 Ω 电阻所吸收的功率。类似地，重复上述过程，又可画出 64 Ω 电阻所吸收的功率，最后结果如同图 5.10(a) 所示。第三次在 Trace 菜单下选择 Add Trace，在 Trace Expression 选框中输入 0.250，就可在曲线图中加上一条位于 250 mW 的水平参考线。由图可见，在 I_x = 43 mA 附近 64 Ω 电阻上的功率的确超过额定值 250 mW。相反，在规定的 0～50 mA 范围内，无论电流源 I_x 怎样变化，100 Ω 电阻上的功率始终未达到 250 mW。事实上，随着电流源电流增加，它的吸收功率下降。如果需要更为精确的结果，只需选择光标工具。图 5.10(b) 显示了拖动两个光标到 42.56 mA 的结果。只是在这一电流水平上，64 Ω 电阻上的功率才超过额定值。降低直流扫描所用步进大小可以提高曲线显示精度。

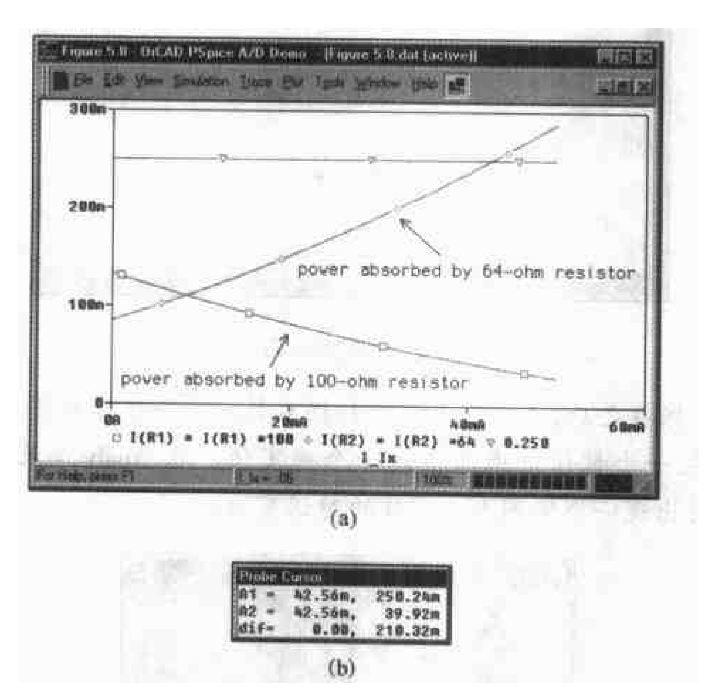


图 5.10　(a)两个电阻各自吸收功率的输出曲线，图中还包括一条 250 mW 水平线以及为帮助阅读所加的文字；(b)光标对话框

在分析电子电路时这一方法非常有用，比如需要确定，对于一个复杂的放大器电路，为获得零输出电压应该采用多大的输入信号。

遗憾的是，在分析含有受控源的电路时，应用叠加原理几乎不会少花时间，因为每次至少要分析含有两个电源的电路：一个独立源和所有的受控源。

必须时刻清楚叠加原理的限制。它仅适用于线性响应，所以最常见的非线性响应——功率不是叠加原理的应用范围。例如，考虑两个 1 V 电池与 1 Ω 电阻的串联电路。显然，提供给电阻的功率是 4 W，但是如果错误地应用叠加原理会得到，每个电池单独作用提供 1 W，所以总功率为 2 W。这是一个非常容易犯的错误。

5.3 电源变换

5.3.1 实际电压源

到此为止，考虑的电源无一例外的是理想电压源和理想电流源。现在应该更接近实际一步，考虑实际电源。这些电源可以更贴切地表示实际电源。一旦定义了实际电源，就会看到实际电流源和实际电压源可以彼此替换而不影响电路的其余部分。这样的电源称为等效电源。这种方法既适用于独立源，也适用于受控源，尽管会发现对受控源不像对独立源那样有用。

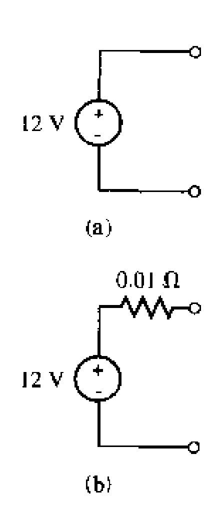


图 5.11 (a)用以表示汽车电池的12V理想电压源模型；(b)考虑到大电流下端电压降低效应的更为精确的模型

理想电压源定义为端电压与流过它的电流无关的元件。1 V 直流源在 1 Ω 电阻上产生 1 A 电流，在 1 μΩ 电阻上产生 1 000 000 A 电流，它能提供无限的功率。当然实际上并不存在这样的元件，在这之前已经认识到，仅在较小的电流或功率下实际电压源才可以用理想电压源来表示。例如，汽车电池可以用 12 V 理想电压源近似，只要它的电流限制在几个安培之内[图 5.11(a)]。可是任何人，只要试过在前灯点亮的条件下启动发动机，一定会观察到，让电池提供 100 A 或更大发动机启动电流，会使车灯变暗。在这种条件下，理想电压源不能很好地表示电池。

为了更好地近似实际元件的性能，必须修改理想电压源，考虑大电流下端电压降低效应。假定实验上发现，没有电流流过电池时，汽车电池端电压为 12 V；当电流为 100 A 时电压降为 11 V。怎样模拟这一实验结果呢？更精确的模型可能是一个 12 V 理想电压源与一个电阻串联，在 100 A 电流下电阻上的电压为 1 V。经过简单计算，这个电阻是 1 V/100 A = 0.01 Ω，理想电压源与串联电阻组成了实际电压源[图 5.11(b)]。这里利用两个相串联的理想电路元件(独立电压源和电阻)构成了实际元件的模型。当然，不能指望在汽车电池内部找到这样的理想元件结构。任何理想元件是由其端点的一定的电流电压关系所确定的。需要构造出理想元件的某种组合，至少在一定的电流、电压和功率范围内，它能够具有类似的电流电压特性。

图 5.12(a)中，由两个元件组成的汽车电池实际模型连接到某一负载电阻 R_L 上。实际电源的端电压与电阻 R_L 上的端电压相同，记为 V_L[①]，图 5.12(b)显示这一实际电源的负载电流 I_L 和负载电压 V_L 的函数曲线。用 I_L 和 V_L 可以写出图 5.12(a)的 KVL 方程：

$$12 = 0.01 I_L + V_L$$

所以：

$$I_L = 1\ 200 - 100 V_L$$

① 从这里开始将努力坚持参数标识规范，用大写字母标记严格的直流量，用小写字母标记含有时变成分的量。可是在描写那些既适用于直流、又适用于交流的一般定理时，将继续使用小写字母，以强调概念的一般性质。

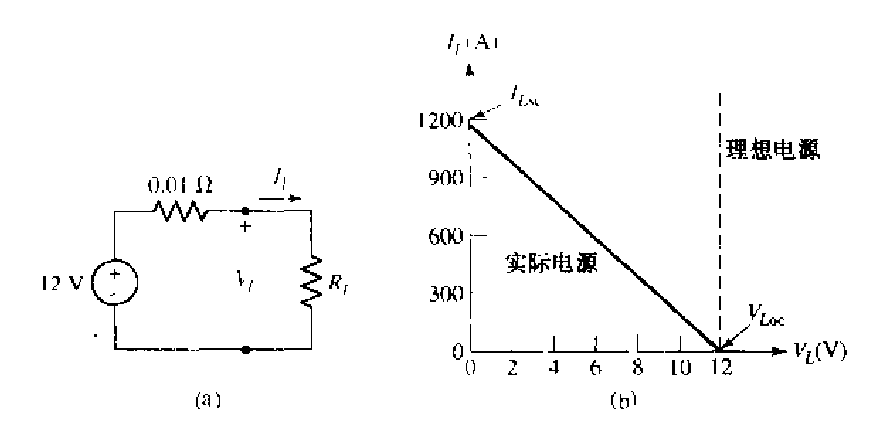


图 5.12 (a)用以近似表示某一12 V汽车电池性能的实际电源,它接有负载电阻R_l;(b)I_l和V_l之间呈线性关系

这是 I_l 与 V_L 的线性方程,图 5.12(b)中的曲线是一条直线。直线上的每一点对应一个不同的 R_L 值。例如,当负载电阻等于实际电池内阻时,即 $R_L = 0.01\ \Omega$,对应于直线的中点。此时负载电压恰好等于理想电源电压的一半。

当 $R_L = \infty$ 时,没有任何电流流向负载,实际电源为开路,端电压即开路电压为 $V_{L_{OC}} = 12$ V。另一方面,当 $R_L = 0$,即负载短路时,可能产生的负载电流即短路电流为 $I_{Lsc} = 1\ 200$ A(实际上,这样的试验会导致短接电路本身、电池和连接到电路中的其他测量仪器的损坏)。

因为对于实际电压源,I_l 对 V_l 关系是一条直线,应该注意到 V_{Loc} 和 I_{Lsc} 的值惟一地确定了整个 I_L-V_L 曲线。

在图 5.12 中垂直的虚线表示理想电压源的 I_L-V_L 曲线,对任何负载电流,端电压都保持常数。仅当负载电流较小时,实际电源的端电压才具有接近理想电压源的值。

现在考虑图 5.13(a)所示的一般实际电压源。理想电源的电压为 v_s,电阻 R_s,称为内阻或输出电阻,与电源相串联。再次指出,这个电阻并不像一个分立元件那样真的存在,不过是用来说明负载电流增大时端电压的减小。它的存在可以更贴切地模拟实际电压源的特性。

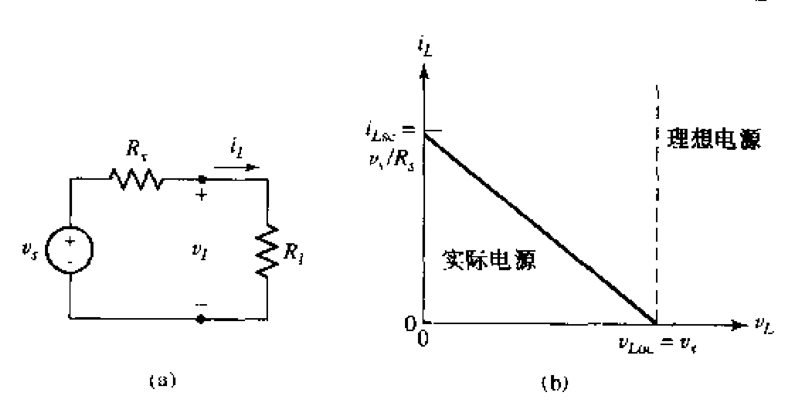


图 5.13 (a)接有负载电阻 R_l 的一般实际电压源;(b) 实际电压源的端电压随着 i_L 上升而下降,随着 $R_l = V_l / i_L$ 减小而下降。理想电压源的端电压在任何负载电流下保持不变(同时画出)

v_L 与 i_L 的线性关系为:

$$v_L = v_s - R_s i_L \tag{5.9}$$

它的图形见图 5.13(b)。开路电压是($R_L = \infty$, $i_L = 0$):

$$v_{Loc} = v_s \tag{5.10}$$

短路电流为($R_L = 0$, $v_L = 0$):

$$i_{Lsc} = \frac{V_s}{R_s} \tag{5.11}$$

这些值是图 5.13(b)中直线的两个截点,它们用来完全地定义直线。

5.3.2 实际电流源

理想电流源在现实世界中也是不存在的,没有一种实际元件能够提供常值电流而不管与其相连的负载电阻大小或者元件端电压的大小。某种晶体管电路能在很广的负载电阻范围内提供常值电流,但是负载电阻总是很大,以至于流过的电流很小。遗憾的是绝无可能得到无限大的功率。

实际电流源定义为理想电流源与一个内阻 R_p 的并联。这样的电源示于图 5.14(a),图中还标出了与负载电阻相联系的电流 i_L 和电压 v_L。应用 KCL 有:



$$i_L = i_s - \frac{v_L}{R_p} \tag{5.12}$$

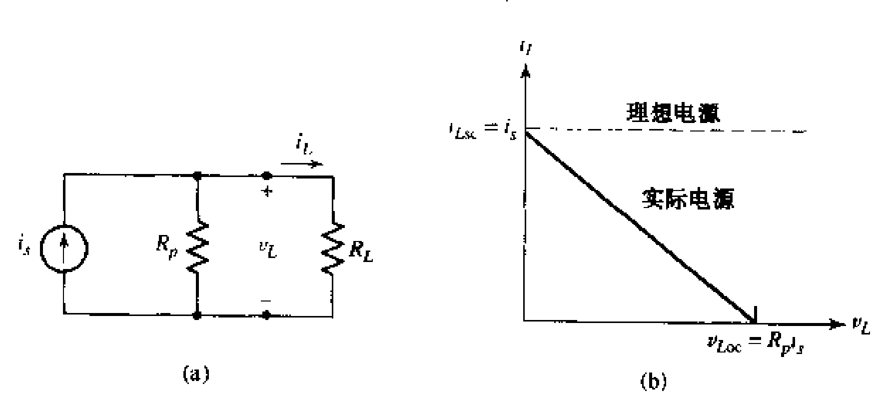


图 5.14　(a)接有负载电阻 R_L 的一般实际电流源;(b)实际电流源提供的负载电流作为负载电压的函数

这也是一个线性关系。开路电压和短路电流分别为:

$$v_{Loc} = R_p i_s \tag{5.13}$$

和

$$i_{Lsc} = i_s \tag{5.14}$$

通过改变 R_L 的大小可以考察负载电流随负载电压的变化情况,如图 5.14(b)所示。直线从短路端,即"西北"端出发,直到开路端,即"东南"端,对应电阻 R_L 从零变到无穷大。中点出现在 $R_L = R_p$。显然,只是在较小的负载电压下(取 R_L 的值小于 R_p),负载电流 i_L 才近似等于理想电流源的电流。

5.3.3 等效实际电源

定义了两种实际电源之后，现在准备讨论它们的等效电路。在接有相同的 R_L 时，无论 R_L 数值大小，如果两个电源产生的 v_L 和 i_L 相同，就定义这两个电源等效。因为在 $R_L = \infty$ 和 $R_L = 0$ 时，等效电源提供相同的开路电压和短路电流。换句话说，如果给定两个等效电源，一个是实际电压源，另一个是实际电流源，它们分别封装在只留有一对端点的黑匣子内，没有办法通过测量负载电阻上的电流和电压来判断它是哪种电源。

考虑图 5.15(a)中的实际电压源和电阻 R_L，以及图 5.15(b)中的实际电流源和电阻 R_L。简单计算指出，图 5.15(a)中 R_L 上的电压为：

$$v_L = v_s \frac{R_L}{R_s + R_L} \tag{5.15}$$

类似的简单计算指出，图 5.15(b)中 R_L 上的电压为：

$$v_L = \left[i_s \frac{R_p}{R_p + R_L} \right] \cdot R_L$$

如果：

$$R_s = R_p \tag{5.16}$$

和

$$v_s = R_p i_s = R_s i_s \tag{5.17}$$

那么两个实际电源在电气上等效，其中按照习惯标记 R_s 表示两个电源的内阻。

为了说明这些概念的应用，考虑图 5.16(a)所示的实际电流源。因为它的内阻为 2 Ω，等效实际电压源的内阻也是 2 Ω，包含在实际电压源内的理想电压源的电压为(2) × (3) = 6 V。等效实际电压源示于图 5.16(b)。

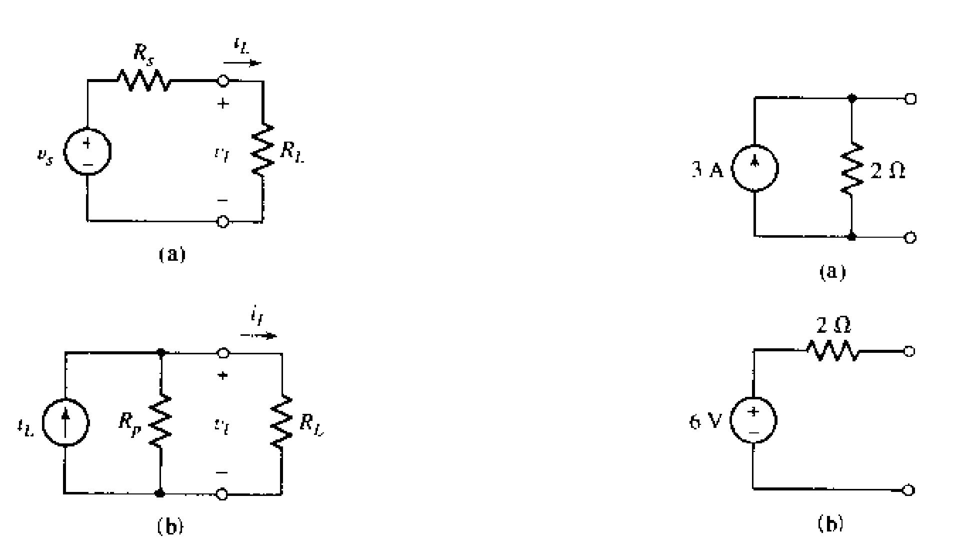


图 5.15 (a)接有负载电阻 R_L 的给定实际电压源；(b)接有同一负载的等效电流源

图 5.16 (a)给定实际电流源；(b)等效实际电压源

为检验等效性，看看两个电源接上 4 Ω 电阻的情况。在两种情况下，与 4 Ω 电阻相关联的是1 A电流，4 V 电压和 4 W 功率。可是如果非常细心，会注意到理想电流源提供 12 W 功率，而

理想电压源仅提供 6 W 功率。还有，实际电流源的内阻吸收 8 W 功率，而实际电压源的内阻仅吸收 2 W 功率。如此看到，两个实际电源只是在输出到负载端上的情况等效，它们在内部并不等效！

例题 5.4　将图 5.17(a)中的 9 mA 电源变换为等效电压源，然后计算 4.7 kΩ 电阻上的电流

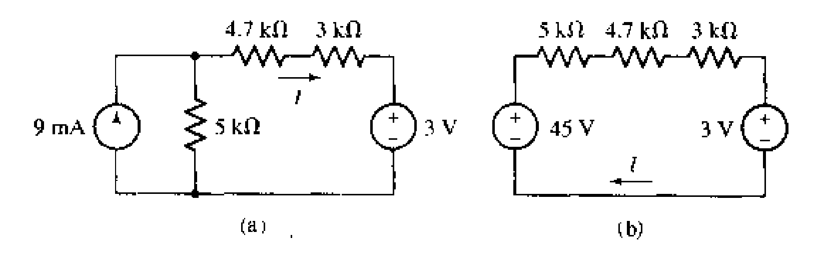


图 5.17　(a)同时具有电压源和电流源的电路；(b)将 9 mA 电源变换为等效电压源后的电路

等效电路由(9 mA) × (5 kΩ) = 45 V 独立电压源和串联的 5 kΩ 电阻组成，如图 5.17(b)所示。

简单回路的 KVL 方程为：

$$-45 + 5\,000I + 4\,700I + 3\,000I + 3 = 0$$

容易解得 $I = 3.307$ mA。

练习

5.3　对图 5.18 中电压源进行电源变换，然后计算通过 47 kΩ 电阻的电流。

答案：192 μA

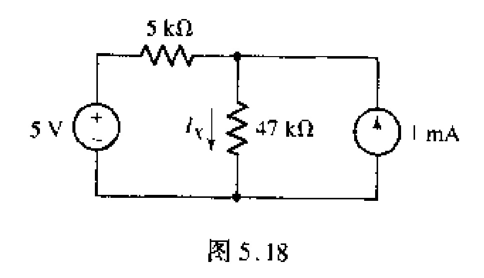


图 5.18

例题 5.5　利用电源变换方法，计算图 5.19(a)中 2 Ω 电阻上的电流

首先将每个电流源转化为电压源[图 5.19(b)]，策略在于把电路转变成一个简单回路。

必须注意保留 2 Ω 电阻，这是因为，首先受控源的控制变量为该电阻上的电压，其次，所求的电流也流过该电阻。因为 17 Ω 和 9 Ω 电阻相串联，可以将它们合并。注意到 3 Ω 和 4 Ω 电阻也可以合并为一个 7 Ω 电阻，然后将 15 V 电源变换为 15/7 A 电源，如图5.19(c)所示。

作为最后一步简化，注意两个 7 Ω 电阻可以合并为一个 3.5 Ω 电阻，然后将 15/7 A 电源变换为 7.5 V 电源。结果是一个简单回路，如图 5.19(d)所示。

利用 KVL 可以求得电流 I：

$$-7.5 + 3.5I - 51V_x + 28I + 9 = 0$$

其中：

$$V_x = 2I$$

所以：

$$I = 21.28\ \text{mA}$$

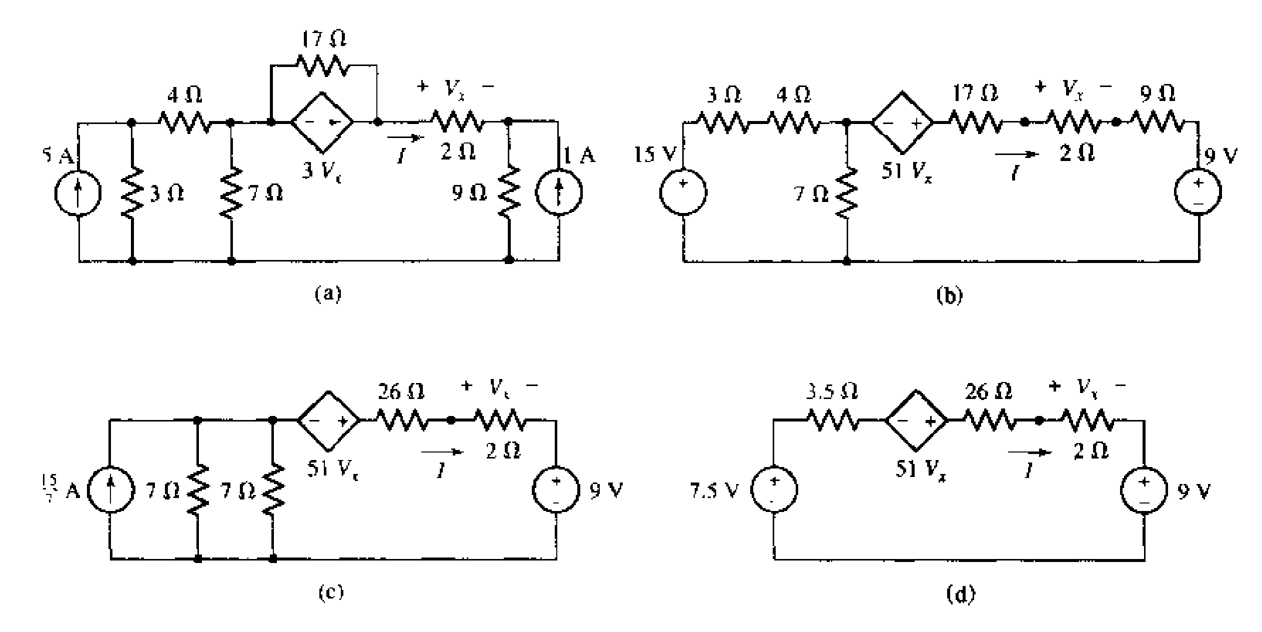


图 5.19 (a)具有两个独立源和一个受控源的电路；(b)每个电源都变换为电压源后的电路；(c)进一步合并后的电路；(d)最终电路

练习

5.4 对于图 5.20 的电路，连续利用电源变换，计算 1 MΩ 电阻上的电压。
答案；27.23 V

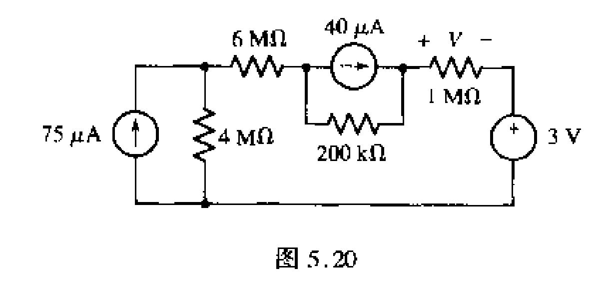


图 5.20

结束前的几个说明：

- 在进行电源变换时，记住电流源的箭头对应电压源的“+”端。
- 如果与某个电阻相关联的电压或电流是一个受控源的控制变量，或是电路的所求响应，这个电阻就不应该包含在电源变换中。
- 在电源变换中，一般的目标是尽可能使最终电路中只出现电压源，或只出现电流源。
- 可以连续利用电源变换，使电阻和电源合并以简化电路。

5.4 戴维南和诺顿等效电路

已经介绍了电源变换和叠加原理，还可以增加两个方法，使许多线性电路的分析大为简化。第一个定理的名称取自一位搞电信研究的法国工程师，M.L.戴维南，他于 1883 年发表了戴维南定理；第二个可以认为是第一个的推论，归功于 E.L.诺顿，一位在贝尔电话实验室工作的科学家。

假定只需要分析电路的一部分，例如，需要求出电路其余部分提供给单一负载的电流、电压和功率，电路本身可能含有很多个电源和电阻[图 5.21(a)]。或是希望得到不同负载电阻下的响应。戴维南定理指出，可以用一个独立电压源和相串联的电阻来替换除负载电阻之外的任何东西[图 5.21(b)]，而保持负载电阻上的响应不变。利用诺顿定理可以得到含有一个电流源和相并联的电阻的等效电路[图 5.21(c)]。

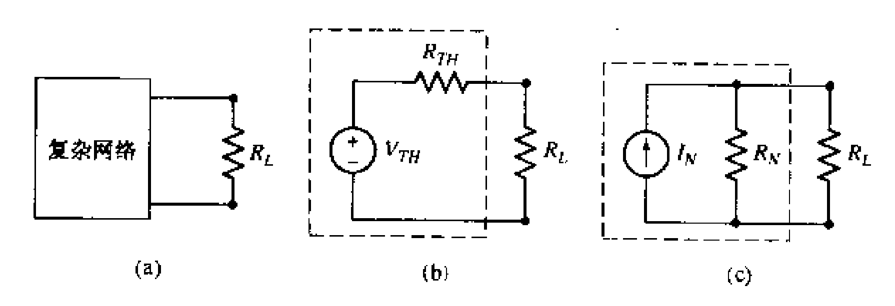


图 5.21 (a)包含负载电阻 R_L 在内的复杂网络；(b)接有负载电阻 R_L 的戴维南等效网络；(c)接有负载电阻 R_L 的诺顿等效网络

很明显，戴维南定理和诺顿定理的主要用途之一就是用一个非常简单的等效电路替换一大块电路——它常常是复杂的、不感兴趣的电路。利用新得到的简单电路可以快速计算原来电路所提供给负载的电流、电压和功率。这样还有助于选择最佳的负载电阻值。例如在晶体管功率放大器中，利用戴维南或诺顿等效定理能够确定从放大器输出并传递给扬声器的最大功率。

例题 5.6 考虑图 5.22(a)所示电路，确定 R_L 左边电路的戴维南和诺顿等效电路

虚线画出的区域将电路分为网络 A 和网络 B，假定感兴趣的主要是网络 B，它仅由负载电阻 R_L 构成。网络 A 可以通过连续的电源变换加以化简。

首先将 12 V 电源和 3 Ω 电阻看做实际电压源，并用由 4 A 电流源并联 3 Ω 电阻的实际电流源替代[图 5.22(b)]。接着将并联电阻与 2 Ω 电阻合并[图 5.22(c)]，如此形成的实际电流源再变换为一个实际电压源[图 5.22(d)]。最后结果见图 5.22(e)所示。

从负载电阻来看，这个戴维南等效电路等价于原始电路。对读者来说，这个电路变得非常简单，很容易算出提供给负载的功率为：

$$P_L = \left(\frac{8}{9+R_L}\right)^2 R_L$$

而且，从等效电路可以看出，R_L 上能够得到的最大电压为 8 V，对应于 $R_L = \infty$。将网络 A 变换为简单的实际电流源（诺顿等效定理）可以看出，可能提供给负载的最大电流为

8/9 A，出现在 $R_L=0$ 时。这两点从原始电路都无法轻易看出。

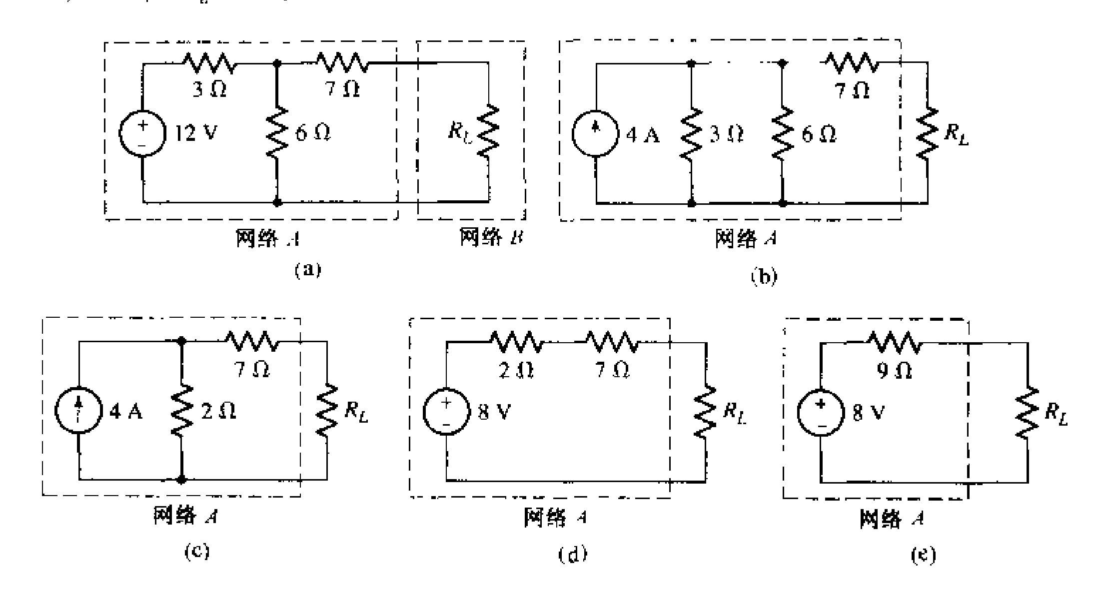


图 5.22 (a)分解为两个网络的电路；(b)～(d)简化网络A的中间步骤；(e)戴维南等效电路

练习

5.5 连续利用电源变换，确定图 5.23 电路中特别标出网络的诺顿等效电路。

答案：1 A；5 Ω

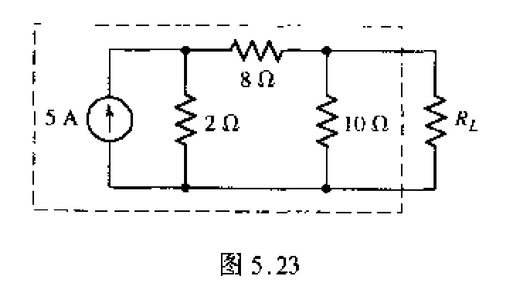


图 5.23

如果待变换的电路相当复杂，所需的电源变换次数以及为得到戴维南或诺顿等效电路所做的电阻合并次数很容易多到令人却步的程度。而且当存在受控源时，电源变换的方法并不总是很有效。即便对于复杂电路，利用戴维南和诺顿等效定理也能很快找出相应的等效电路。

戴维南定理可以叙述如下[①]：

给定任何线性电路，将它重新划分为两个网络 A 和 B，它们只用两根导线相连，当 B 断开时，定义出现在 A 端口的电压为开路电压 v_{oc}。如果将 A 中的所有独立电流源和独立电压源"置零"，用独立电压源 v_{oc} 以适当的极性与被置零的无源电路相串联，则 B 中的所有电流和电压将保持不变。

注意，无论哪部分网络含有受控源，它的控制变量必须在同一网络中。

① 用已学过的内容来证明戴维南定理是相当费事的，因此将它放在附录 C 中，感兴趣的读者可以到那里去阅读。

另外，尽管置零的网络 A 称为无源网络，但它可能含有受控源，只要它的控制电流或电压不为零，其中仍然可能有电流流动。

看看是否能够将戴维南定理成功地应用到图 5.22 的电路中。已经找到例题 5.6 中 R_L 左边电路的戴维南等效电路，但是想看看是否还有其他更容易的方法得到同样的结果。

例题 5.7　用戴维南定理确定图 5.22(a)中 R_L 左边电路的戴维南等效电路

首先断开 R_L，注意在图 5.24(a)中，没有电流流过 7 Ω 电阻。这样，V_{oc} 出现在 6 Ω 电阻上（没有电流流过 7 Ω 电阻，该电阻上也就没有电压降）。利用分压原理可确定：

$$V_{oc} = 12 \times \left(\frac{6}{3+6}\right) = 8\ \text{V}$$

将网络 A 置零（即用短路线代替 12 V 电源），向无源网络看进去，是 7 Ω 电阻串接着由 6 Ω 和 3 Ω 电阻的并联组合所构成电路[图 5.24(b)]

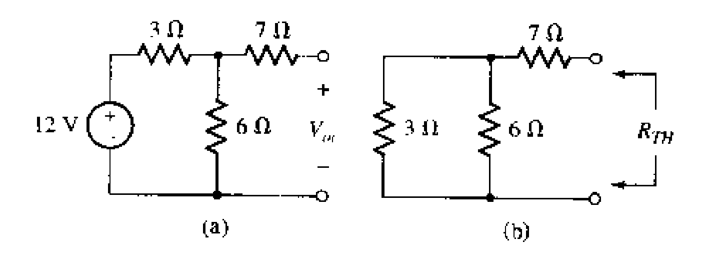


图 5.24　(a)将图 5.22(a)中网络 B 断开后的电路，外接端口上的电压为 V_{oc}；(b)将图 5.22(a)中的独立源置零，向网络 A 端口(连接网络 B 之处)内看进去，以确定网络 A 的等效电阻

这样无源网络可以用一个 9 Ω 电阻表示，它被称为网络 A 的戴维南等效电阻。其戴维南等效电路为 V_{oc} 与 9 Ω 电阻的串联，这与前面的结果一致。

练习

5.6　用戴维南定理求图 5.25 中 2 Ω 电阻上流过的电流（提示：将 2 Ω 电阻记为网络 B）。
答案：$V_{TH} = 2.571$ V；$R_{TH} = 7.857$ Ω；$I_{2\Omega} = 260.8$ mA

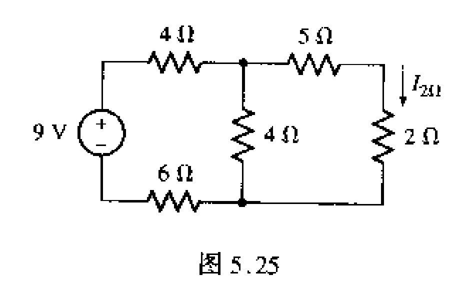


图 5.25

前面学习的求等效电路的方法与网络 B 完全无关，因为事先已说明要除去网络 B，并测量网络 A 所产生的开路电压，这样的操作当然与网络 B 毫不相干。在定理中提到网络 B 只是想表明，不管连接到网络 A 的元件是一个怎样的组合（网络 B 代表了这样的一般网络），都可以获得网络 A 的等效电路。

关于定理有几点需要强调：

- 加在网络 A 或网络 B 上的惟一限制是，对于网络 A 中的所有受控源，其控制变量也必须包含在网络 A 中。对于网络 B 也是类似。
- 对于网络 A 或网络 B 的复杂性没有任何限制。它们允许包含独立电压或电流源、线性受控电压源或电流源、电阻或任何其他线性电路元件的任意组合。
- 无源网络 A 可以用所谓的"戴维南等效电阻"这样的单个等效电阻 R_{TH} 来表示，无论无源网络 A 中是否存在受控源。
- 戴维南等效电路含有两个元件：一个电压源和一个相串联的电阻。它们都可以为零，尽管一般不是这样。

诺顿定理与戴维南定理非常相似，可以叙述如下：

给定任何线性电路，将它重新划分为两个网络 A 和网络 B，它们只用两根导线相连。如果两个网络中的任何一个含有受控源，其控制变量必须出现在同一网络之中。当网络 B 断开时，短接网络 A 的两个端点，定义短路电流为 i_{sc}。如果将网络 A 中的所有独立电流源和独立电压源"置零"，用独立电流源 i_{sc} 以适当的极性与被置零的无源电路相并联，则网络 B 中的所有电流和电压将保持不变。

线性电路的诺顿等效电路是诺顿电流源 i_{sc} 与戴维南等效电阻 R_{TH} 的并联。这样看到，实际上可以通过对戴维南等效电路做电源变换来获得网络的诺顿等效电路。如此，引出了 v_{oc}，i_{sc} 和 R_{TH} 之间的直接关系：

$$v_{oc} = R_{TH}i_{sc} \tag{5.18}$$

对于含有受控源的电路，常常发现，确定戴维南或诺顿等效电路更方便的方法是，先找到开路电压和短路电流，然后再用它们的商作为 R_{TH} 的值。因此，即使对于下面的简单问题，也应该熟悉开路电压和短路电流的求法。如果戴维南和诺顿等效电路是独立求出的，式(5.18)可以作为一个有用的检验手段。

下面考察三个确定戴维南和诺顿等效电路的例题。

例题 5.8　求图 5.26(a)中 1 kΩ 电阻所连接网络的戴维南和诺顿等效电路

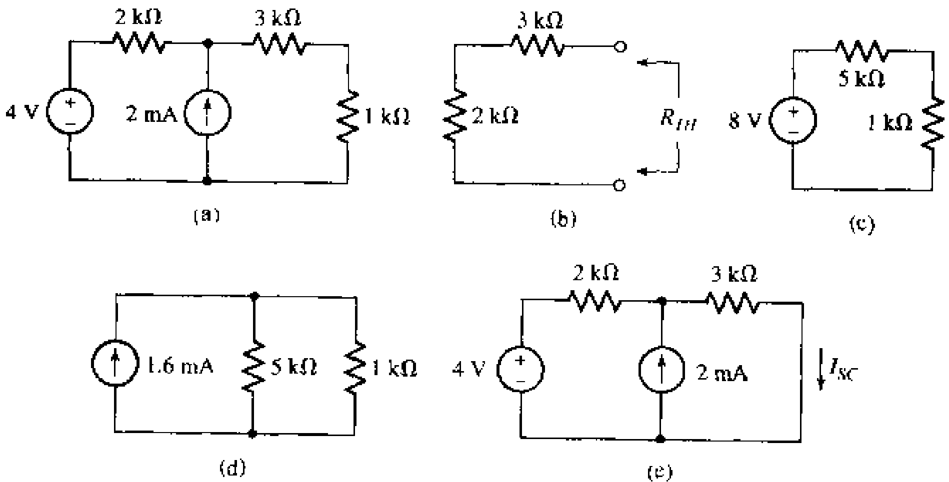


图 5.26　(a)给定电路，其中 1 kΩ 电阻记作网络 B；(b)所有独立源置零后的网络 A；(c)网络 A 的戴维南等效电路；(d)网络 A 的诺顿等效电路；(e)求 I_{sc} 的电路

按照题目所说，网络 B 就是 1 kΩ 电阻，网络 A 则是电路的剩余部分。电路中没有受控源，求戴维南等效电路最容易的方法是直接确定无源网络的 R_{TH}，接着计算 V_{oc} 或者 I_{sc}。

首先确定开路电压，这里容易用叠加法求得。当仅有 4 V 电源工作时，开路电压是 4 V。当仅有 2 mA 电源时，开路电压是 2 mA × 2 kΩ = 4 V（当 1 kΩ 电阻断开后，没有电流流过 3 kΩ电阻）。当两个电源都工作时，$V_{oc} = 4 + 4 = 8$ V。

下一步是将独立源置零，求无源网络 A 的形式。将 4 V 电源短路，2 mA 电源开路，结果是 2 kΩ 和 3 kΩ 电阻的串联，即一个 5 kΩ 电阻[见图 5.26(b)]。

这就确定了如图 5.26(c)所示的戴维南等效电路，从它还可以很快求出如图 5.26(d)所示的诺顿等效电路。作为检验，对所给电路[图 5.26(e)]求 I_{sc}。利用叠加和分流的原理：

$$I_{sc} = I_{sc}\big|_{4\,V} + I_{sc}\big|_{2\,mA} = \frac{4}{2+3} + (2) \times \frac{2}{2+3}$$
$$= 0.8 + 0.8 = 1.6\ \text{mA}$$

验证完成[①]。

练习

5.7 确定如图 5.27 所示电路的戴维南和诺顿等效电路。

答案：−7.857 V；−3.235 mA；2.429 kΩ

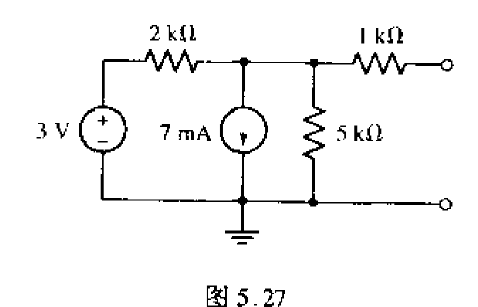


图 5.27

在第二个例子中，考虑一个包含独立源和受控源的网络 A。

例题 5.9 确定图 5.28(a)电路的戴维南等效电路

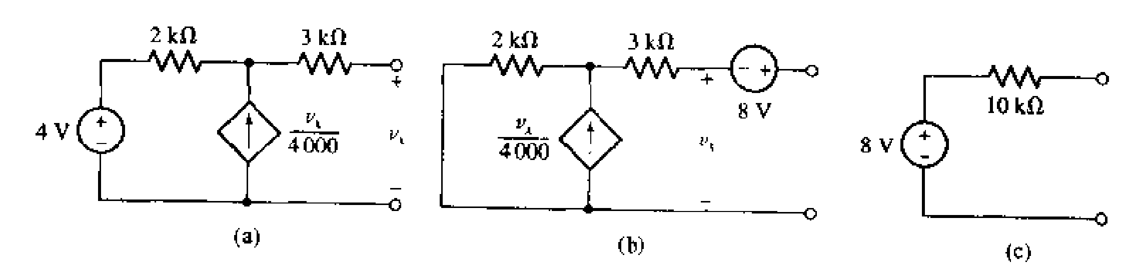


图 5.28 (a)给定网络，求其戴维南等效电路；(b)一个可能，但不大有用的戴维南等效电路形式；(c)这个线性电阻网络的最好形式

① 注意：如果在所有电路中电阻都以 kΩ 为单位，电压以 V 为单位，那么电流将总是自动地以 mA 为单位。

为了求得 V_{oc}，注意 $V_x = V_{oc}$，而且受控源电流必须流过 2 kΩ 电阻，因为没有电流能从 3 kΩ 电阻上流过。围绕外环应用 KVL：

$$-4 + 2\times 10^3 \times\left(-\frac{V_x}{4\,000}\right) + 3\times 10^3\times(0) + V_x = 0$$

和

$$V_x = 8\ \text{V} = V_{OC}$$

根据戴维南定理，可以将无源网络 A 与 8 V 电源串联形成等效电路，如图 5.28(b)所示。结果虽然正确，但不够简单，也不大有用。在线性电阻网络情况下，应该能找到无源网络 A 非常简单的等效电路，即 R_{TH}。

受控源的存在使得不能像对无源网络那样，通过电阻合并直接得到 R_{TH} 来求 I_{sc}。将图 5.28(a)电路输出端短路，显然 $V_x = 0$，受控电流源为零，$I_{sc} = 4/(5\times 10^3) = 0.8$ mA。所以：

$$R_{TH} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{8}{(0.8\times 10^{-3})} = 10\ \text{k}\Omega$$

这样就得到了图 5.28(c)可接受的戴维南等效电路。

练习

5.8 求图 5.29 所示网络的戴维南等效电路(提示：先做受控源的电源变换会对解题有帮助)。

答案：−502.5 mV；−100.5 Ω

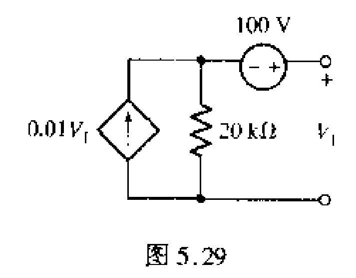


图 5.29

作为最后一个例子，考虑具有受控源，但没有独立源的网络。

例题 5.10 求图 5.30 电路的戴维南等效电路

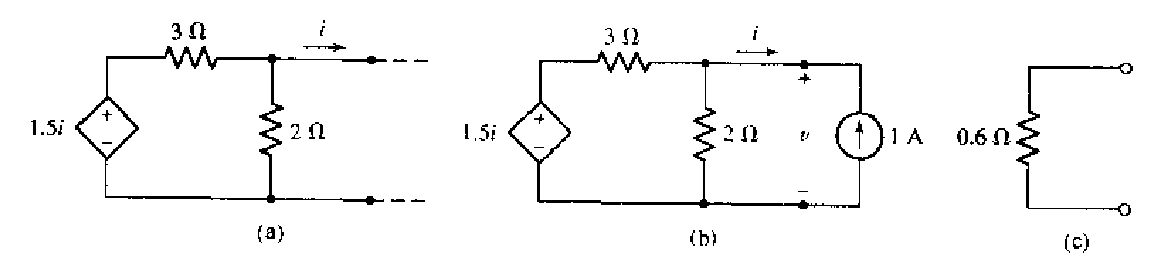


图 5.30 (a)不含独立源的网络；(b)获得 R_{TH} 的假想测量方法；(c)原电路的戴维南等效电路

因为右端接口是开路的($i = 0$)，所以受控源为零，所示 $v_{oc} = 0$。

下面寻找这个两端网络代表的 R_{TH} 值。可是不能得到 v_{oc} 和 i_{sc} 进而获得它们的商，因为网络不含独立源，v_{oc} 和 i_{sc} 均为零。那么采用一点技巧。外加一个 1 A 电源，测量由此产生的

电压 v_{test}，然后让 $R_{TH}=v_{test}/1$。参见图 5.30(b)，可以看到 $i=-1$ A，应用节点分析法：

$$\frac{v_{test}-1.5(-1)}{3}+\frac{v_{test}}{2}=1$$

所以：

$$v_{test}=0.6\ \mathrm{V}$$

及

$$R_{TH}=0.6\ \Omega$$

所求戴维南等效电路如图 5.30(c)所示。

5.4.1　过程的简短回顾

已经考察了确定戴维南或诺顿等效电路的三个例子。第一个例子(图 5.26)只含独立源和电阻，有几种不同方法可以解决问题。一种是计算无源网络的 R_{TH}，然后计算有源网络的 v_{oc}。也可以求 R_{TH} 和 I_{sc} 或者 V_{oc} 和 I_{sc}。

在第二个例子中(图 5.28)，既有独立源，也有受控源。采用的方法是求 V_{oc} 和 I_{sc}。因为受控源不能置零，所以不容易求得 R_{TH}。

最后一个例子不含任何独立源，所以戴维南和诺顿等效电路不含任何独立源。施加 1 A 电源，计算 $v_{test}=1\times R_{TH}$，如此求得 R_{TH}。也可以施加 1 V 电源，确定 $i=1/R_{TH}$。这两种方法可用于含受控源的电路，只要先将所有独立源置零。

另两种方法具有一定的吸引力，因为它们适用于所考虑的三种网络类型中的任何一种，首先用电压源 v_s 取代网络 B，定义离开它的正端的电流为 i，分析网络 A 以获得 i，按照 $v_s=ai+b$ 的形式写出方程。那么 $a=R_{TH}$，$b=v_{oc}$。

也可以施加一个独立源 i_s，使它的电压为 v，确定 $v=ai_s+b$。最后两个步骤是通用的，但是其他方法可能更容易和更快。

尽管本书几乎完全专注于线性电路的分析，但是应当知道，对于网络 B 为非线性，而网络 A 为线性的情况，戴维南和诺顿定理也都是有效的。

练习

5.9　求图 5.31 网络的戴维南等效电路(提示：采用 1 V 实验电源)。

答案： $I_{test}=50$ mA，$R_{TH}=20\ \Omega$

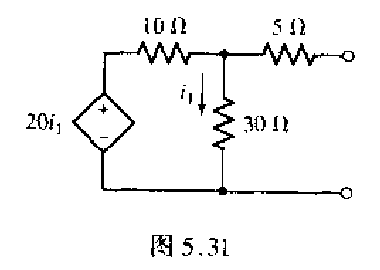


图 5.31

实际应用

数字万用表

最常用的电子测量设备是 DMM，即数字万用表(图 5.32)，它是设计用来测量电压、电流和电阻值的。



图 5.32 手持式数字万用表

为了测量电压，来自 DMM 的两根导线连接到适当的电路元件上(图 5.33)。一个端子通常标为"V/Ω"，表示正参考端，另一端通常用接地符号表示。在这种测量方式下，DMM 对待测量电路不提供功率。

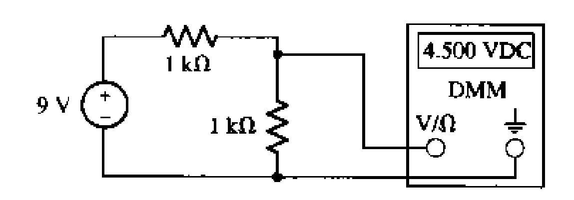


图 5.33 测量直流电压时 DMM 的接法

通过对戴维南和诺顿等效电路的讨论，读者现在清楚了，DMM 本身也有它的戴维南等效电阻。这个戴维南等效电阻与待测电路并联，它对测量会有影响(图 5.34)。

较好 DMM 的输入电阻典型值为 10 MΩ 或更高。这样测量电压 V 出现在 $1\ \text{k}\Omega \parallel 10\ \text{M}\Omega = 999.9\ \Omega$ 上。利用分压原理，求得 $V = 4.499\,8$ V，比期望值 4.5 V 特稍小。因此，电压表有限的

输入电阻在测量值中引入了一个小误差。

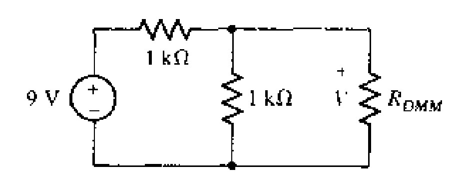


图 5.34　图 5.33 中的 DMM 用戴维南等效电阻 R_{DMM} 表示

为测量电流，DMM 必须与电路元件串联，一般要求将导线剪开(图 5.35)。DMM 的一根线连接到表的地端，另一根线接到通常标为"A"(表示电流测量)的端。同样，这种测量状态下，DMM 也不向外电路提供功率。

从图可见 DMM 的戴维南等效电阻(R_{DMM})与待测电路串联，所以它的值会对测量有影响。写出回路的 KVL 方程：

$$-9+1\,000I+R_{DMM}I+1\,000I=0$$

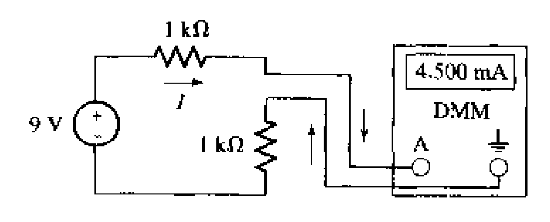


图 5.35　电流测量时 DMM 的接法

注意，已经将电表接成电流测量方式，其戴维南等效电阻与电压测量下的戴维南等效电阻不同。事实上，理想的 R_{DMM} 值对电流测量为 0 Ω；对电压测量为 ∞。如果 R_{DMM} 为 0.1 Ω，可以看到，测量电流值是 4.499 8 mA，只是与期望值 4.5 mA 稍有不同。根据电表所能显示的位数，甚至不能察觉非零 R_{DMM} 值对测量的影响。

只要在测量时没有独立源工作，同一个电表也能用来测量电阻。在电表内部，让一个已知电流通过待测电阻，用电压表电路测量产生的电压。用诺顿等效电路替换 DMM(它现在包含一个工作的独立电流源以产生预定的电流)，可见 R_{DMM} 与未知电阻 R 并联(图 5.36)。

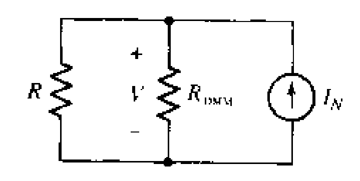


图 5.36　用诺顿等效电路取代电阻测量接法时的 DMM，显示 R_{DMM} 与未知的待测电阻相并联

实际上 DMM 测量的是 $R \parallel R_{DMM}$。如果 $R_{DMM}=10$ MΩ，$R_{measured}=9.999\,99$ Ω，这一结果对绝大多数目是足够精确了。但是，如果 $R_{measured}=5$ MΩ，DMM 的输入电阻实际上限制了所能测量的电阻值的上限，要测量更高的电阻必须应用特殊方法。应当注意到，如果数字万用表是可编程的，并且知道 R_{DMM} 的值，就可以对结果进行补偿，并测量较高阻值的电阻。

5.5 最大功率传输

考察实际电压源或电流源可以得出一个非常有用的功率定理。对于实际电压源(图 5.37),提供给负载电阻 R_L 的功率为:

$$p_L = i_L^2 R_L = \frac{v_s^2 R_L}{(R_s + R_L)^2}$$

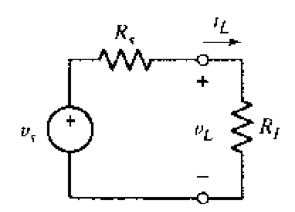


图 5.37 接有负载电阻 R_L 的实际电压源

为了求出从给定实际电压源吸收最大功率的 R_L 值,取关于 R_L 的导数:

$$\frac{dp_L}{dR_L} = \frac{(R_s + R_L)^2 v_s^2 - v_s^2 R_L (2)(R_s + R_L)}{(R_s + R_L)^4}$$

令导数为零,得到:

$$2R_L(R_s + R_L) = (R_s + R_L)^2$$

或

$$R_s = R_L$$

因为 $R_L = 0$ 和 $R_L = \infty$ 两者都给出极小值($p_L = 0$),并且已经得出了实际电压源和电流源的等效关系,这样就证明了如下的最大功率传输定理:

一个与电阻 R_s 串联的独立电压源,或者一个与电阻 R_s 并联的独立电流源,在 $R_L = R_s$ 时,提供给负载电阻 R_L 的功率最大。

读者也可以利用网络的戴维南等效电阻去认识最大功率传输定理:

当 R_L 等于网络的戴维南等效电阻时,网络提供给负载电阻 R_L 的功率最大。

最大功率传输定理指出,电阻为 2 Ω 时从图 5.16 所示的两种实际电源之一吸收最大功率(4.5 W),而在图 5.11 中,电阻为 0.01 Ω 时收到最大功率(3.6 kW)。

例题 5.11 图 5.38(a)所示电路是两级双极型晶体管放大器模型,确定第一级向第二级提供最大功率所要求的 R_C 之值

首先从连接两级的端口看进去,确定各级的戴维南等效电路。断开第二级,置零独立信号源 v_g,剩下要考虑的是图 5.38(b)所示的网络。当 $v_g = 0$,那么 $v_\pi = 0$,没有电源向三个电阻提供电流。结果,受控源不工作,因此 $R_{TH_1} = R_c$。确定图 5.38(a)中第二级断开后电阻 R_c 上的电压,就可得到第一级的戴维南等效电压,记为 V_{TH_1}。

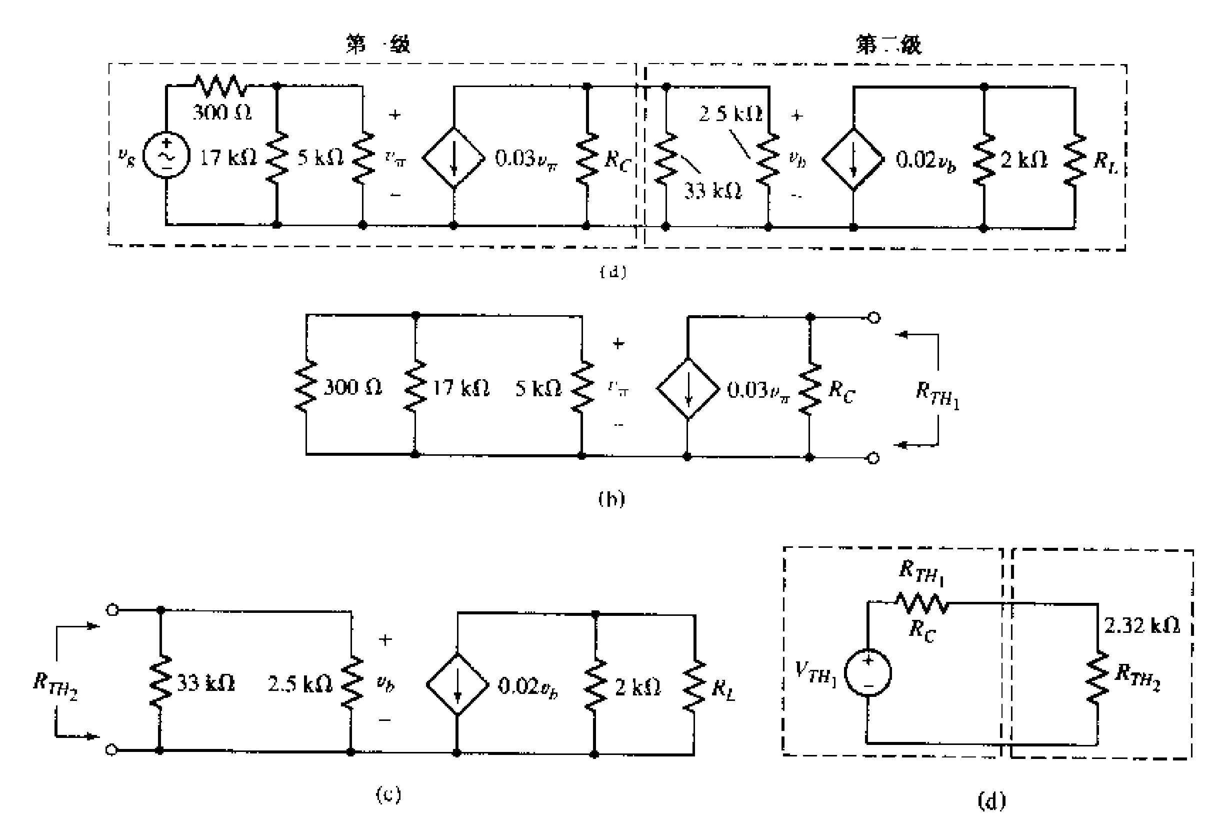


图 5.38　(a)两级晶体管放大器，它的 R_C 值待选，以向第二级提供最大功率；(b)独立电压源置零后的第一级电路；(c)与第一级断开后的第二级；(d)还原为两个戴维南等效电路组合的两级电路

用相似的方式，确定图 5.38(c)所示的第二级电路的戴维南等效电阻。只有一根导线将受控电流源、2 kΩ 电阻和负载电阻 R_L 连接到感兴趣的端口上，因此对 R_{TH_2} 的测量没有影响。这样，R_{TH_2} 便是 33 kΩ ∥ 2.5 kΩ = 2.32 kΩ。第二级不存在任何独立源，它的戴维南等效电路仅仅由 R_{TH_2} 组成。新的（简化后的）两级电路如图 5.38(d)所示。

也许一个比较聪明的方法是先画出图 5.38(d)电路，因为未确定的电阻（R_C）所在位置不能应用最大传输功率定理，这一点在介绍定理时已经说过。如果 R_C 和 2.32 kΩ 电阻的位置交换，为保证最大功率传输到第二级只需使 $R_C = 2.32$ kΩ。

遗憾的是，情况并非如此。也许有人会认为，设定 $R_C = 0$ 会产生最大功率传输。可是经过进一步检查，可以看到，V_{TH_1} 取决于 R_C，并且事实上，当 $R_C = \infty$ 时传输到第二级的功率最大！所以在考虑对一个特定情形是否应用最大功率传输概念时，重要的是记住所选择的是负载电阻，而不是源的戴维南等效电阻。

练习

5.10　考虑图 5.39 的电路：

(a)如果 $R_{out} = 3$ kΩ 求提供给它的功率。

(b)对于任意的 R_{out}，能够提供给它的最大功率是多少？

(c)能够得到 20 mW 功率的两个不同的 R_{out} 值是多大？

答案:230 mW;306 mW;59.2 kΩ 和 16.88 Ω

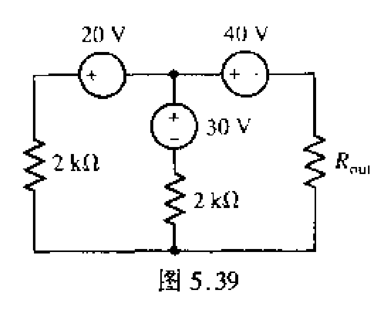


图 5.39

5.6 Δ-Y 转换

在前面看到进行电阻的串并联组合常常能明显简化电路的复杂性。当这样的组合不存在时,往往可以利用电源变换使得这种简化成为可能。另一种有用方法,称为 Δ-Y 转换,它来源于网络理论。它的推导过程放在研究双端口网络的第 17 章中。在开始进行节点或网孔分析之前,利用 Δ-Y 转换,常常能有效降低电阻网络的复杂性,所以这里对它做一些介绍。

考虑图 5.40 的电路,没有可利用的串联或并联组合以简化电路的任何部分[注意,图 5.40(a)和图 5.40(b)二者相同;图 5.40(c)和图 5.40(d)二者相同],也不存在任何电源,无法进行电源变换。但是可以在两种类型的网络之间进行转换,将 Y 形网络转换为 Δ 形网络,用下列关系式计算新电阻值:

$$R_A = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2}$$

$$R_B = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3}$$

$$R_C = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1}$$

图 5.40 (a)由 3 个电阻按一种特殊接法连接的 Π 型网络;(b)画成 Δ 形而与(a)相同的网络;(c)3 个电阻组成的 T 型网络;(d)画成 Y 形而与(c)相同的网络

从 Δ 形网络到 Y 形网络的转换:

$$R_1 = \frac{R_AR_B}{R_A + R_B + R_C}$$

$$R_2=\frac{R_BR_C}{R_A+R_B+R_C}$$

$$R_3=\frac{R_CR_A}{R_A+R_B+R_C}$$

尽管有时需要集中思想才能辨别实际网络，这些公式的应用却很简单。

例题 5.12　利用 Δ-Y 转换方法求图 5.41(a)电路的戴维南等效电阻

图 5.41(a)网络由两个 Δ 形网络组成，它们分享 3 Ω 电阻。这里必须十分细心，不能胃口太大，把两个 Δ 形网络都转换成 Y 形网络。将网络上部，包含 1 Ω，4 Ω 和 3 Ω 电阻，转换为 Y 形网络[图 5.41(b)]之后这一点会变得更明显。

注意，在转换上部网络为 Y 形网络时，已经去掉了 3 Ω 电阻。因此已经没有办法将原来包含 2 Ω，5 Ω 和 3 Ω 电阻的 Δ 形网络转换为 Y 形网络了。

将$\frac{3}{8}$ Ω 与 2 Ω 电阻合并，$\frac{3}{2}$ Ω 与 5 Ω 电阻合并[图 5.41(c)]。现在$\frac{19}{8}$ Ω 与$\frac{13}{2}$ Ω 电阻并联，它们又与$\frac{1}{2}$ Ω 电阻串联。这样就用一个$\frac{159}{71}$ Ω 的电阻取代了原来图 5.41(a)的网络[图5.41(d)]。

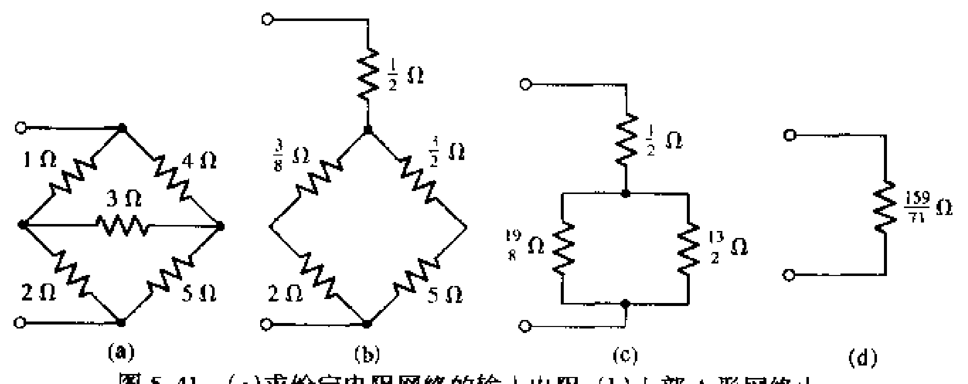


图 5.41　(a)求给定电阻网络的输入电阻；(b)上部 Δ 形网络由一个等价 Y 形网络取代；(c,d)串并联组合后得到单个电阻

练习

5.11　利用 Y-Δ 转换方法求图 5.42 电路的戴维南等效电阻。

答案：11.43 Ω

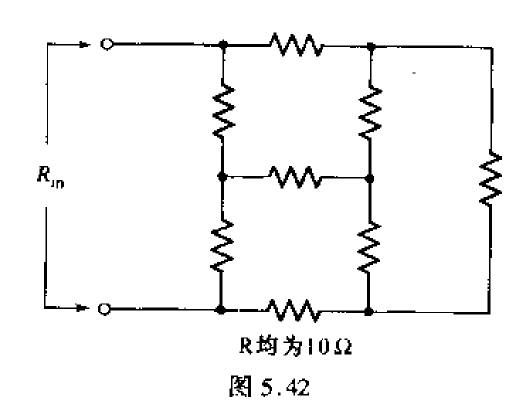


图 5.42

5.7 各种方法的比较

在第3章中介绍了基尔霍夫电流定律(KCL)和基尔霍夫电压定律(KVL)。只要仔细考虑电路代表的整个系统,这两条定律适用于将要遇到的任何电路。原因在于KCL和KVL分别要求电荷守恒和能量守恒,这是非常基本的原理。根据KCL,得出了非常有效的节点电压分析法。另一个基于KVL的相似方法称为网孔分析法(遗憾的是它仅适用于平面电路),它也是一个很有用的电路分析方法。

本书的大部分章节专注于研究适用于线性电路的分析方法。如果已知电路只含线性元件(换句话说,所有电压和电流都由线性函数相关联),那么在应用网孔或节点分析法之前,常常能化简电路。处理完全线性系统得到了许多知识,其中也许最重要的结论就是叠加原理适用于线性系统。当多个给定独立源作用于电路,可以将每个电源独立的贡献叠加起来。这个方法的应用在工程领域极其普遍,经常会碰到。在许多实际情况中,将会发现,尽管有几个源作用于系统,往往只有其中一个主导系统响应。只要系统线性模型足够精确,应用叠加原理可以很快辨识出那个源。

可是从电路分析的观点,除非需要确定哪个独立源对一特定响应的贡献最大,直接做节点或网孔分析往往是最直接的策略。其原因在于,对于具有12个独立源的电路应用叠加原理,要求将原电路重画12遍,而且还得对每一特定电路应用节点或网孔分析法。

在电路分析中,电源变换方法常常是一个非常有用的工具。进行电源变换可以将那些原电路中不是串联或并联的电阻和电源合并起来。电源变换还可以使原电路中所有或至少是大多数电源变换为同一种电源(全部成为电压源或全部成为电流源),这样节点或网孔分析会变得直截了当。

有许多原因说明戴维南定理是极其重要的。在处理电子线路时,总是知道电路中不同元件的戴维南等效电阻,特别是放大器各级的输入输出电阻。原因在于实现阻抗匹配常常是使给定电路性能最佳化的最好办法。在最大功率传输的讨论中已经看到这一点的简介,在那里要求负载电阻与相连网络的戴维南等效电阻匹配。可是在日常电路分析中,将一部分电路变换为其戴维南或诺顿等效电路并不比分析一个完整电路的工作量少。因此,就像叠加原理那样,仅当求部分电路的特定响应时才应用戴维南和诺顿定理。

5.8 小结与复习

- 叠加原理指出,线性电路的响应可以通过对独立电源单独作用的响应求和而得到。
- 当必须确定每个电源对一个特定电路的单独贡献时,往往应用叠加原理。
- 实际电压源模型是电阻与独立电压源的串联。实际电流源模型是电阻与独立电流源的并联。
- 电源变换方法可以将一个实际电压源变换为一个实际电流源,或者反过来。
- 连续的电源变换可以将多个电阻或多个电源组合起来,从而大大简化电路分析。
- 网络的戴维南等效电路是电阻与独立电压源的串联。诺顿等效电路是同一电阻与独立电流源的并联。
- 求戴维南等效电阻有几种方法,取决于电路中是否存在受控源。

- 当负载电阻与相连网络的戴维南等效电阻匹配时，将出现最大功率传输。

习题

1. 线性概念非常重要，因为线性电路比非线性电路的分析要容易得多。遗憾的是，大多数遇到的实际系统本质上是非线性的。可是，对一个非线性系统可以构造一个线性模型，它在控制变量的一个较小范围内有效。作为例子，考虑简单的指数函数 e^x，这个函数的泰勒级数为：

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$$

截去它的线性项(x^1)之后部分，构造这一函数的线性模型。估计新函数在 $x = 0.001, 0.005, 0.01, 0.05, 0.10, 0.5, 1.0$ 和 5.0 时的值。在哪些 x 值下线性模型给出 e^x 的合理近似？

2. 图 5.43 电路中，当电源 i_A 和 v_B 工作，且 $v_C = 0$ 时，知 $i_x = 20$ A；当 i_A 和 v_C 工作，且 $v_B = 0$ 时，知 $i_x = -5$ A；最后当三个电源都工作，知 $i_x = 12$ A。当只有(a) i_A；(b) v_B；(c) v_C 工作时求 i_x；(d)如果 i_A 和 v_C 的幅度加倍，而 v_B 保持不变，求 i_x。

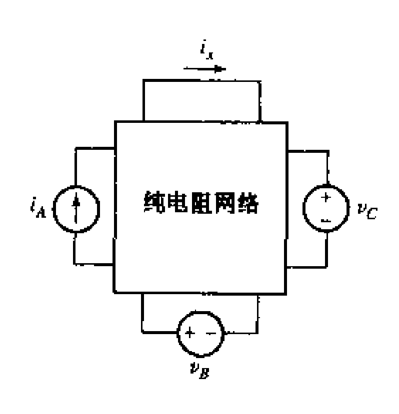


图 5.43

3. 应用叠加原理求图 5.44 电路中 v_x 的值

4. 在图 5.45 电路中应用叠加原理求 i_3。

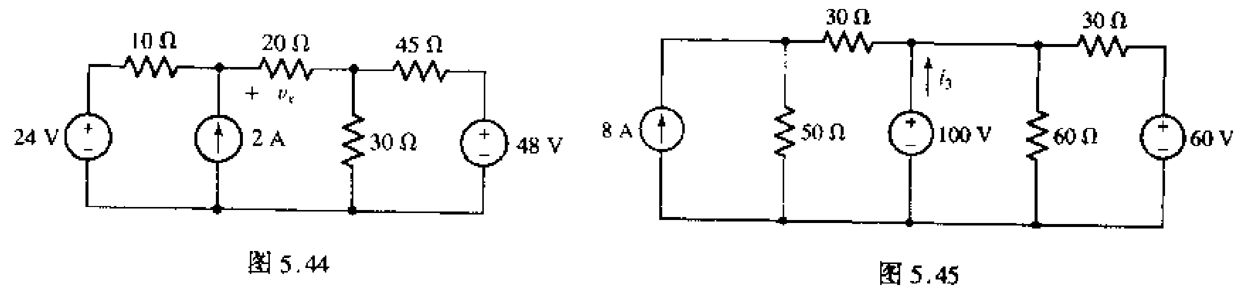


图 5.44　图 5.45

5. (a)在图 5.46 电路中用叠加定理求 i_2；(b)计算 5 个电路元件中每个吸收的功率。

6. 在图 5.47 所示电路中应用叠加原理求电压 V。注意有受控源存在。

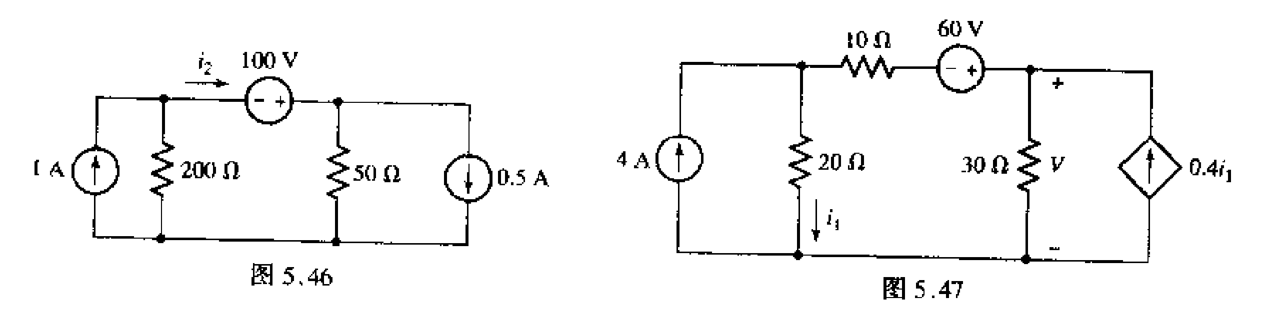


图 5.46　图 5.47

7. 在图 5.48 电路中,(a)如果 $i_A = 10$ A,$i_B = 0$,那么 $v_3 = 80$ V;如果 $i_A = 25$ A,$i_B = 0$,求 v_3;(b) 如果 $i_A = 10$ A,$i_B = 25$ A,那么 $v_4 = 100$ V;如果 $i_A = 25$ A,$i_B = 10$ A,那么 $v_4 = -50$ V;如果 $i_A = 20$ A,$i_B = -10$ A,求 v_4。
8. 应用叠加原理求图 5.49 中电流源上的电压。

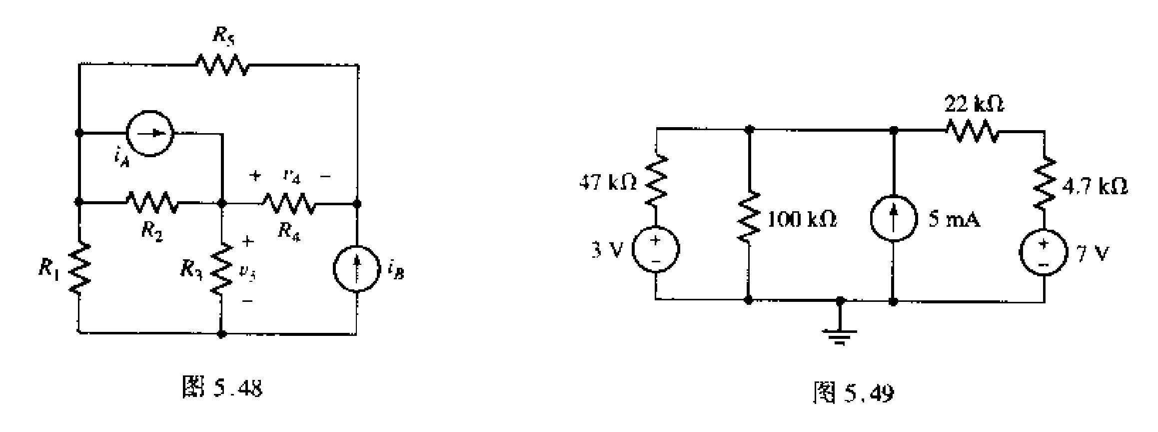


图 5.48　　图 5.49

9. 应用叠加原理求图 5.50 中 500 kΩ 电阻消耗的功率。
10. 应用叠加原理确定图 5.51 中 17 kΩ 电阻上的电压。如果电阻的额定最大功率为 250 mW,为避免电阻过热,5 V 电源允许达到的最大正电压为多少?

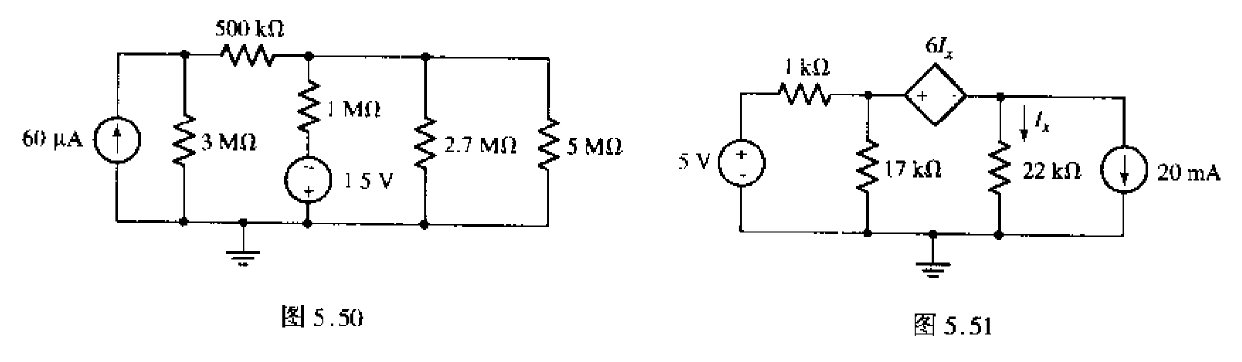


图 5.50　　图 5.51

11. 图 5.52 中哪个电源提供给 2 Ω 电阻的功率最大?哪个最小?2 Ω 电阻上消耗的功率有多大?
12. 应用叠加原理求图 5.53 电路中 i_B,这是双极型晶体管放大器的通用电路模型。

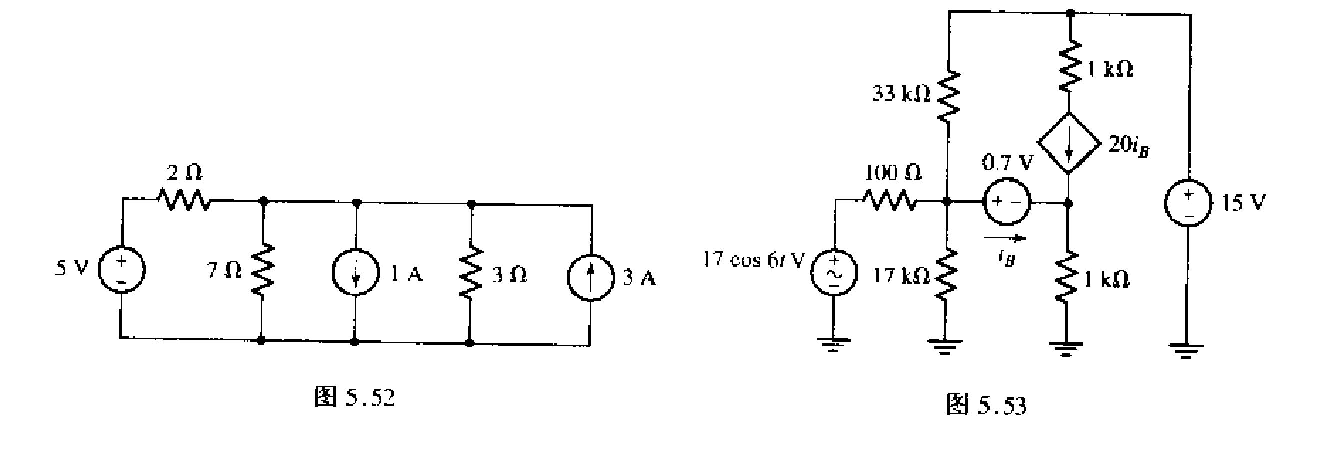


图 5.52　　图 5.53

13. 对图 5.54 所示电路：

(a)利用叠加原理计算 V_1；(b)利用 PSpice 直流扫描分析程序证实每个电源对 V_x 的贡献。递交一份标注好的电路图和有关的输出曲线，并对结果做一小结。

14. 对图 5.55 所示电路：

(a)应用叠加原理计算 V_x；(b)利用 PSpice 直流扫描分析程序证实每个电源对 V_x 的贡献。递交一份标注好的电路图和有关的输出曲线，并对结果做一小结。

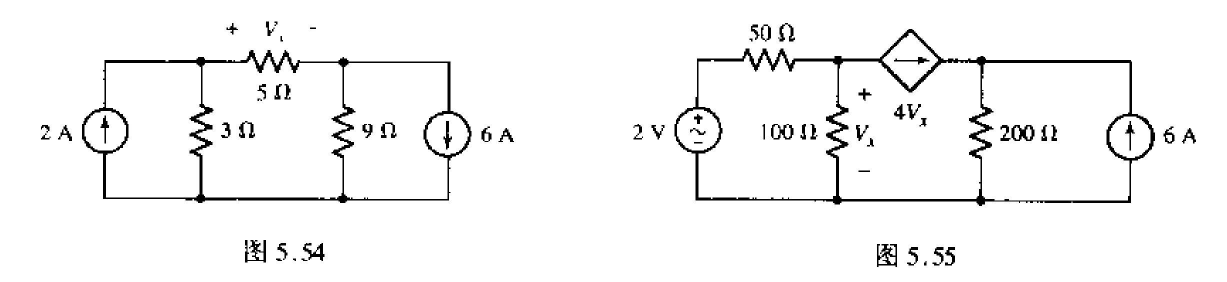


图 5.54　　图 5.55

15. 考虑图 5.56 所示的三个电路。分析每个电路，证明 $V_x = V_x' + V_x''$（这说明，尽管叠加原理大多用于将电源置零，而事实上叠加原理具有更广泛的意义）。

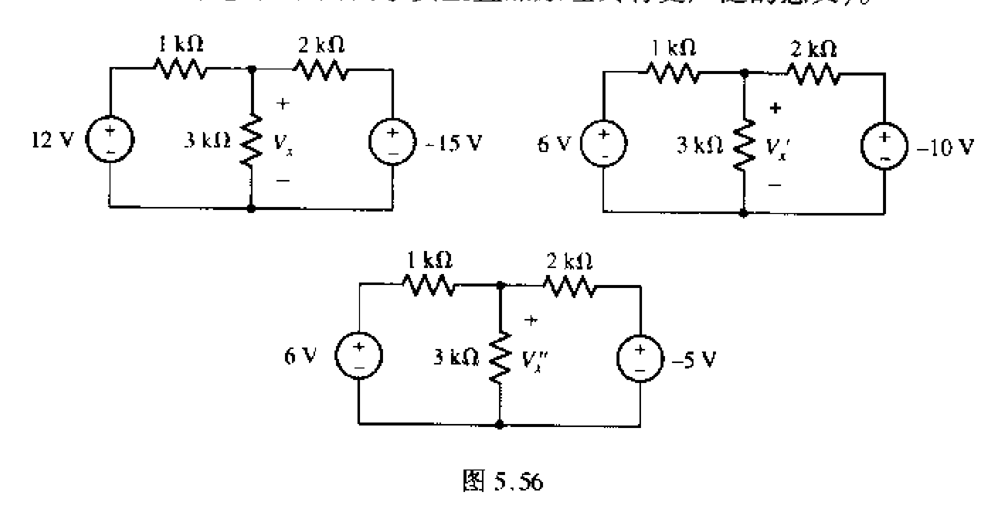


图 5.56

16. 用电源变换和电阻合并来简化图 5.57 的两个网络，直到端点 a 和 b 的左边只剩下两个元件。

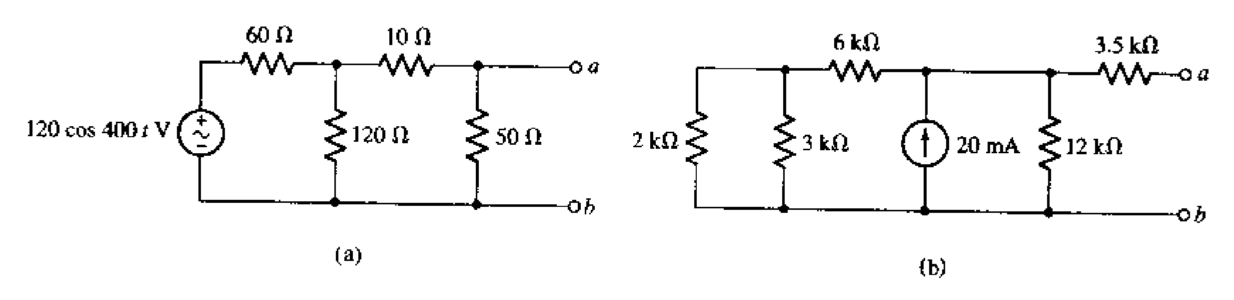


图 5.57

17. 利用电源变换确定图 5.58 中 5.8 kΩ 电阻上消耗的功率。

18. 利用电源变换确定图 5.59 中 5.8 kΩ 电阻上消耗的功率。

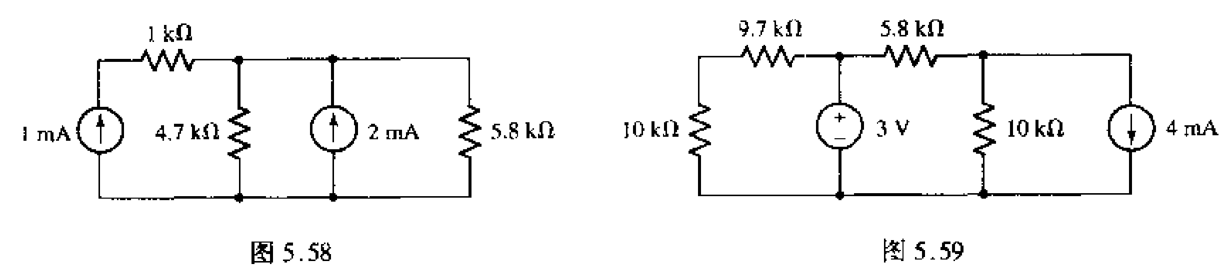


图 5.58　　图 5.59

19. 利用电源变换先简化图 5.60 所示电路，然后确定 1 MΩ 电阻上消耗的功率。

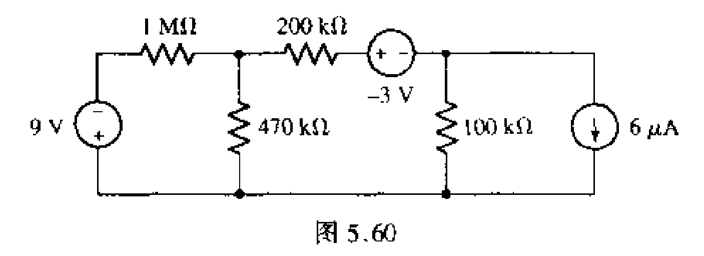


图 5.60

20. 利用电源变换先简化图 5.61 所示电路，然后确定 I_1。

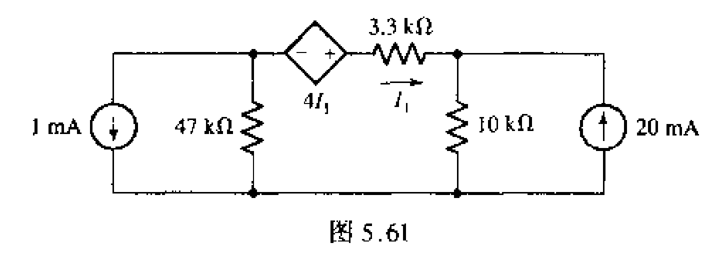


图 5.61

21. (a)利用电源变换先得到图 5.62 所示电路的简化等效电路，然后求 V_1；(b)对图 5.62 电路做 PSpice 分析证实前面的分析。递交一份清楚标明 V_1 的电路图。

22. (a)连续做电源变换确定图 5.63 中电流 I_x；(b) 对图 5.63 电路做 PSpice 分析证实前面的分析。递交一份清楚标明 I_x 的电路图。

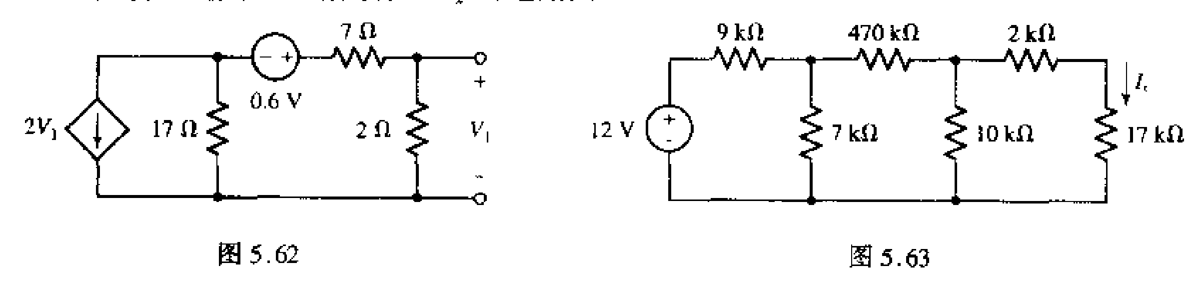


图 5.62　　图 5.63

23. 连续做电源变换确定图 5.64 中电流 I_x。

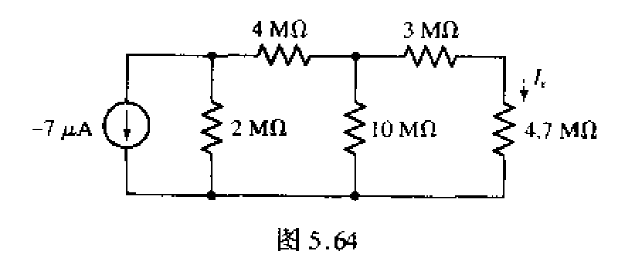


图 5.64

24. 将图 5.65 电路变换为单个电流源与单个电阻的并联。

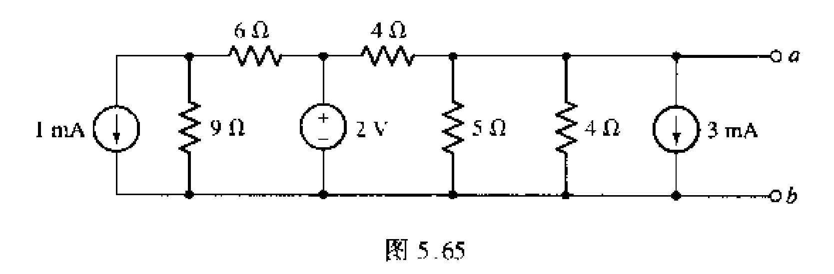


图 5.65

25. 利用电源变换将图 5.66 电路变换为单个电流源与单个电阻的并联。

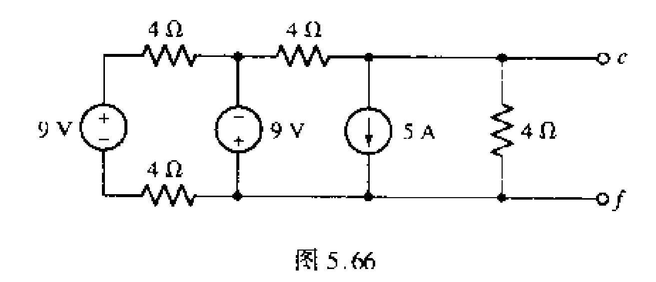


图 5.66

26. 确定图 5.67 电路中 1 MΩ 电阻消耗的功率。

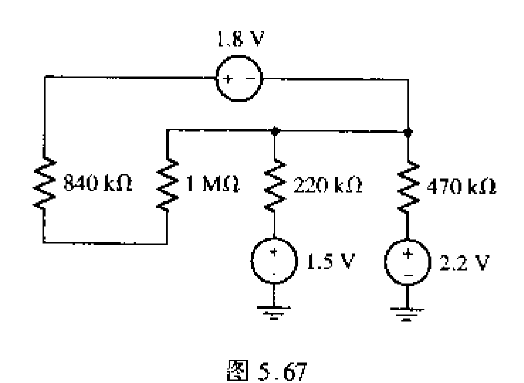


图 5.67

27. 表 5.1 列出对某个 1.5 V 碱性电池所做的测量。利用所给信息为电池建立一个两个元件的实际电压源模型，使模型在电流从 1 mA 到 20 mA 范围内比较精确。注意，除了明显的实验误差之外，在实验测量的电流范围内，电池"内阻"明显不同。

表 5.1　接有可变负载电阻的 1.5 V 碱性电池电流 - 电压特性测量

电流输出(mA)	端电压(V)
0.000 058 9	1.584
0.318 3	1.582
1.439 8	1.567
7.010	1.563
12.58	1.558

28. 利用表 5.1 中的数据为电池建立一个简单双元件实际电流源模型，使模型在电流从 1 mA到 20 mA 范围内比较精确。注意，除了明显的实验误差之外，在实验测量的电流范围内，电池"内阻"明显不同。

29.将图 5.68 电路简化为单一电压源与单一电阻的串联。

30.求图 5.69 中 5 Ω 电阻吸收的功率。

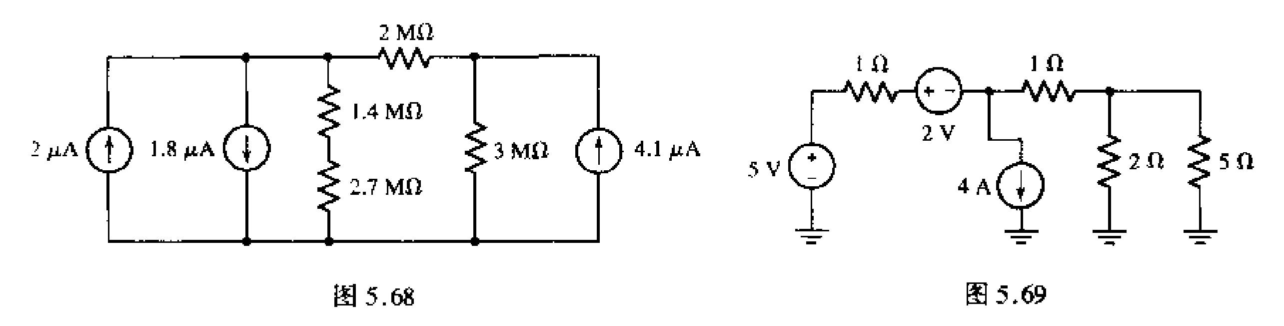


图 5.68　　图 5.69

31.求图 5.70 网络中端点 a 和 b 的戴维南等效电路。如果连接到端点 a 和 b 的电阻 R_{ab} 等于(b)50 Ω;(c)12.5 Ω,提供给该电阻的功率是多少?

32.对于图 5.71 的网络:(a)去除端点 c,求在端点 a 和 b 看到的诺顿等效电路;(b)去除端点 a,对端点 b 和 c 重复以上计算。

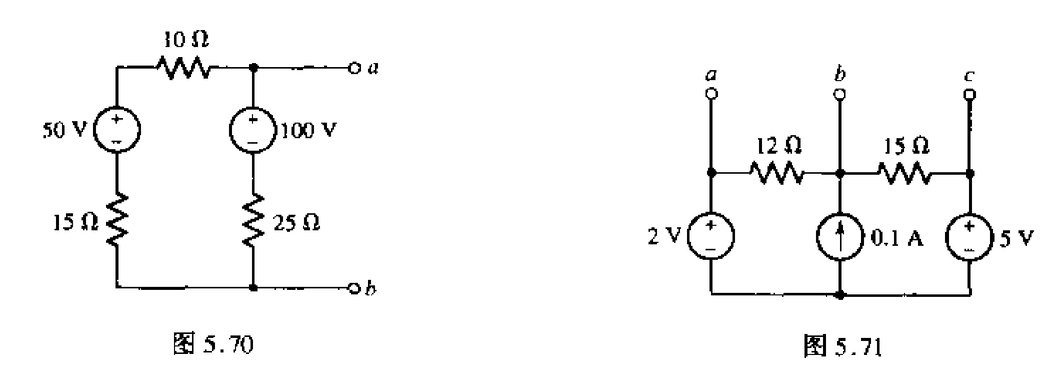


图 5.70　　图 5.71

33.求图 5.72 网络从(a)x 和 x';(b)y 和 y' 看到的戴维南等效电路。

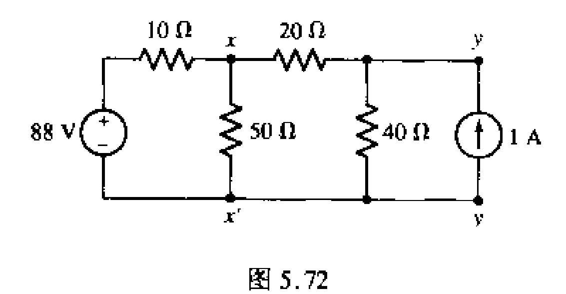


图 5.72

34.(a)求图 5.73 所示网络的戴维南等效电路;(b)若 a 和 b 接有 100 Ω 负载电阻,提供给它的功率是多少?

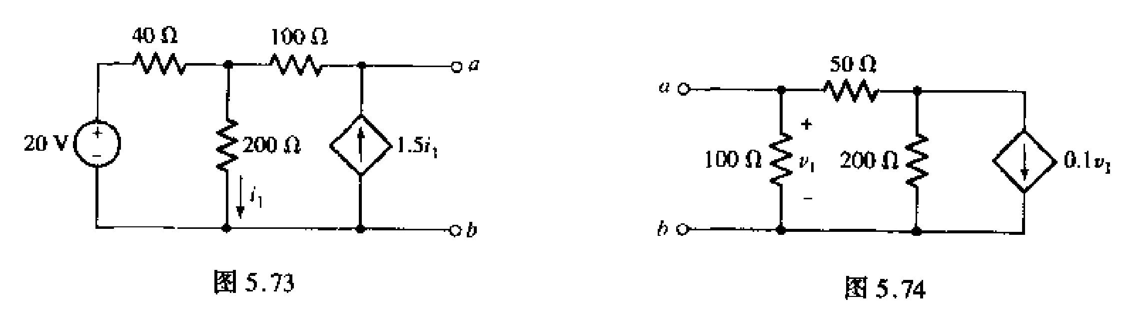


图 5.73　　图 5.74

35.求图 5.74 所示网络的诺顿等效电路。

36.求图 5.75 所示二端网络的戴维南等效电路.

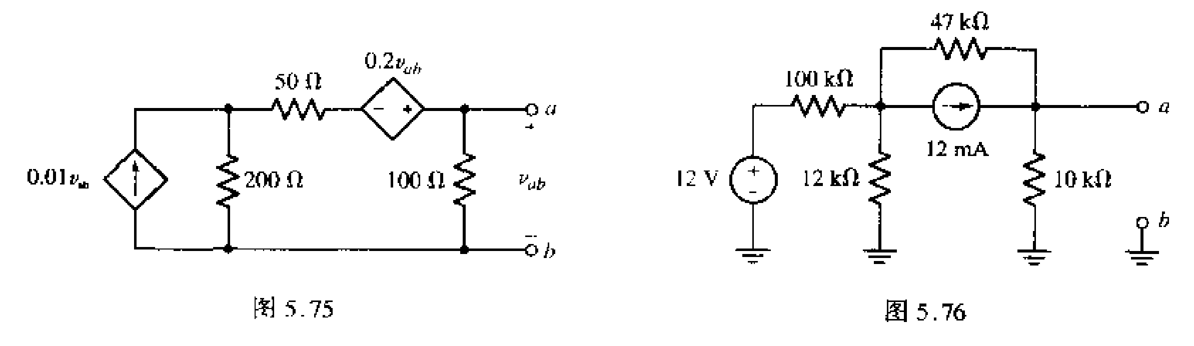


图 5.75

图 5.76

37.求图 5.76 电路的戴维南等效电路。

38.对于图 5.77 的网络,确定(a)戴维南等效电路;(b)诺顿等效电路。

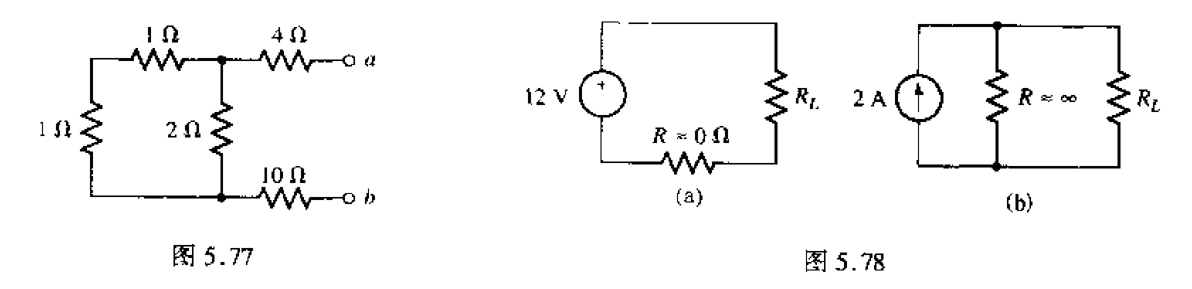


图 5.77

图 5.78

39.对于图 5.78(a)的电路,确定连接 R_L 的网络的诺顿等效电路。对于图 5.78(b)的电路,确定连接 R_L 的网络的戴维南等效电路

40.确定图 5.79 所示网络的戴维南和诺顿等效电路。

41.确定图 5.80 所示网络的戴维南和诺顿等效电路。

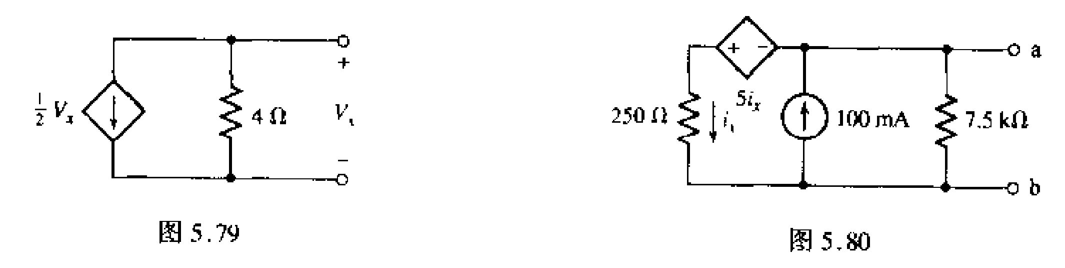


图 5.79

图 5.80

42.确定图 5.81 所示网络的戴维南和诺顿等效电路。

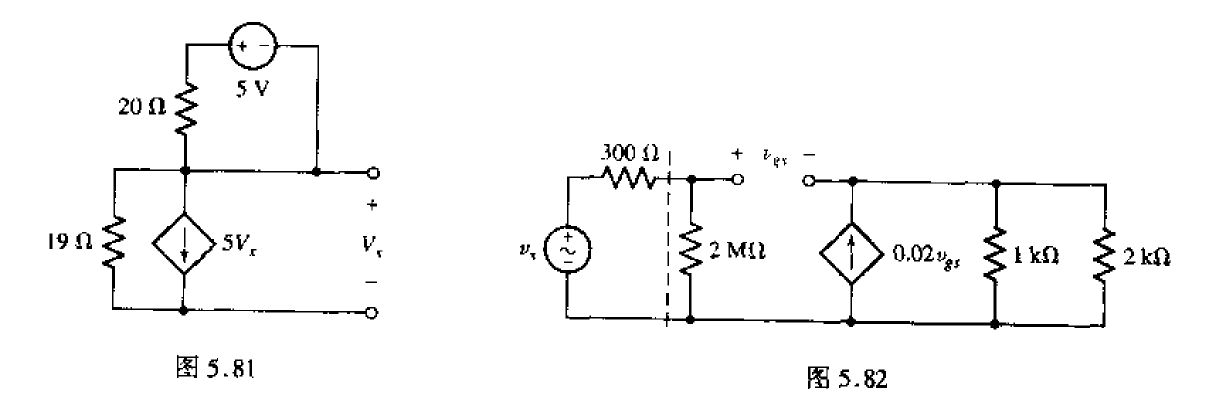


图 5.81

图 5.82

43. 求图 5.82 电路中 2 kΩ 电阻所看到的戴维南等效电阻。忽略图中虚线。

44. 参考图 5.82 电路，确定虚线右边电路的戴维南等效电阻。这个电路是共源晶体管放大器，所计算的是它的输入电阻。

45. 参考图 5.83 电路，确定虚线右边电路的戴维南等效电阻。这个电路是共发射极晶体管放大器，所计算的是它的输入电阻。

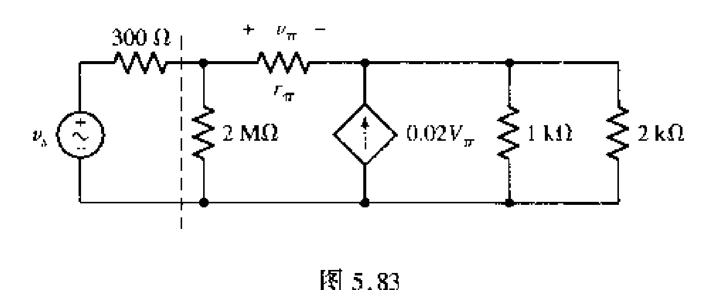


图 5.83

46. 假定可以确定家用交流电源的戴维南等效电阻，为什么烤面包机、微波炉和电视机的生产商不将各种设备的戴维南等效电阻与电源戴维南等效电阻相匹配？不允许从发电厂到家用电器的最大功率传输吗？

47. 如果在图 5.84 电路中 R_l 可取任意值，那么 R_l 上消耗的最大功率是多少？

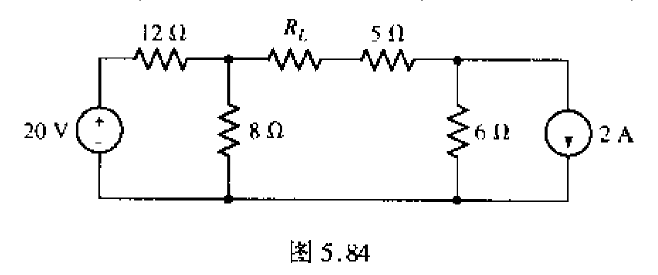


图 5.84

48. (a)求图 5.85 所示网络在端点 a 和 b 的戴维南等效电路。如果连接到 a 和 b 的电阻 R_{ab} 等于(b)50 Ω；(c)12.5 Ω，提供给 R_{ab} 的功率是多少？

49. (a)确定图 5.86 所示网络的戴维南等效电路；(b)求从该网络所能取出的最大功率。

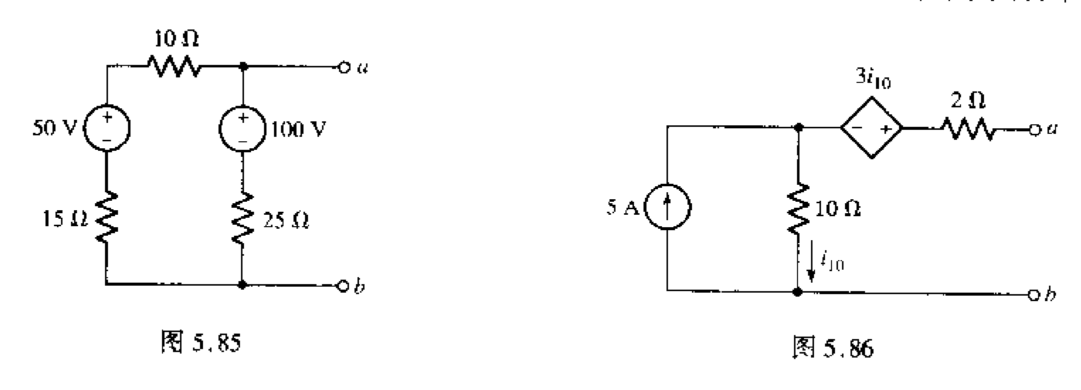


图 5.85　　图 5.86

50. 参考图 5.87 电路，(a)确定最大功率传输所对应的 R_l 值；(b)然后计算 R_L 上的电压("+"号在上)。

51. 某一实际直流电压源在瞬时短路时可以提供 2.5 A 电流，且可以向 20 Ω 负载提供 80 W功率。求(a)开路电压；(b)对于最佳选择的 R_L 所能提供的最大功率；(c)这时 R_L 的值为多少？

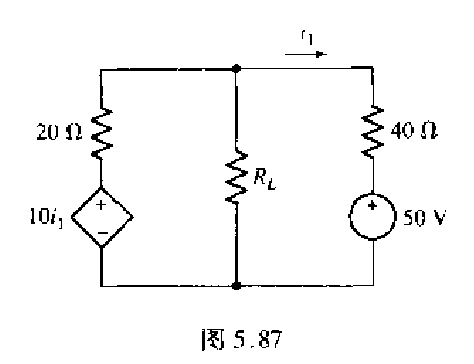


图 5.87

52. 一个实际电流源向 250 Ω 负载提供 10 W，向 80 Ω 负载提供 20 W 功率。如果连接负载电阻为 R_L，则相应电压为 v_L，电流为 i_L。如果(a) $v_L i_L$ 为最大值；(b) v_L 为最大值；(c) i_L 为最大值，求 R_L，v_L 和 i_L 的值。

53. 某电池在感兴趣的电流范围内可以用 9 V 独立电源串联 1.2 Ω 电阻精确模拟。当电池连接无穷大负载电阻时，没有电流。还知道，外接电阻为 1.2 Ω 时，传递给它的功率最大，对于 1.1 Ω 或 1.3 Ω 电阻提供的功率都较小。可是如果短接电池两端（不推荐），所得电流比 1.2 Ω 电阻时大得多。这与前面导出的最大功率传输原理矛盾吗（不管怎么说，功率应正比于 i^2）？请解释。

54. 图 5.88 电路是音频放大器的一部分。如果想传输最大功率给 8 Ω 扬声器，所需 R_E 是多大？用 PSpice 证实你的答案。

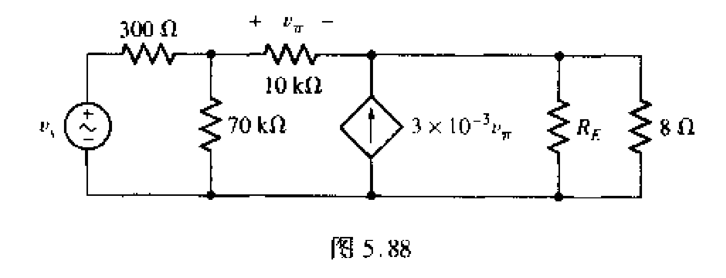


图 5.88

55. 图 5.89 所示电路是一个两级电路。选择 R_1 使第一级传给第二级的功率最大。

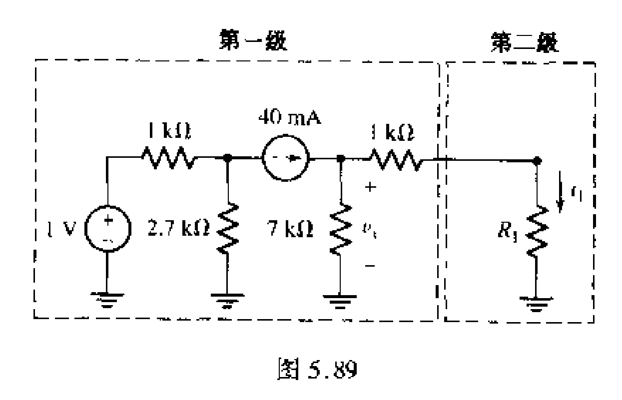


图 5.89

56. 转换图 5.90 的网络为 Y 形网络。

57. 转换图 5.91 的网络为 Δ 形网络。



图 5.90 图 5.91

58.求图 5.92 所示网络的 R_{in}。

59.利用 Y-Δ 和 Δ-Y 转换求图 5.93 所示网络的输入电阻。

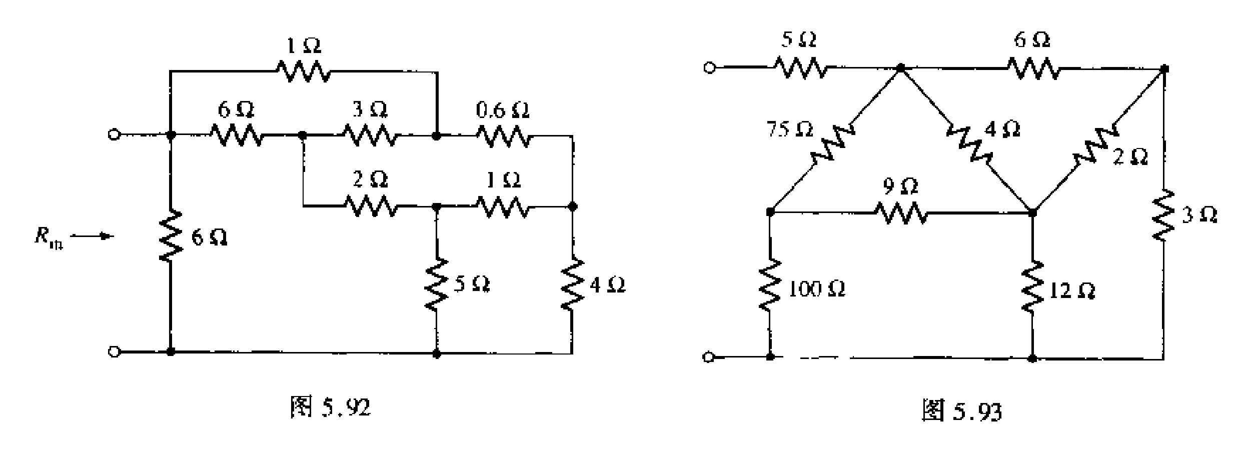


图 5.92 图 5.93

60.求图 5.94 电路的 R_{in}。

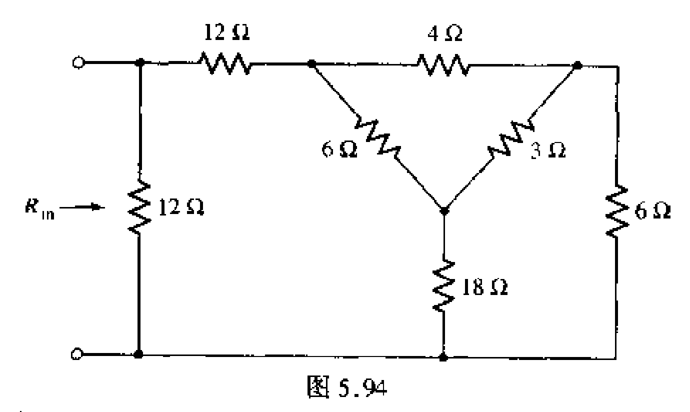
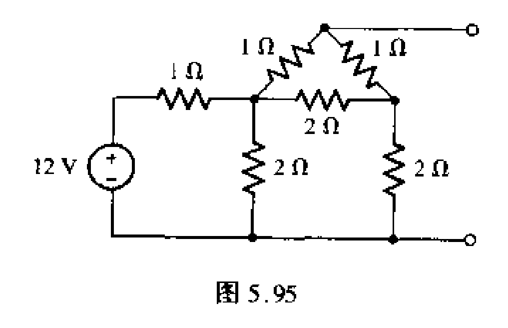


图 5.94

61.求图 5.95 电路的戴维南等效电路。

62.求图 5.96 电路的诺顿等效电路。



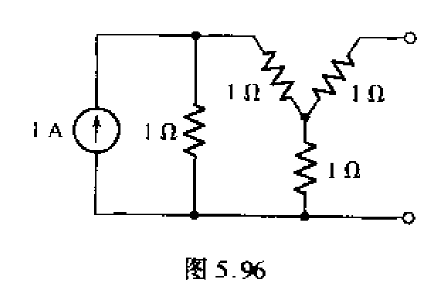


图 5.95 图 5.96

63. 如果图 5.97 中所有电阻均为 10 Ω，确定电路的戴维南等效电路。

64.（a）用等效三电阻 Y 型网络替换图 5.98 中的网络；（b）进行 PSpice 分析，证实你的答案真的是等效的（提示：增加一个负载电阻）。

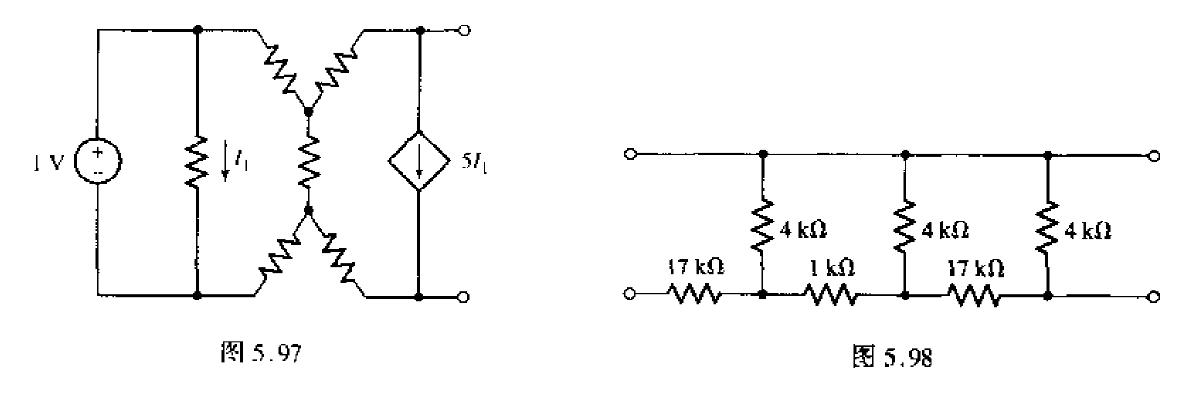


图 5.97　　图 5.98

65.（a）用等效三电阻 Δ 型网络替换图 5.99 中的网络；（b）进行 PSpice 分析，证实你的答案真的是等效的（提示：增加一个负载电阻）。

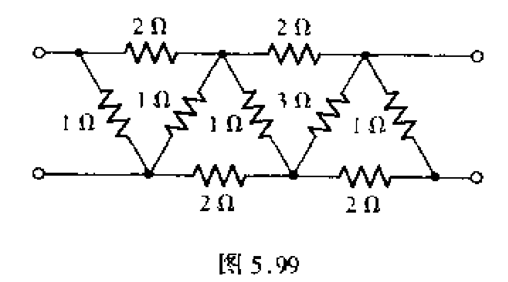


图 5.99

66. 图 5.100 所示电路是工作在正向有源区的双极型晶体管精确模型。确定集电极电流 I_C，用 PSpice 证实你的答案。

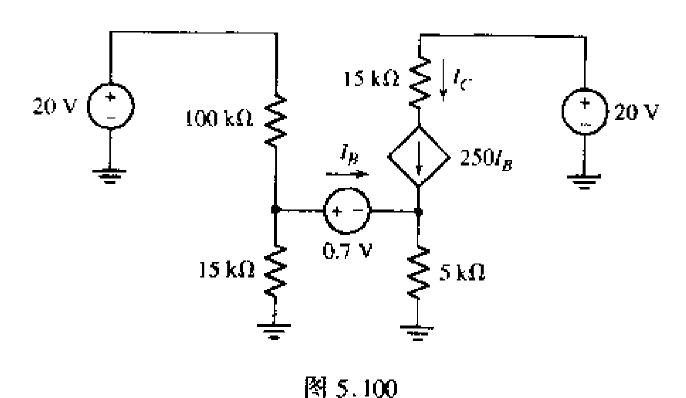


图 5.100

67. 图 5.101 中负载电阻能安全承受 1 W 功率而不致过热和烧坏。在电流小于 1 A 情况下指示灯可当做一个 10.6 Ω 电阻对待；电流大于 1 A 时可当做一个 15 Ω 电阻对待。最大允许电流 I_S 是多少？用 PSpice 证实你的结论。

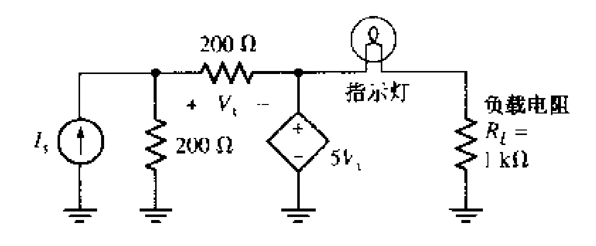


图 5.101 指示灯、负载电阻

68. 人耳可以探测的声波频率范围在 20 Hz 到 20 kHz。如果图 5.102 中每个 8 Ω 电阻都是扬声器，哪个信号发生器(用实际电压源表示)产生最大声音(假定"声响"与提供给扬声器的功率成正比)？注意，因为每个信号源工作于不同频率，这时可以应用功率叠加。

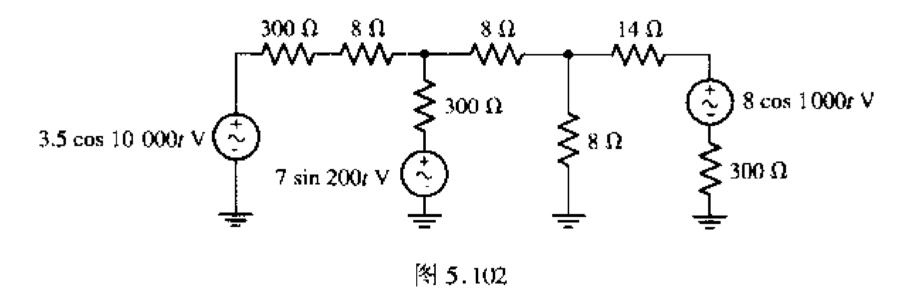


图 5.102

69. 如图 5.103 所示，一个 DMM 接到电阻电路上，如果 DMM 的输入阻抗为 1 MΩ，且 DMM 接成电阻测量方式，其显示值是多少？

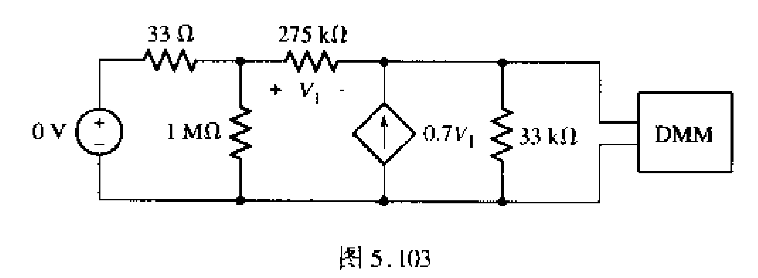


图 5.103

70. 从印第安纳州郊区发现的一颗陨星中提取出一种金属物质。这种物质的电阻率为 50 Ω/cm，用它制成简单圆柱体。圆柱体连接到图 5.104 的电路，发现它具有温度关系 $T = 200P^{0.25}$ ℃，其中 P 为提供给圆柱体的功率(单位：W)。有趣的是，这种物质的电阻率似乎与温度无关。如果 $R = 10\ \Omega$，并从所示电路吸收最大功率，圆柱体的温度是多少？

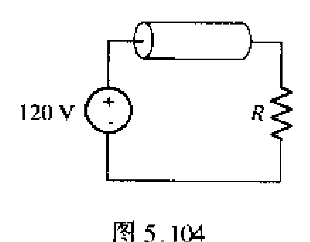


图 5.104

71. 作为保安系统的一部分，一段非常细的 100 Ω 导线用不导电环氧树脂接到窗户上。给定一个盒子，内装 12 个可充电 1.5 V AAA 电池，1 000 个 1 Ω 电阻和一个 2 900 Hz 压电

蜂鸣器。蜂鸣器在 6 V 下取出 15 mA 电流。设计一个电路，当窗户打破(细电线当然也被弄断)时使蜂鸣器启动。注意，蜂鸣器工作至少需要 6 V(最大 28 V)直流电压。

72. 三个 45 W 灯泡原来接成 Y 形网络，每一端口接有 120 V 交流电压，现将它重新接成 Δ 形网络。未使用中线连接。如果每一灯泡的亮度正比于它得到的功率，设计一个新的 120 V 交流电源电路，使三个灯泡在 Δ 接法下，与 Y 形接法时具有相同的亮度。用 PSpice 将电路中每个灯泡得到的功率(用适当阻值的电阻模拟灯泡)与原来 Y 形接法时每个灯泡的功率相比较，以证实你的设计

73. 某一红色发光二极管额定最大电流为 35 mA，如果超过此值将会发生过热并导致严重损坏。发光管的电阻是其电流的非线性函数，但是制造者保证最小电阻为 47 Ω 和最大电阻为 117 Ω。可用的驱动电源只有 9 V 电池。设计一个合适电路在不损坏发光管的条件下，为它提供最大功率。只允许使用标准电阻值的组合。

第6章　运算放大器

本章要点:

- 在电路分析中运用理想运放规定的能力
- 掌握反相和同相运算放大电路
- 掌握运放主要的非理想特性
- 熟悉实际使用运放时要考虑的问题

6.1　引言

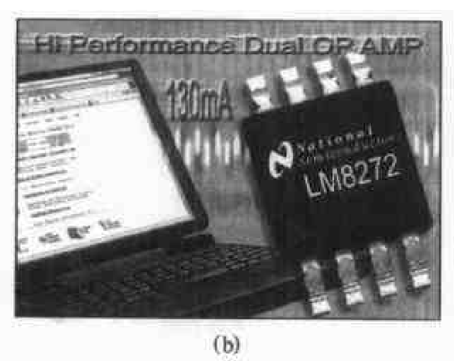
前面已经学习了足够的基本原理和分析方法,现在将它们运用到一些有趣的实际电路中去。本章将分析一种非常有用的电子器件,称为运算放大器(Operational Amplifier),或简称为运放(Op Amp)。

6.2　背景

最早的运算放大器出现于20世纪40年代[见图6.1(a)],它使用真空管,用电子方式来完成加、减、乘、除、微分和积分的数学运算。它的出现使得可以使用早期的模拟计算机来完成微分方程的求解。现代运放的制造采用了集成电路技术,使得体积相当小,更加可靠和消耗功率更少。



(a)



(b)



(c)

图6.1　(a)大约在20世纪40年代的真空管运算放大器;(b)LM8272双运算放大器;(c)LMC6035运算放大器,它在一个管壳中封装了114个晶体管,并且其封装非常小

买一个运放可能只需要20美分,这样的运放含有一块集成电路(IC)芯片,它包含大约25个晶体管和12个电阻,所有的这些元件都包含在一个小小的封装中,里面含有5个或更多个用于连接外部电路的管脚,如图6.1(b)和图6.1(c)所示;有些集成电路含有多个运放。除输出管脚和两个输入管脚以外,其他管脚用于给里面的晶体管提供电源,或用于外部调整以对运放进行平衡或者补偿。通常使用的运放符号如图6.2(a)所示。这里并不关心运放的内部电路即集成电路,只关心存在于输入和输出端之间的电流和电压关系。因此,下面将暂时使用图

6.2(b)所示的简化的电气符号。左边是两个输入端,右边是单个的输出端。标有"+"的端称为同相输入端,标有"-"的端称为反相输入端。

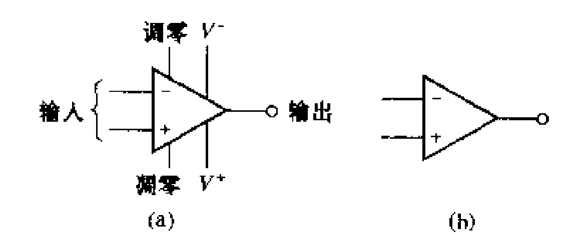


图 6.2　(a)运放的电气符号;(b)运放所需的最少连接

6.3　理想运放

在设计一个运放时,集成电路工程师通常很努力地要保证该器件具有接近理想的特性。在实际应用中,大多数运放的运行性能都很好,于是通常假定运放为理想的。理想运放的特性构成了以下两个基本规定的基础,这些规定看起来可能有些特别。

理想运放规定:

1. 没有任何电流流入两个输入端。
2. 两个输入端之间没有电压差。

在实际运放中,存在一个非常小的漏泄电流流入输入端(有时仅有 40 fA),同样地,在两个输入端之间也可能存在一个非常小的电压。只是,与大多数电路中的其他电压和电流相比,它们是如此的小,以至于如果不包括它们也不会显著地影响最后的计算结果。

分析运放电路时,还需要记住一点,运放的输出总是依赖于其输入方式,这和前面研究过的电路不同。因此,分析运放电路的目标是得到用输入量表示的输出表达式。通常从输入开始进行运放电路的分析,下面将看到这是分析运放电路的一种好方法。

图 6.3 所示电路为一个反相放大器,下面采用 KVL,从输入电压源开始分析这个电路。

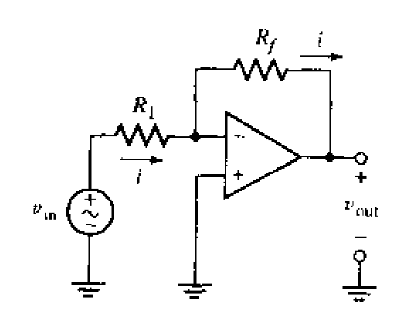


图 6.3　由运放构成的反相放大电路,其中 $v_{in} = 5 \sin 3t$ mV, $R_1 = 4.7\ \text{k}\Omega$, $R_f = 47\ \text{k}\Omega$

根据理想运放规定 1 可知,没有电流流入反相输入端,电流 i 只流过两个电阻 R_1 和 R_f,于是可以写出:

$$-v_{in} + R_1 i + R_f i + v_{out} = 0$$

它可以整理成将输出和输入联系起来的方程：

$$v_{out} = v_{in} - (R_1 + R_f)i \tag{6.1}$$

但是，由于只已知 $v_{in} = 5 \sin 3t$ mV，$R_1 = 4.7$ kΩ 和 $R_f = 47$ kΩ，所以只得到了一个方程，却含有两个未知量。因此，为计算出输出电压，还需要一个额外的方程，它把 i 用 v_{out}，v_{in}，R_1 和 R_f 表示出来。

这时注意到，还没有使用理想运放的规定 2。因为同相输入接地，所以其电压为零，因此，根据理想运放规定 2，反相输入电压也为零。但这并不意味着两个输入是短接的，而且要注意不要试图做这样的假定。事实上，更确切地说，这两个输入电压仅仅是互相跟随的。于是可以写出另外一个 KVL 方程：

$$-v_{in} + R_1 i + 0 = 0$$

或

$$i = \frac{v_{in}}{R_1} \tag{6.2}$$

联立方程(6.2)和方程(6.1)，就可以得到以 v_{in} 表示的 v_{out} 的表达式：

$$v_{out} = -\frac{R_f}{R_1} v_{in} \tag{6.3}$$

代入 $v_{in} = 5 \sin 3t$ mV，$R_1 = 4.7$ kΩ 和 $R_f = 47$ kΩ：

$$v_{out} = -50 \sin 3t \text{ mV}$$

事实上，在这种类型的电路图中，反相输入端的电压为零就是通常所说的“虚地”。但它并不意味着该管脚是地，这有时会让学生感到困惑。运放通过内部的一些必要的调整来消除两个输入端之间的电压差，这两个输入端并不是物理上短接在一起。

因为给出 $R_f > R_1$，所以该电路放大了输入电压信号 v_{in}。如果选取 $R_f < R_1$，那么输入信号反而将被削弱。还可以注意到，输出电压和输入电压的符号相反[①]，因此该电路称为“反相放大器”。输出波形如图 6.4 所示，作为比较，同时画出了输入的波形。

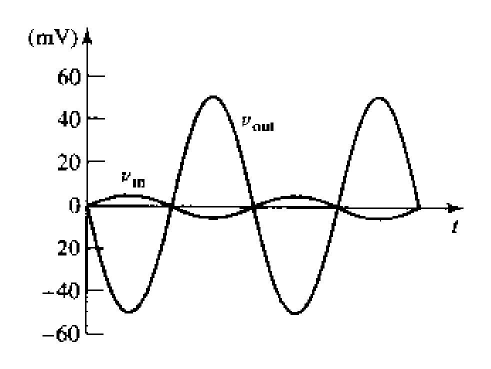


图 6.4 反相放大器电路的输入和输出波形

这里需要指出的是，理想运放看起来是违背 KCL 的。具体地说，对于上面的电路，如果在两个输入端没有电流流入和流出，那么电流如何能流到输出的管脚呢！这将意味着运放可以以某种方式在某个地方产生电子，或者是永久地储存它们(这取决于电流的流动方向)。很显

① 或者说，输出和输入相差 180°的相位，这样说更令人印象深刻。

然，这些都是不可能的，导致这样的矛盾是由于把运放与无源元件(例如电阻)同样对待。事实上，只有连到外部电源中运放才能工作，正是通过这些电源，才能够确定输出端上的电流方向。

例题 6.1　如图 6.5(a)所示的同相放大器，画出输出波形的草图，设 $v_{in} = 5 \sin 3t$ mV，$R_1 = 4.7$ kΩ 和 $R_f = 47$ kΩ

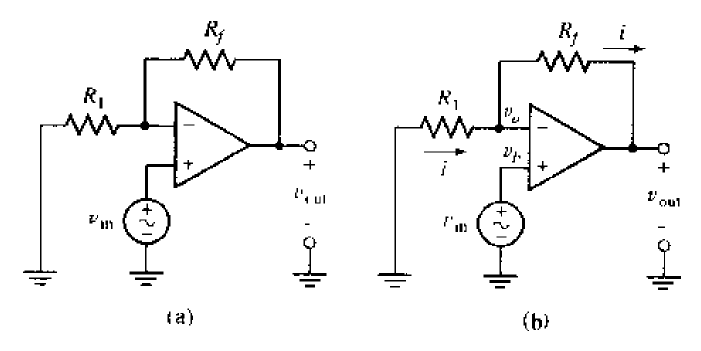


图 6.5　(a)使用同相放大器结构的运放电路；(b)标出了流过 R_1 和 R_f 的电流 i 以及输入电压 v_{in} 和输出电压 v_{out}

- 弄清问题的目标：

  需要求出 v_{out} 的表达式，它只用已知量 v_{in}，R_1 和 R_f 表示出来。

- 收集已知信息：

  因为已知各电阻的大小和输入信号波形，所以第一步标出电流 i 和两个输入电压，如图 6.5(b)所示，并假定运放为理想运放。

- 选择最适合问题的已有方法：

  尽管学生们都喜欢用网孔分析，但后面将看到，对于大多数运放电路，采用节点分析更好一些，因为没有直接的方法来确定流出运放输出端的电流大小。

- 建立适当的方程组：

  注意到，定义流过两个电阻的电流相同意味着使用了理想运放规定 1，因为没有电流流入反相输入端。然后利用节点分析方法来求以 v_{in} 表示的 v_{out} 的表达式，于是得到，

  对节点 a：

$$0 = \frac{v_a}{R_1} + \frac{v_a - v_{out}}{R_f} \tag{6.4}$$

  对节点 b：

$$v_b = v_{in} \tag{6.5}$$

- 确定是否还需其他信息：

  例题的目标是得到一个将输入和输出电压联系起来的表达式，而方程(6.4)和方程(6.5)看起来都不是这样的表达式。不过，此时还没有用到理想运放规定 2，并且后面将看到，几乎在每个运放电路的分析中，为得到这样的表达式，两个规定都需要用到。

  利用理想运放规定 2，注意到 $v_a = v_b = v_{in}$，这时方程(6.4)变为：

$$0 = \frac{v_{in}}{R_1} + \frac{v_{in} - v_{out}}{R_f}$$

- 试解：

重新整理上式，就得到用输入电压 v_{in} 表示的输出电压的表达式：

$$v_{out} = \left(1 + \frac{R_f}{R_1}\right) v_{in} = 11 v_{in} = 55 \sin 3t \text{ mV}$$

● 证实所得解是否合理和满足要求：

输出波形如图 6.6 所示，为了便于比较，同时画出了输入波形。对照反相放大电路的输出波形，可以看到，同相放大电路中输入和输出是同相的。不应该完全没有意料到这点，因为从它的名称"同相放大器"就可以知道。要注意的是，该电路不改变波形的频率，只改变波形的幅度。

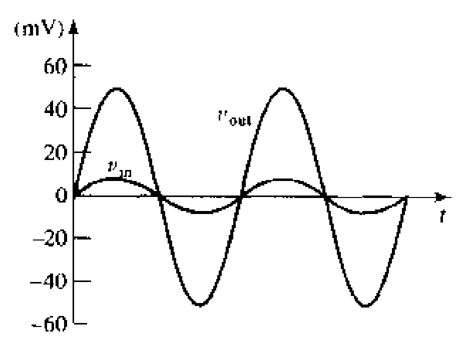


图 6.6 同相放大电路的输入波形和输出波形

练习

6.1 求出如图 6.7 所示电路中以 v_{in} 表示的 v_{out} 的表达式。

答案：$v_{out} = v_{in}$。这个电路称为电压跟随器，因为输出电压跟踪或者说跟随输出电压

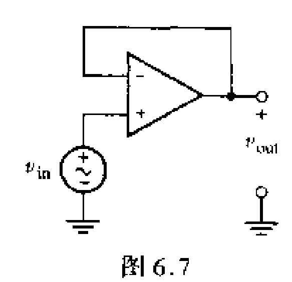


图 6.7

例题 6.2 如图 6.8 所示运放电路，它也称为求和放大器，求出以 v_1，v_2 和 v_3 表示的 v_{out} 的表达式

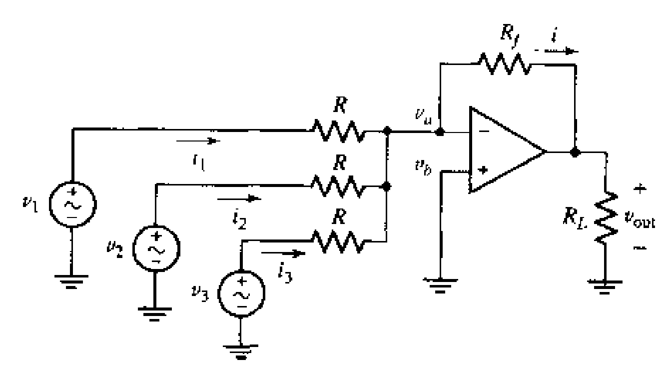


图 6.8 具有三个输入端的基本求和电路

再次注意到，该电路与图6.3所示的反相放大电路相似，目标都是求出 v_{out}（在这里该电压是接在负载电阻 R_L 两端）以输入（在这里是 v_1，v_2 和 v_3）表示的表达式。

既然没有电流从反相输入端流入，那么可以知道：

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

由此可以对节点 v_a 写出以下的方程：

$$0 = \frac{v_a - v_{out}}{R_f} + \frac{v_a - v_1}{R} + \frac{v_a - v_2}{R} + \frac{v_a - v_3}{R}.$$

该方程同时包含了 v_{out} 和输入电压，但是遗憾的是它还包含了节点电压 v_a。为了消去这个未知量，还需要写出另一个把 v_a 与 v_{out}、输入电压、R_f 及 R 联系起来的方程。在这时，想起还没有使用理想运放规定2，而当分析运放电路的时候差不多都需要运用这两个规定。因此，既然 $v_a = v_b = 0$，那么可以得到：

$$0 = \frac{v_{out}}{R_f} + \frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{R} + \frac{v_3}{R}$$

重新整理，就得到下面 v_{out} 的表达式：

$$v_{out} = -\frac{R_f}{R}(v_1 + v_2 + v_3)$$

从这个结果可以看到几种有趣的情况。首先，如果选取 $R_f = R$，那么输出是负的 v_1，v_2 和 v_3 的和；或者如果选取 $R_f > R$，就可以对它们的和进行放大。

而且，注意到 R_L 并没有出现在最后的表达式中。因此，在任何情况下，只要 R_L 不是短路，它就不会影响该电路的运行。该电阻表示接在放大器输出端的任何电路的戴维南等效电阻。如果输出端所接的设备为电压表，那么 R_L 表示往电压表两端看进去的戴维南等效（典型值为10 MΩ或更大）。或者，输出端所接的设备可能是扬声器（通常为8 Ω），这种情况下可以听到三个声音的叠加，这时 v_1，v_2 和 v_3 可能分别代表三个麦克风。

需要注意的是，在图6.8中，通常会假定电流 i 不仅流过 R_f，还流过 R_L。这并不正确！因为它很可能还流入运放的输出端，所以流过两个电阻的电流是不同的。正是因为这个原因，分析电路时总是设法避免在运放的输出管脚处应用KCL。因为运放输出端的输出电流未知，所以在大多数运放电流分析中节点分析优于网孔分析。

练习

6.2 如图6.9所示电路，它也称为差分放大器，求出以 v_1 和 v_2 表示的 v_{out} 的表达式。

答案：$v_{out} = v_2 - v_1$（提示：用分压原理求出 v_b）

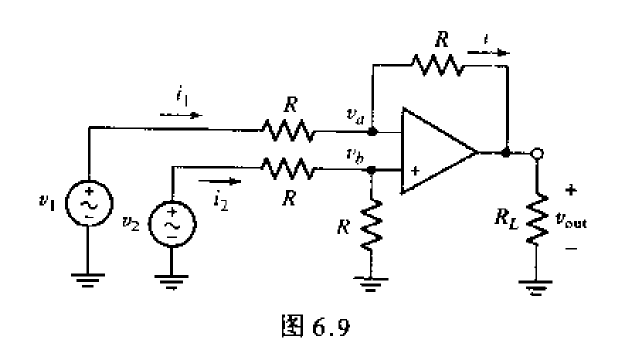


图6.9

实际应用

光纤对讲机系统

点到点的对讲系统可以用几种不同的方法来实现,这取决于系统应用的环境。低功耗的射频(Radio Frequency,RF)系统虽然工作得非常好,但是容易受到其他射频信号的干扰,而且容易被窃听。简单地使用导线将麦克风与扬声器(通过适当的放大电路)连接起来可以消除许多RF干扰,并增强了保密性。但是,导线容易腐蚀,而且当导线外面的塑料绝缘层磨损的时候容易造成短路,并且对于飞机及其相关的应用,导线的重量是个需要考虑的问题。

另一种方法是先把从麦克风产生的电信号转为光信号,让光信号通过一根细小(直径约50 μm)的光纤进行传输后,再将光信号转变回电信号,并经过放大后传送到扬声器中。图6.10给出了这个系统的原理框图,图中的两个系统要求双向通信。

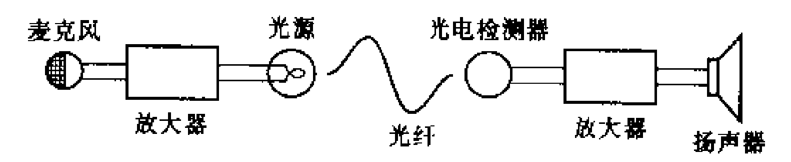


图6.10 简单光纤对讲系统的单向原理框图

下面将分别讨论光信号的产生和检测,因为这两个电路实际上是电气独立的。图6.11显示了信号产生电路,包括一个麦克风,一个发光二极管(LED)和一个用来驱动LED的同相运放电路。从例题6.1可以知道,同相运放电路的电压增益与LED的电阻无关,给出为:

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = 1 + \frac{R_f}{R_1}$$

通过简单的估算可知,当一个人采用正常语调说话时,该麦克风的最大输出电压为40 mV。根据LED的制造参数可知,LED两端的额定电压为1.6 V。为了给更大的噪声和更高的麦克风输出留有裕度,选取增益为$1.5/40\times10^{-3}$。选取$R_1 = 10\ \text{k}\Omega$,那么得到所需的$R_f = 365\ \text{k}\Omega$。

在把LED输出耦合到光纤后,从光电探测器可以检测到一个最大幅度约为10 mV的信号。采用图6.12所示的电路来放大从光电探测器检测到的信号,使得有足够大的功率来驱动扬声器。

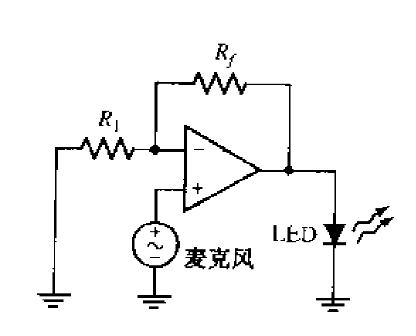


图6.11 用于将从麦克风输出的电信号转换为光信号的电路(提示:可以用收音机或CD播放器的输出代替图中的麦克风来进行测试)

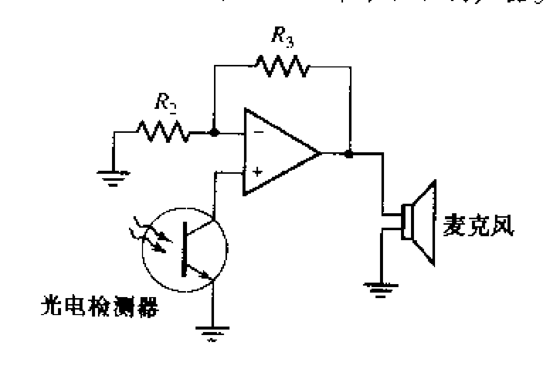


图6.12 将光信号转换为音频信号的检测电路(提示:可以用收音机或CD播放器的输出代替图中的光电检测器来进行测试)

扬声器的额定功率为 100 mW,等效电阻为 8Ω,这样,可以求得最大的电压为 894 mV,所以放大器的增益应该设计为 894/10 = 89.4。选取 $R_2 = 10\,k\Omega$,则需要取 $R_1 = 884\,\Omega$,这样就完成了放大器的设计。尽管由于 LED 的非线性而使输出的声音有些失真,但在实际中这个电路还是能工作的。这里将改进的设计留给后续的电路设计高级课程。

6.4　运放的级联

尽管运放的功能很多,但在许多应用中,只使用一个运放并不够。在这种情况下,通常可以把单独的几个运放级联起来以满足应用的要求。图 6.13 给出了这样的一个例子,它由一个图 6.13 所示的求和放大电路(只有两个输入端)和一个简单的反相放大器组成。

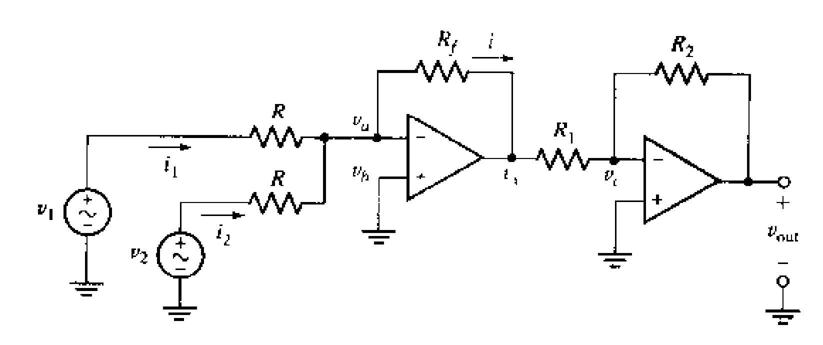


图 6.13　一个两级运放电路,它由一个求和放大器级联一个反相放大器组成

前面已经分别分析过了这两种类型的运放电路,根据以前的结果,假如两个运放电路相互不连接,那么:

$$v_x = -\frac{R_f}{R}(v_1 + v_2) \tag{6.6}$$

和

$$v_{out} = -\frac{R_2}{R_1}v_x \tag{6.7}$$

分析级联电路时,从最后一级出发往回分析、直到输入级有时要容易一些。根据理想运放规定 1,流过 R_1 和 R_2 的电流相同。对节点 v_c 写出节点方程得:

$$0 = \frac{v_c - v_x}{R_1} + \frac{v_c - v_{out}}{R_2} \tag{6.8}$$

利用理想运放规定 2,在方程(6.8)中,令 $v_c = 0$,可以得到:

$$0 = \frac{v_x}{R_1} + \frac{v_{out}}{R_2} \tag{6.9}$$

因为例题的目标是求出 v_{out} 以 v_1 和 v_2 表示的表达式,于是回到第一个运放,设法得到 v_x 以两个输入量表示的表达式。

对第一个运放的反相输入应用运放规定 1:

$$0 = \frac{v_a - v_x}{R_f} + \frac{v_a - v_1}{R} + \frac{v_a - v_2}{R} \tag{6.10}$$

因为 $v_a = v_b = 0$,所以根据理想运放规定 2,可以把方程(6.10)中的 v_a 替换为 0,方程(6.10)成

为：

$$0 = \frac{v_x}{R_f} + \frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{R} \tag{6.11}$$

现在已经得到了一个以 v_x 表示的 v_{out} 的方程式[方程(6.9)]，以及一个以 v_1 和 v_2 表示的 v_x 的方程式[方程(6.11)]，这些方程分别与方程(6.7)和方程(6.6)相同，这表明如图 6.13 所示将两个分立运放电路级联起来，不会影响各级的输入－输出关系。联立方程(6.6)和方程(6.7)，或者方程(6.10)和方程(6.11)，就得到级联运放电路的输入－输出关系为：

$$v_{out} = \frac{R_2}{R_1}\frac{R_f}{R}(v_1 + v_2)$$

因此，级联电路表现为一个求和放大器，但是输入和输出没有相位反转。通过仔细选取电阻值，可以对两个输入电压的和进行放大或者衰减。如果选取 $R_2 = R_1$ 和 $R_f = R$，那么同样可以实现 $v_{out} = v_1 + v_2$ 的放大电路。

6.5 运放的更详细模型

从根本上说，可以将运放看成压控电压源，其中，运放的输出由受控电压源提供，而受控电压源的控制电压为输入端两端的电压。图 6.14 给出了一个合理的实际运放模型的原理框图，它含有一个电压增益为 A，输出电阻为 R_o，输入电阻为 R_i 的受控源。表 6.1 给出了几种常见运放的典型参数值。

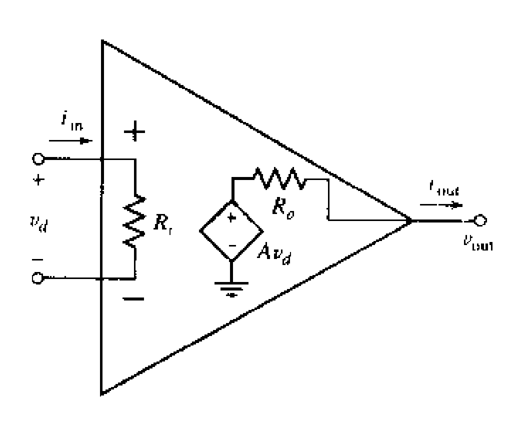


图 6.14 运放的更详细模型

参数 A 称为运放的开环电压增益，典型的范围为 $10^5 \sim 10^6$。注意到，表 6.1 列出的所有运放都具有非常大的开环电压增益，尤其与例题 6.1 中的同相放大电路的电压增益 11 相比较时更是如此。要记住运放本身的开环电压增益和特定运放电路的闭环电压增益之间的区分。本例中的回路指的是在输出管脚和反相输入管脚之间的外部电路，可以是一段导线，一个电阻，或者是其他元件，这取决于不同的实际应用。

μA741 是一种很常见的运放，20 世纪 60 年代由仙童(Fairchild)公司首先制造出来。它的特性参数如下：开环电压增益为 200 000，输入电阻为 2 MΩ，输出电阻为 75 Ω。为分析理想运放模型对实际器件的特性的近似程度，下面重新来看一下图 6.3 中所示的反相放大电路。

表6.1 几种不同运放的典型参数值

型 号	μA741	LM324	LF411	AD549K	AD515A
说明	一般用途	低功耗 四运放封装	低失调、低漂移 JFET输入	超低输入偏置电流	精密低功耗输入
开环增益 A	2×10^5 V/V	10^5 V/V	2×10^5 V/V	10^6 V/V	2×10^4 V/V
输入电阻	2 MΩ	—	1 TΩ	10 TΩ	10 TΩ
输出电阻	75 Ω	—	~1 Ω	~15 Ω	~15 Ω
输入偏置电流	80 nA	45 nA	50 pA	75 fA	300 fA(max)
输入失调电压	1.0 mV	2.0 mV	0.8 mV	0.15 mV	0.4 mV
PSpice模型*	✓	✓	✓		

* 表示PSpice的学生试用版9.1包含了这种器件。

例题6.3 对图6.14所示的μA741运放模型，使用恰当的参数，分析如图6.3所示的反相放大电路

首先，把图6.3中代表理想运放符号用本节所述的更详细模型表示，得到如图6.15所示的电路。

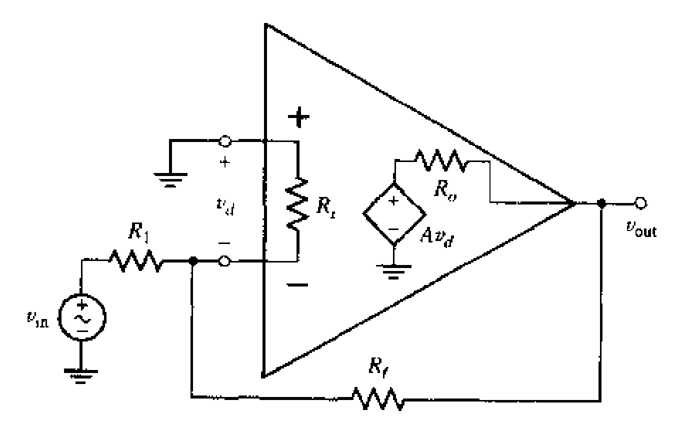


图6.15 使用更详细的运放模型后重画的反相放大电路

注意，这里不能再使用理想运放规定，因为这时并没有使用理想运放模型。因此，列出两个节点方程：

$$0=\frac{-v_d-v_{in}}{R_1}+\frac{-v_d-v_{out}}{R_f}+\frac{-v_d}{R_i}$$

$$0=\frac{v_{out}+v_d}{R_f}+\frac{v_{out}-Av_d}{R_o}$$

进行一些直接但有些繁琐的代数运算后，可以消去 v_d，联立上面两个方程，可以得到下面以 v_{in} 表示的 v_{out} 的表达式：

$$v_{out}=\left[\frac{(R_o+R_f)}{R_o-AR_f}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_f}+\frac{1}{R_i}\right)-\frac{1}{R_f}\right]^{-1}\frac{v_{in}}{R_1} \tag{6.12}$$

代入 $v_{in}=5\sin 3t$ mV, $R_1=4.7$ kΩ, $R_f=47$ kΩ, $R_o=75$ Ω, $R_i=2$ MΩ 和 $A=2\times10^5$，得到：

$$v_{out}=-9.999\,448v_{in}=-49.997\,24\sin 3t \text{ mV}$$

把上面的结果与采用理想运放模型得到的表达式相比较（$v_{out}=-10v_{in}=-50\sin 3t$ mV），可以看到，理想运放是一个相当精确的模型。而且采用理想运放模型后，极大地简化了电路分析中的代数运算。注意到，如果允许 $A\to\infty$，$R_o\to0$，$R_i\to\infty$，那么方程(6.12)就成为采用理想运放模型时所得到的结果。

练习

6.3 设运放开环增益 A 和输入电阻 R_i 为有限值，输出电阻 R_o 为零。对于图 6.3 中的运放，给出用 v_{in} 表示的 v_{out} 的表达式。

答案： $v_{out}/v_{in}=AR_fR_i(R_fR_i+R_1R_i+R_1R_f-AR_1R_i)$

6.5.1 理想运放规定的推导

前面已经看到，理想运放模型对于实际器件特性的近似非常精确。事实上，使用上面的有限开环增益，有限输入电阻和非零输出电阻的更详细模型，可以直接推导出前面的两个理想运放规定。

参看图 6.14，实际运放开环电路的输出电压可以表示为：

$$v_{out}=Av_d \tag{6.13}$$

重新整理该方程，可得到 v_d，它有时被称为差分输入电压，可以写成：

$$v_d=\frac{v_{out}}{A} \tag{6.14}$$

应该想到，实际运放的输出电压 v_{out} 的幅度应该有一个限制。下一节将说明必须给运放提供一个外部直流电压，以给内部的电路提供电源。这个外部电压就表示了 v_{out} 的最大幅度，其典型值为 5 V～24 V。如果用 μA741 的开环增益 2×10^5 除以 24 V，就得到 $v_d=120$ μV。尽管它不为零，但是和输出电压 24 V 相比较，这么小的值实际上可以视为零。理想运放具有无穷大的开环增益，所以无论 v_{out} 有多大，总有 $v_d=0$，由此可以得出理想运放规定 2。

理想运放规定 1 表述为："没有任何电流流入两个输入端"，下面来推导它。参看图 6.14，运放的输入电流为：

$$i_{in}=\frac{v_d}{R_i}$$

前面已经知道，通常情况下，v_d 是一个非常小的电压。从表 6.1 可以看到，典型运放的输入电阻非常大，从 MΩ 甚至到 TΩ！代入 $v_d=120$ μV 和 $R_i=2$ MΩ，可计算出输入电流为 60 pA，这是一个非常小的电流，需要用专门的电流表（称为皮安培表）来测量它。从表 6.1 可以看到，μA741 的典型输入电流（更确切的术语是输入偏置电流）只有 80 nA，与典型运放电路中的其他电流相比，可以将该电流视为零，现代运放（例如 AD549）甚至具有更小的输入偏置电流。因此，可以得出结论，理想运放规定 1 是非常合理的假定。

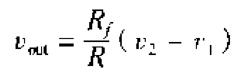
从前面的讨论可以很清楚地看到理想运放具有无限大的开环增益和无限大的输入电阻，却还没有考虑运放的输出电阻，而它往往对实际的电路产生影响。参看图 6.14，可以看到：

$$v_{out} = Av_d - R_o i_{out}$$

因此，非零的 R_o 值使得输出电压变小了，随着输出电流的增大，其影响将更为明显，所以，理想运放规定输出电阻为零。μA741 的最大输出电阻为 75 Ω，而许多现代运放（例如 AD549 和 AD515A）甚至具有更小的输出电阻。

6.5.2 共模抑制

运放有时称为差分放大器，因为输出与两个输入端之间电压差成正比。这就是说，如果把相同的电压接到两个输入端，那么输出电压将为零。运放的这种能力是它吸引人的特性之一，称为共模抑制。图 6.16 所示电路的输出电压为：



$$v_{out} = \frac{R_f}{R}(v_2 - v_1)$$

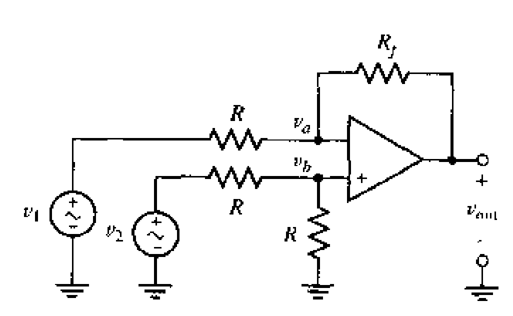


图 6.16　由运放组成的差分放大器

假定 $R_f = 10\ \text{k}\Omega$ 和 $R = 1\ \text{k}\Omega$，那么该放大电路的电压增益为 10。如果 $v_1 = 2 + 0.3\sin 3t$ V 和 $v_2 = 2$ V，那么其输出将为 $3\sin 3t$ V。v_1 和 v_2 之间共有的 2 V 部分将不被放大。

6.5.3 负反馈

前面已经知道，运放的开环增益非常大，理想情况下为无限大。但是，在实际的情况下，它的值与制造商给出的典型值会有所不同。例如，温度对于运放性能有几方面明显的影响，所以，在 -20℃的天气时运放的特性与在阳光充足的温暖天气时的特性可能很不一样。而且，在不同时候制造的运放也会有所不同。如果要设计一个电路，其输出电压为开环增益乘以其中一个输入端的电压，那么在合理精度范围内预测此时的输出电压将变得很困难，因为它可能会随环境温度而变化。

解决这些潜在问题的一种方法是采用负反馈，负反馈是将输入减去输出的一小部分的过程。如果因为某些因素改变了电路的特性使得输出趋于增加，那么同时输入也将减小。太强的负反馈将抑制任何有用的放大，但是适当小的反馈可以增加稳定性。一个负反馈的例子是我们用手靠近火焰时的过程，越靠近火焰，从手传来的负反馈信号将越大。然而，如果负反馈的比例过大，会使得我们对热量生厌而远离火焰，直至冻坏为止。正反馈是把输出的一部分加回到输入的过程，一个典型的例子是用麦克风直接对着扬声器，开始时非常微弱的声音将很快地被反复放大直到系统发出刺耳的尖声。正反馈往往导致系统不稳定。

本章讨论的所有电路都通过输出和反相输入端之间的电阻来引入负反馈，这样的输出和输入之间的回路将减小输出电压对开环增益精确度的依赖程度（正如在例题6.3中所看到

的)，不必精确测量所用的每个运放的开环增益。当开环增益 A 有一些小的改变时将不会对电路的工作产生明显影响；当 A 对运放所处环境敏感时，负反馈也增加了系统的稳定性。例如，当由于周围温度的变化使得 A 突然增大时，将产生更大的负反馈电压加到反相输入端上，这样就减小了差分输入电压 v_d，因此输出电压 Av_d 将变小。要注意的是，电路的闭环增益总是比开环增益小，这正是为增加稳定性和减小对参数变化敏感程度所付出的代价。

6.6 实际考虑

6.6.1 饱和

到目前为止，都把运放看成纯线性电路，而且假定它的特性与接入电路的方式无关。实际上，必须给运放提供电源以使其内部电路工作，如图 6.17 所示。接到 V^+ 端的正电压的典型范围为 5 V ~ 24 V，接到 V^- 端的负电压与接到 V^+ 端的正电压大小相同，使用单电源或两个大小不同的正负电压源供电的情况比较少见。运放电路的制造商通常会给出一个最大电源电压，超过这个电压将损坏内部的晶体管。

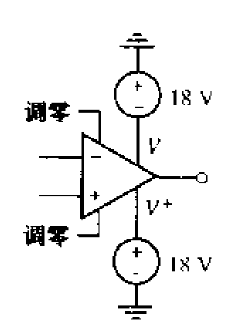


图 6.17　接有正负电压源的运放。这里以两个 18 V 电源为例，注意各电源的极性

在设计运放电路时，电源电压的选取是个重要的考虑因素，因为它限定了运放最大可能的输出电压①。比如考虑一个具有闭环增益为 10 的同相运算放大电路，以 ±5 V 电源供电，到目前为止，都是假定 $v_{out} = 10v_{in}$，而不管 v_{in} 的值是多大。图 6.18 给出了这个电路实际测出的输入 – 输出特性曲线图，从图中立即可以看到，该电路的最大输出电压为 5 V。对于理想运放，如果 $v_{in} = 1$ V，可能会想到输出为 10 V，但很显然实际上并不是这样的。

图 6.18 说明了一种很重要的非线性现象，称为饱和。这种现象用来说明实际运放的输出不能超过其电源电压大小。例如，选取一个 9 V 电压源和一个 –5 V 电压源来驱动运放，那么运放的输出电压将被限制在 –5 V 到 9 V 之间。运放的输出为限制在正负饱和电压范围内的线性响应。作为一般原则，在设计运放电路时总是避免进入饱和区，这就需要根据闭环增益和最大输入电压来仔细选取运放的工作电压。

① 在实际中，往往会发现输出电压比电源电压小 1 V 左右。

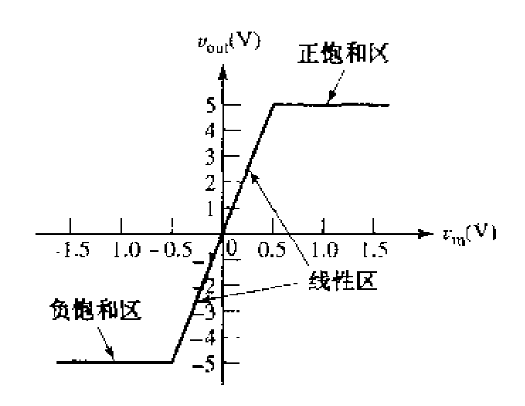


图 6.18 实际运放电路的输出 - 输入特性,并表示出了线性区和饱和区

6.6.2 输入失调电压

正如现在所看到的,在使用运放时,需要注意几个问题。特别需要指出的非理想特性是:即使是在两个输入端短接时,实际的运放也可能具有非零输出。这时的输出值称为失调电压,使输出恢复为零所需的输入电压称为输入失调电压。参看表 6.1,可以看到,输入失调电压的典型值为几个毫伏或者更小。

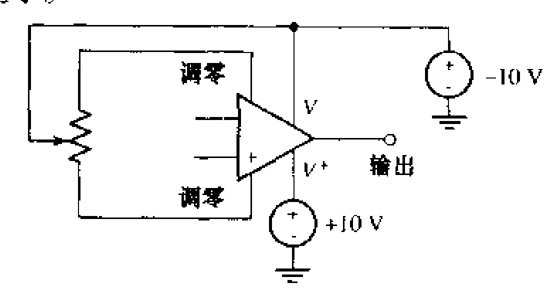


图 6.19 为得到零输出电压的一个参考校准电路。作为例子,这里选取电源电压为 ± 10V,而对于实际电路最后所采用的电源电压可以根据情况来选取

大多数运放都提供了两个管脚,标为"调零 (offset null)",或者"平衡(balance)",可以把它们接到一个可变电阻器上来调整输出电压。可变电阻器是一种三端器件,通常用在收音机的音量控制之类的应用中,它有一个环形旋钮,通过旋转它来改变电阻的阻值;另外,它还有三个接线端。如果只使用变阻器两端,那么不管旋钮的位置在哪里,它的电阻是固定的。如果使用中间的接线端和两端的其中一个接线端,则可变电阻器的阻值依赖于旋钮位置。图 6.19 给出了用于校正运放输出电压的电路,在设备制造商的说明中通常会给出几种校准电路。

6.6.3 封装

现代运放有各种不同的封装,根据应用环境的不同采用不同的封装形式,有些类型的封装更适合于高温环境。因为封装形式不同,所以在印刷电路板安装集成电路的方式也有好几种。图 6.20 给出了美国国家半导体公司(National Semiconductor)制造的 LM741 的几种不同封装形式。管脚旁边标注的"NC"表示该管脚"无连接"。图中给出了几种标准的封装形式,很多集成电路都具有这些封装形式;有时,集成电路实际的管脚数比所需要的要多。

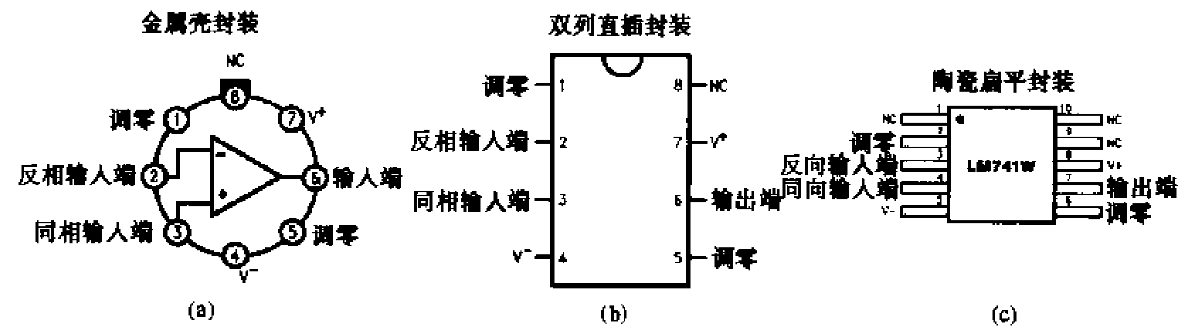


图 6.20 运放 LM741 的几种不同封装形式。(a)金属壳封装(Metal Can Package);(b)双列直插封装;(c)陶瓷扁平封装

6.6.4 PSpice 仿真

在估算运放电路的输出时,PSpice 是一种很有用的工具。它采用了更详细的,因此可以估算出小的输入电流和电压。不过后面将看到,通常情形下,采用理想运放模型的结果与 PSpice 的仿真结果符合得很好。

当用 PSpice 对运放电路进行仿真时,要记住必须把正负直流电源连接到运放上。尽管 PSpice 中的模型中含有调零 (offset null)管脚,但是 PSpice 并没有用到这些管脚,所以它们通常都是悬空的(即未连接)。

表 6.1 给出了 PSpice 学生测试版本所包含的几种运放,而 PSpice 商业版本包含了其他更多的运放。

计算机辅助分析

用 PSpice 仿真图 6.3 所示的电路。如果运放采用 ± 15 V 直流电源供电,确定电路开始进入饱和状态的输入电压大小。将 PSpice 计算出的增益和用理想运放模型估算出的结果进行比较。

首先,用原理图绘制工具画出该反相放大电路如图 6.21 所示。要注意的是,需要用两个 15 V 直流电源给运放供电。

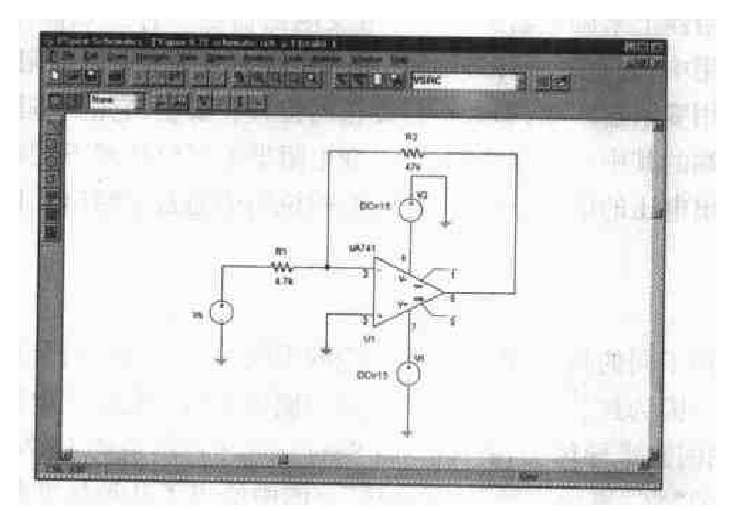


图 6.21 用原理图绘制工具画出图 6.3 所示的反相放大电路

前面用理想运放模型估算出该放大电路的增益为 − 10，于是，对 5 sin 3t mV 的输入，输出电压为 − 50 sin 3t mV。但是，其中隐含的一个假定是，任何输入电压均将放大 − 10 倍。事实上，这只对小的输入电压成立，如果输入电压增加到某个值，输出将饱和，此时输出电压接近于电源电压。

图 6.22(a)给出了 − 2 < Vs < 2 V(略大于用正负电源电压除以增益所得到的范围)时的直流扫描分析结果。

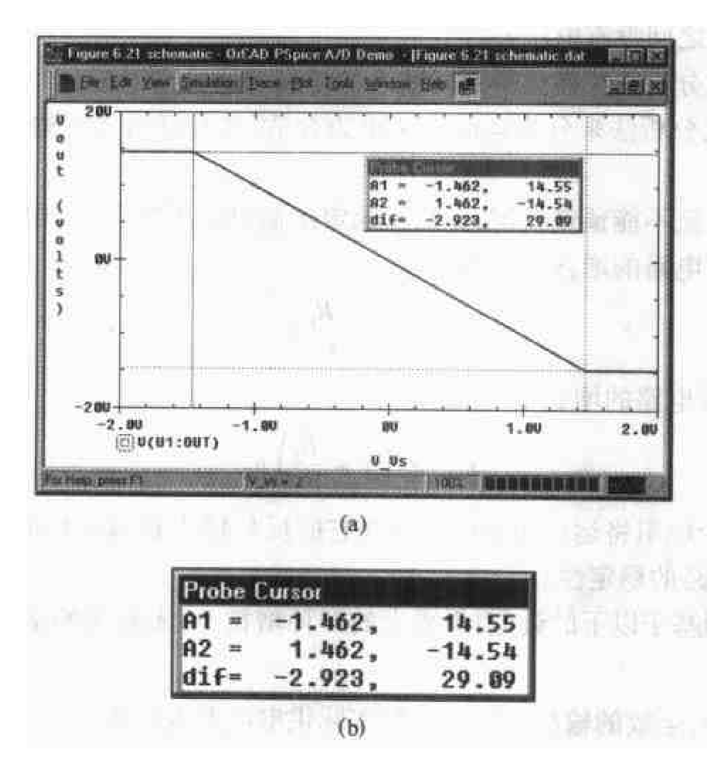


图 6.22　(a)运放电路的输出电压，其中产生了饱和，并用指针工具(cursor tool)画出了饱和起始点；(b)放大的探测光标窗口

用指针工具(cursor tool)可以看到，放大器的输入 − 输出特性在相当大的输入电压范围内确实是线性的，这个线性范围大约为 − 1.462 < Vs < + 1.462 V。为清晰起见，重画出指针窗口(cursor window)，如图 6.22(b)所示。这个线性范围略小于正负电源电压除以增益所得到的范围，在该范围以外运放的输出为饱和，这时输出基本不依赖于输入电压。因此，在这两个饱和区域，电路并不表现为放大器。

增加指针位数(Tools, Options, Number of cursor digits)到 10，可以看到，当输入电压为 Vs = 1.0 V，输出电压为 − 9.995 483 40，其数值比采用理想运放模型求得的 − 10 V 略小，与例题 6.3 中采用的分析模型得到的值 − 9.999 448 也略有不同。尽管如此，采用 PSpice μA741 模型算出的值与采用前面两种分析模型求得的值最多相差万分之几，这表明对于现代集成运放电路，理想运放模型是一种相当精确的近似。

练习

6.4　仿真本章中提到的所有其他的运放电路，并将它们与采用理想运放模型估算的结果

相比较。

6.7 小结与复习

- 在分析理想运放电路时，必须用到以下两个基本规定：
  1. 没有任何电流流入两个输入端。
  2. 两个输入端之间没有电压差。
- 对运放电路的分析往往需要得到以输入各量表示的输出电压。
- 一般采用节点分析法来分析运放电路更为合适，并且通常先从输入端开始往输出端分析更好一些。
- 运放的输出电流不能预先设定，必须在确定出输出电压之后才能求出来。
- 反相运算放大电路的增益由下式给出：

$$v_{out} = -\frac{R_f}{R_1}v_{in}$$

- 同相运算放大电路的增益由下式给出：

$$v_{out} = \left(1+\frac{R_f}{R_1}\right)v_{in}$$

- 几乎总有一个电阻将运放的输出管脚和它的反相输入管脚连接起来，构成电路的负反馈，以增加电路的稳定性。
- 理想运放模型基于以下的近似：无限大的开环增益 A，无限大的输入电阻 R_i，以及零输出电阻 R_o。
- 在实际电路中，运放的输出电压范围受实际供电电源电压的限制。

习题

1. 参看图 6.23，计算电压 v_{out}。
2. 如图 6.24 所示电路，需要 R 的值为多大，使得传送到 10 kΩ 电阻的功率为 150 mW？

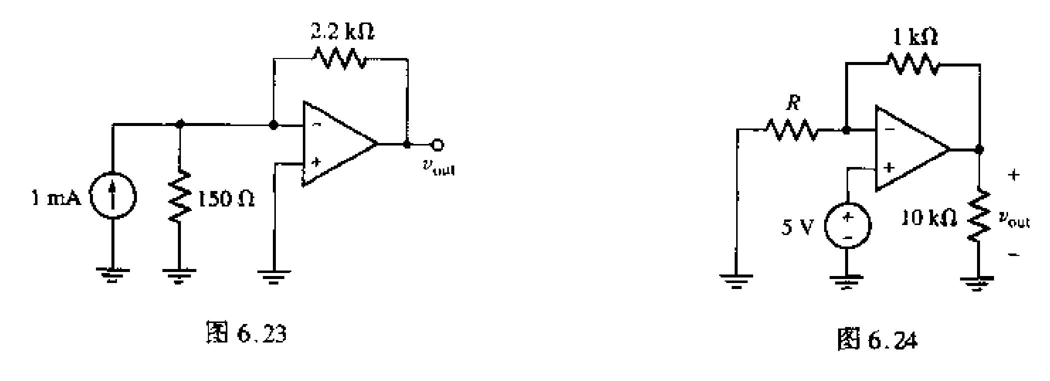


图 6.23

图 6.24

3. 当有人在 20 英尺远处拍手掌时，某麦克风可以输出 0.5 V 电压。有一个专门的电子开关，其戴维南等效电阻为 670 Ω，需要 100 mA 电流来触发。设计一个电路，把该麦克风和开关连接起来，使得当有人拍手掌时开关触发。

4. 对于图 6.25 所示电路，求出以 v_s 表示的 v_{out} 表达式。

5. 对于图 6.26 所示电路，计算电压 V_1。

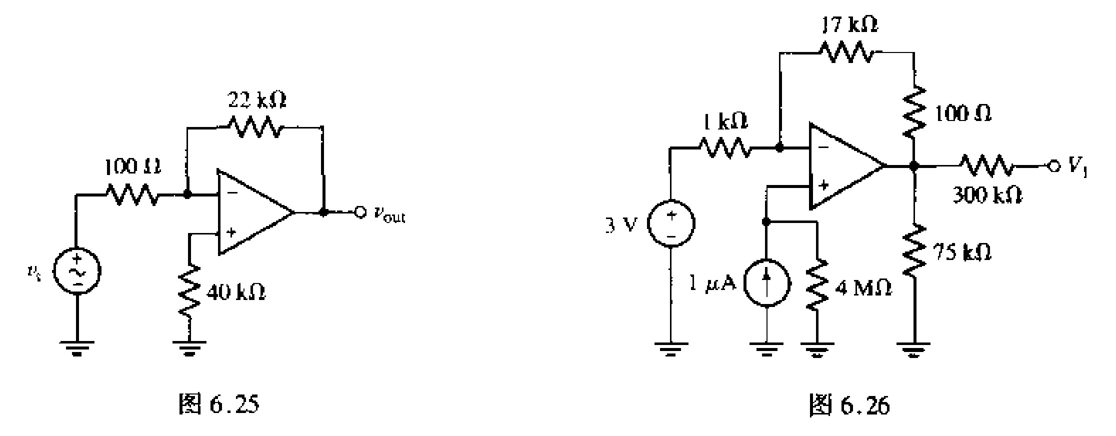


图 6.25　　图 6.26

6. 对于图 6.27 所示电路，计算电压 V_2。

7. 如图 6.28 所示电路，求出 v_{out} 的表达式，并给出 $t=3$ 秒时它的值。

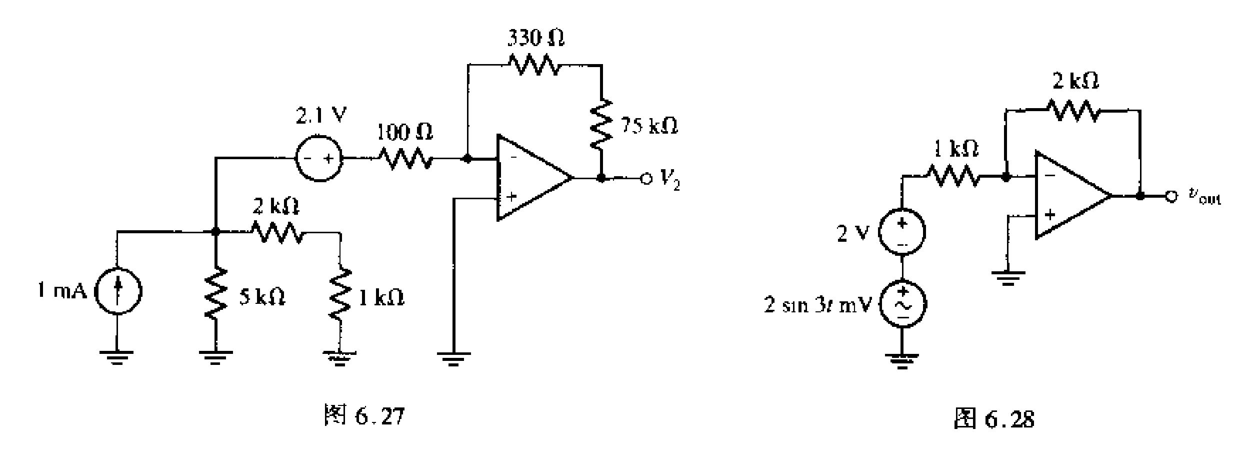


图 6.27　　图 6.28

8. 如图 6.29 所示电路，V_{in} 取值多少使得输出电压为 18 V？

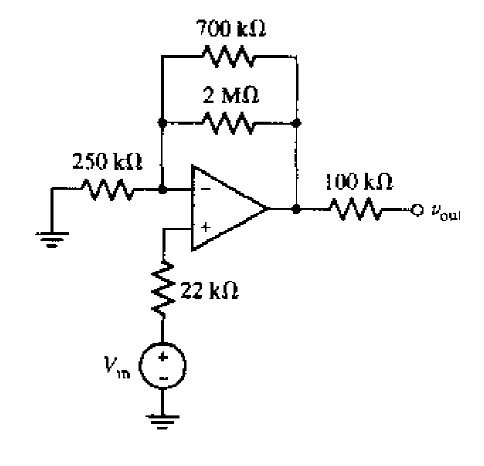


图 6.29

9. 在图 6.30 中,选取 R_1 和 R_f 的值使得 $v_{out} = 23.7\cos 500t$ V。

10. 在图 6.31 所示电路,不使用电源变换,给出 v_{out}的表达式。

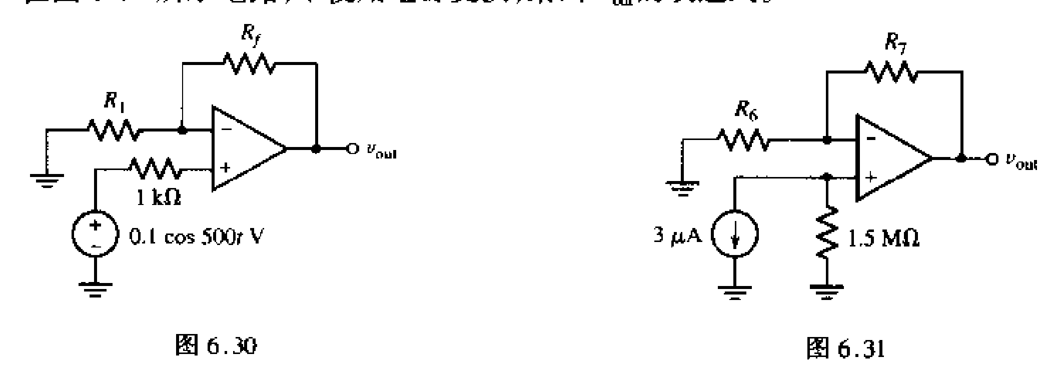


图 6.30　　　图 6.31

11. 参看图 6.32 中的电路,(a) 如果 $V_A = 0$, $V_B = 1$ V, $R_A = R_B = 10$ kΩ, $R_1 = 70$ kΩ, $R_2 = \infty$ 和 $V_{out} = 8$ V,那么 A 和 B 哪一个端是同相输入端? 解释原因;(b) $V_A = 10$ V 和 $V_B = 0$ V。如果 B 是反相输入端,选取 R_A, R_B, R_1 和 R_2 的值得到输出电压为 20 V;(c) $V_A = V_B = 1$ V, $R_1 = 0$ kΩ 和 $R_2 = \infty$。如果测出 V_{out}为 1 V,那么 A 和 B 那一个端是反相输入端? 请解释。

12. 如图 6.33 所示运放电路,计算 v_{out}。

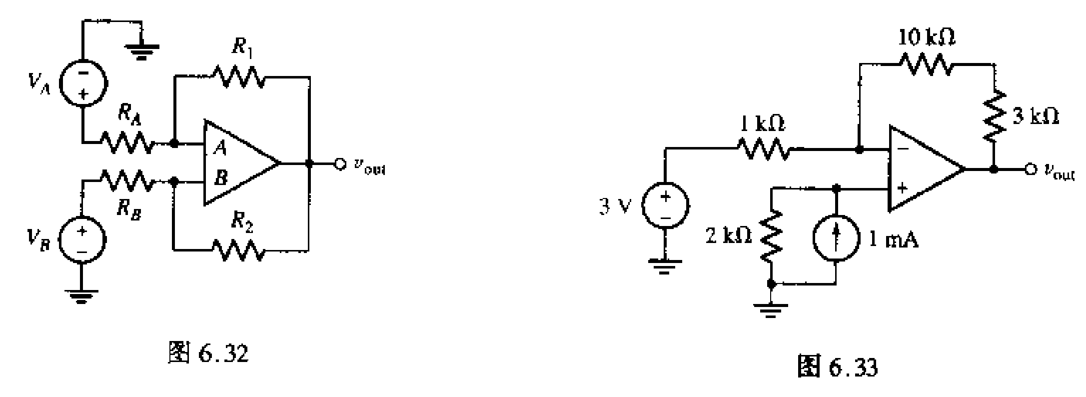


图 6.32　　　图 6.33

13. 如果图 6.34 所示电路中 $v_s = 5\sin 3t$,计算 $t = 0.25$ s 时的 v_{out}。

14. 对于图 6.34 中的电路,采用合适的电路分析方法来计算 v_{out}。

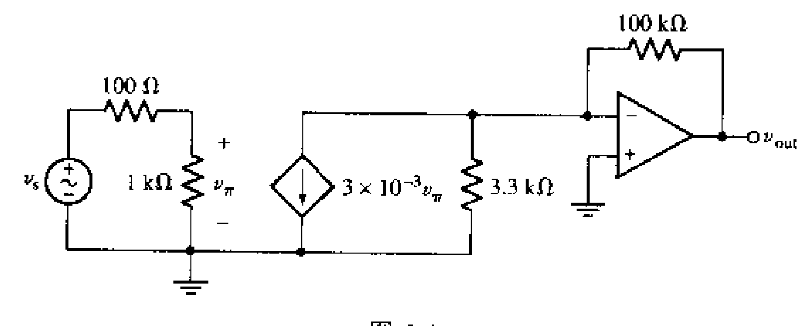


图 6.34

15. 在图 6.35 中,用 27 μA 电源替换 3 μA 电源,计算 v_{out}。

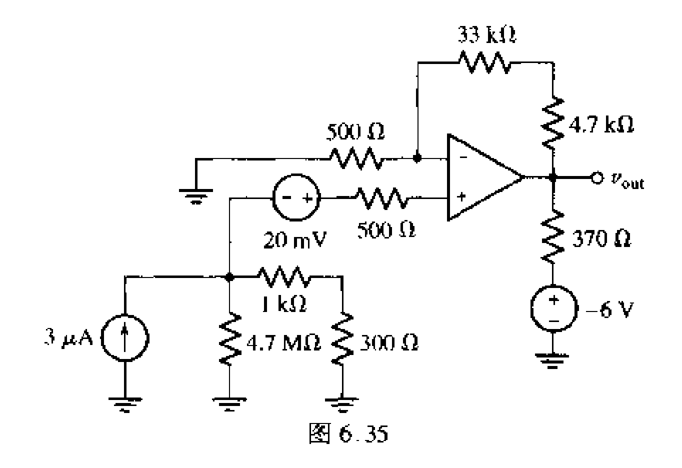


图 6.35

16. 计算图 6.36 中多个运放电路中的 v_1。

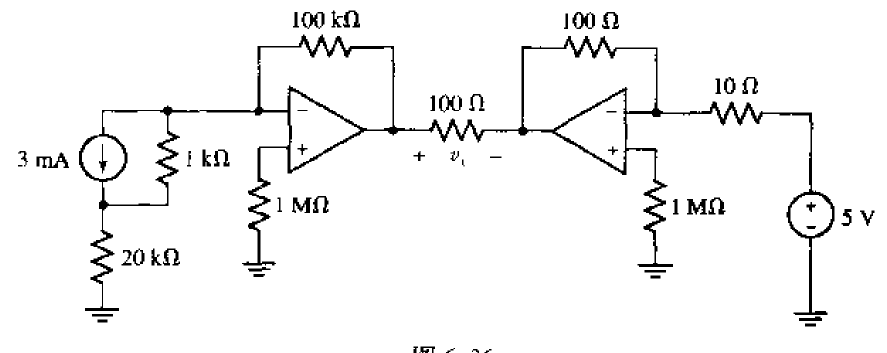


图 6.36

17. 导出一般的加法运算放大器的表达式，其中每个电阻可取不同值。

18. 导出一般的差分运算放大器的表达式，其中每个电阻可取不同值。

19. 硫化镉(Cadmium sulfide, CdS)通常用来制作一种电阻，它的阻值取决于它表面的光照强度。图 6.37 中，采用 CdS 光电池作为反馈电阻 R_f。在完全黑暗时，其阻值为 100 kΩ，在光强为 6 坎德拉时阻值为 10 kΩ。R_L 代表一个电路，当其两端电压降至 1.5 V或者更小时，该电路被触发。选取 R_1 和 V_s 的值，使得 R_L 所代表的电路可由 2 坎德拉或更强的光所触发。

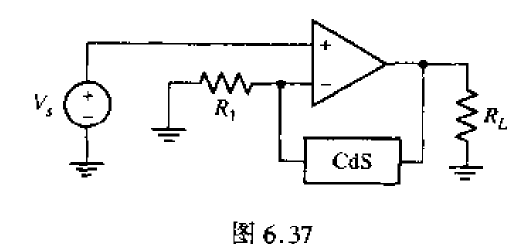


图 6.37

20. 在录音棚中需要用到两个麦克风，一个用于语音，另一个用于乐器。设计一个电路，把两个麦克风的输出合并起来，使得语音放大倍数为乐器声音放大倍数的两倍。

21. 一个正弦信号叠加在一个 2 V 直流偏置上(这就是说，总的信号平均值为 2 V)。设计一个电路来消除该直流偏置，并把正弦信号(没有相位反相)放大 100 倍。

22. 如图 6.38 所示电路，计算 v_{out}。

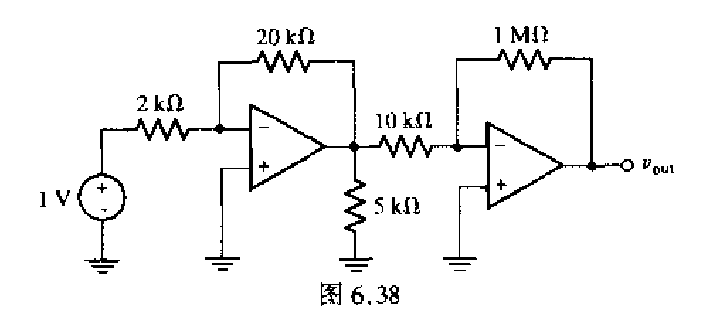


图 6.38

23. 如图 6.39 所示电路，导出以 V_1 和 V_2 表示的 V_{out} 的表达式。

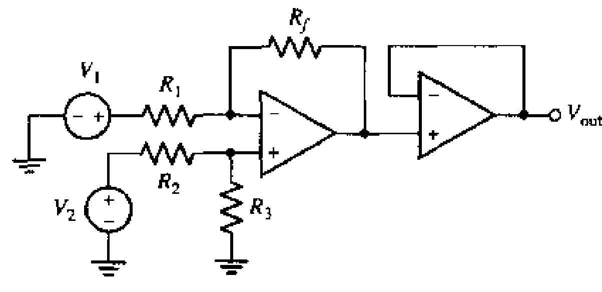


图 6.39

24. 如图 6.40 所示的级联运放电路，计算每一级的输出电压。

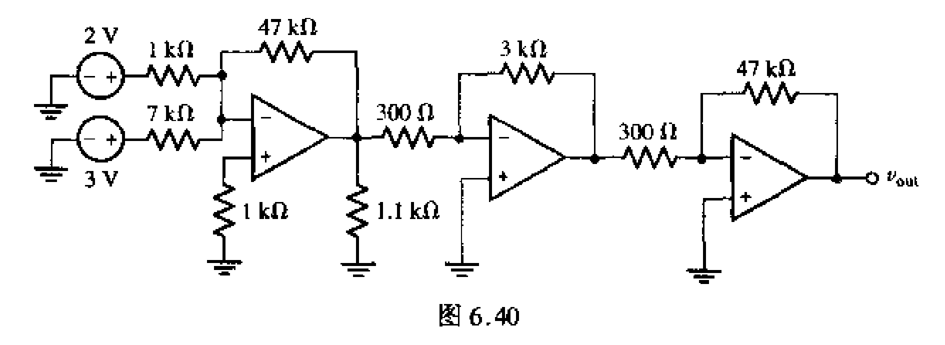


图 6.40

25. 参看图 6.41 所示的运放电路，为使输出 $V_{out} = 10$ V，R 的值需要为多大？

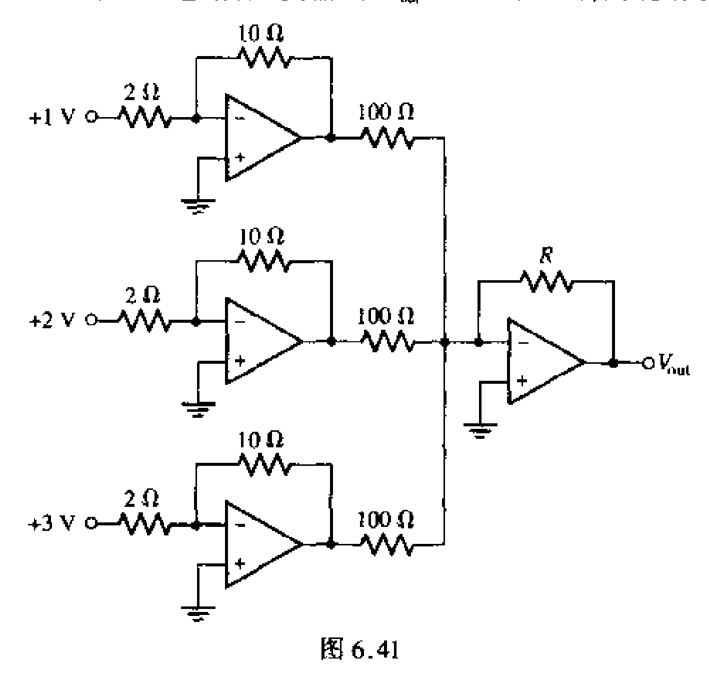


图 6.41

26. 如图 6.42 所示的二级运放电路，计算 v_{out}。

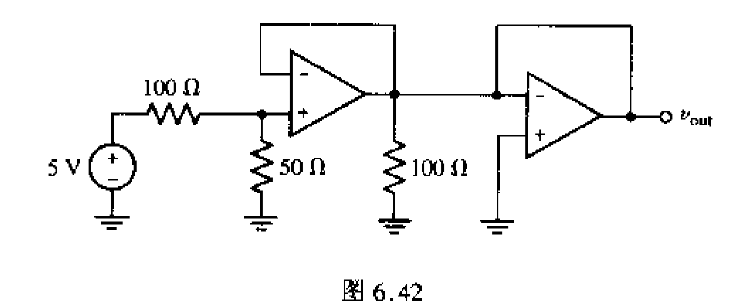


图 6.42

27. 采用 μA741 的详细模型，求出传递给 8 Ω 电阻的功率，如果：(a) $v_a = v_b = 1$ nV；(b) $v_a = 0$；$v_b = 1$ nV；(c) $v_a = 2$ pV，$v_b = 1$ fV；(d) $v_a = 50$ μV，$v_b = -4$ μV。

28. 某反相运算放大器采用了一个 AD549，如果 $R_1 = 270$ kΩ 和 $R_f = 1$ MΩ，那么对于下面的差分输入电压值，输入偏置电流等于多少：(a) $V_s = 1$ mV；(b) $V_s = -7.5$ mV；(c) $V_s = 1$ V。

29. 如图 6.44 所示电路，计算 v_{out}，如果：(a) $A = 10^5$，$R_i = 100$ MΩ 和 $R_o = 0$；(b) $A = 10^6$，$R_i = 1$ TΩ 和 $R_o = 0$。

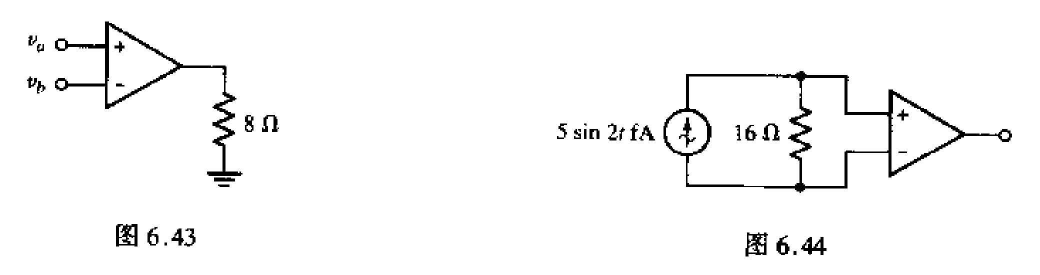


图 6.43　　图 6.44

30. 如图 6.45 所示电路，(a) 导出 v_{out}/v_{in} 的表达式，如果 $R_i = \infty$，$R_o = 0$，A 为有限值；(b) 开环增益 A 为多大时，闭环增益与其理想值相差在 1% 以内？

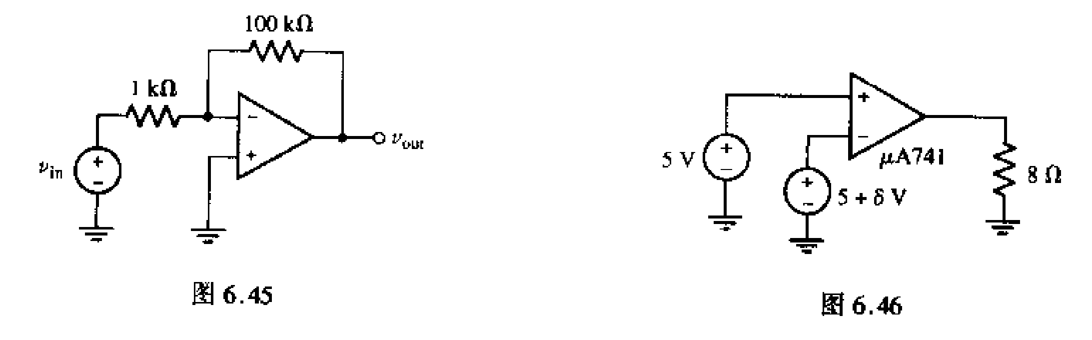


图 6.45　　图 6.46

31. 如图 6.46 所示电路，计算 8 Ω 电阻所消耗的功率，如果 $\delta =$ (a) 0 V；(b) 1 nV；(c) 2.5 μV。

32. 采用 AD549 的参数，如果 $v_{in} = -16$ mV，计算图 6.47 所示电路的 v_{out}。

33. 使用 PSpice 对反相运放电路进行仿真，运放采用 μA741，用 ±15 V 电源供电，$R_1 = 10$ kΩ 和 $R_f = 1$ MΩ。画出输入－输出特性，标出线性和正负的饱和区。仿真所得出的增益与理想运放模型求得的结果是否一致？

34. 如果已知某应用需要使用反相运放电路，而不要求对输出电压进行限幅，那么此运放的封装最少需要多少个管脚？列出它们的名称。

35. 用 PSpice 仿真图 6.48 所示电路，使用(a) μA741；(b) LM324；(c) LF411。采用 ±15 V 电源供电，分别求出这几种不同类型的运放饱和的差分输入电压 V_S。

36. 使用 PSpice 对同相运放电路进行仿真，运放采用 μA741，用 ±15 V 电源供电，R_1 = 4.7 kΩ 和 R_f = 1 MΩ。画出输入－输出特性，标出线性和正负的饱和区。仿真所得出的增益与理想运放模型求得的结果是否一致？

37. 使用图 6.49 所表示的电路结构，确定 μA741 和 LF411 的输出电阻。改变电源电压，看是否会影响仿真结果。

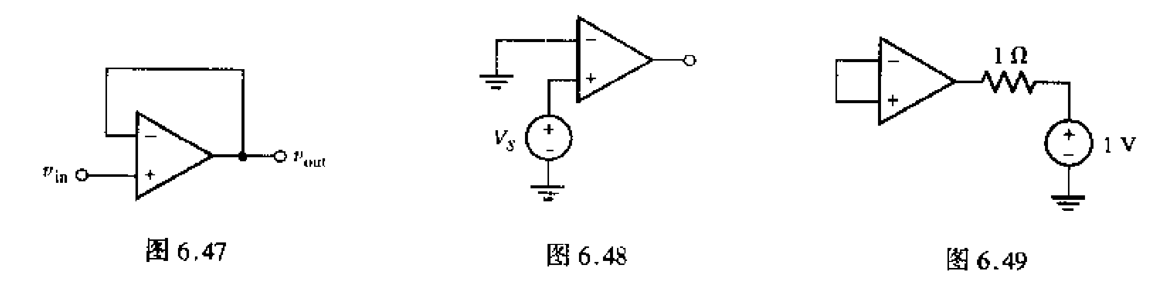


图 6.47　　图 6.48　　图 6.49

38. 使用 LM234 来仿真图 6.50 所示的电路。(a)确定输入偏置电流和输入差分电压，并把它们和详细运放模型及表 6.1 所给出的值相比较；(b)确定电源电压是否影响仿真结果。

39. 某传感器输出信号的电压范围为 －30 mV 到 +75 mV。(a)如果一个反相运算放大器的电压增益 $|v_{out}/v_{in}|$ 为 1 000，用 ±15 V 直流电源供电，那么输出电压范围为多少？(b)如果一个同相运算放大器采用 ±15 V 直流电源供电，那么在运放不饱和的情况下，最大可能的电阻比 R_f/R_1 为多少？

40. (a) 用 PSpice 在 $-10\ V \leq V_{in} \leq 10\ V$ 的范围内对图 6.51 所示电路进行仿真，运放采用 μA741，使用指针工具，确定运放开始饱和时电压的精确值；(b) 在连续的短路情况下，实际 μA741 运放能够提供 35 mA 的电流。确定 PSpice 模型所允许的最大可能短路电流。

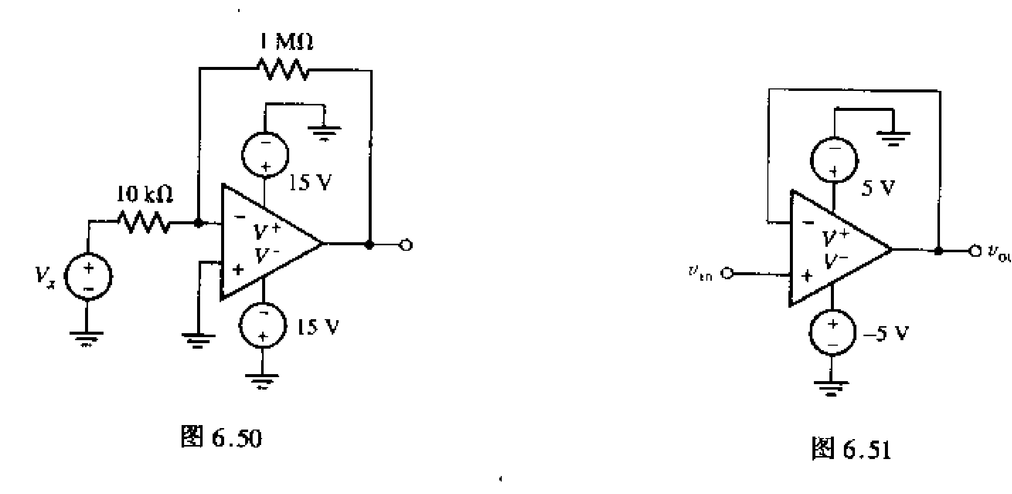


图 6.50　　图 6.51

41. 为提高传输的安全性，在语音信号广播之前，把一个混沌的时变信号叠加到语音信号上，并且在另一个频率上单独发送同样的混沌时变信号。假定可将接收天线看成是一个 300 Ω 电阻和一个时变电压源的串联，设计一个电路来分离这两个信号，并消去混沌信号，然后把语音信号放大 10 倍，以驱动一个 8 Ω 的扬声器。

42. 设计一个运放电路，其输出电压为三个输入电压的平均值。假定输入电压的范围限制在 $-10\ V \leqslant V_{in} \leqslant 10\ V$ 内，用 PSpice 和一组合适的输入电压验证你的设计。

第7章 电容和电感

本章要点：

- 推导理想电容的电压－电流关系
- 推导理想电感的电压－电流关系
- 计算储存在电感和电容中的能量
- 学习串联和并联组合电感的简化方法
- 学习串联和并联组合电容的简化方法
- 估算带电容的运放电路的工作特性

7.1 引言

电容和电感都是无源元件，只能储存和释放有限的能量。它们和理想电源不同，它们不能在无限长的时间段里一直提供能量。电容和电感这两个元件的电压－电流关系依赖于时间，由此可以得到很多有趣的电路。任何实际元件都有一定的固有电阻、电容和电感，尽管在实际中它们可能很小。但随着计算机和通信系统的工作频率越来越高，即使很小的电容和电感也可能对电路的性能产生显著的影响。

7.2 电容

7.2.1 理想电容模型

前面将独立和受控电压源或电流源称为有源元件，将线性电阻称为无源元件，但有源和无源的定义仍然有些模糊，需要进一步分析。现在将有源元件定义为可以给外部电路提供大于零的平均功率的元件，而且该平均功率可以持续无限长的时间。理想电源是有源元件，运算放大器也是有源元件。相反，无源元件定义为不能在无限长的时间内提供大于零的平均功率的元件。电阻器属于这种类型，通常它将吸收的功率转变成热量。

下面介绍一种新的无源元件——电容，电容 C 由下面的电压－电流关系定义：

$$i = C\frac{dv}{dt} \tag{7.1}$$

其中，v 和 i 均符合无源元件的定义，如图7.1所示。需要要记住的是，v 和 i 均是时间的函数，如果需要强调这点，可以写成 $v(t)$ 和 $i(t)$。从式(7.1)可以得到电容的单位为安培·秒/伏特，即库仑/伏特。定义库仑/伏特为法(F)，作为电容的单位。

由式(7.1)定义的理想电容只是实际元件的数学模型。电容由两个导电层构成，电荷存储在两个导电层上，并由电阻非常大的绝缘薄层隔开。如果这个电阻足够大，可以视其为无穷大，那么电容极板上等量正负电荷永远不会中和，至少不会通过该元件内的任何路径进行中

和。在工程中,可以用如图7.1所示的电路符号来表示实际电容元件。

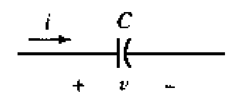


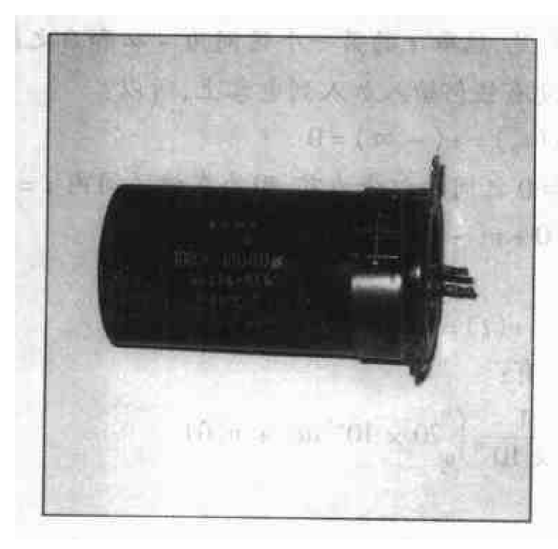
图7.1 电容的电气符号和其电流-电压规定

假设将一个外部器件连接到电容上,那么将产生一个正的电流,它从电容的一个极板流出,然后流入另一个极板。这时,在元件的两端,流入和流出的电流大小将相同,不过,这个电流关系对任何电路元件都成立。现在来考察电容的内部。正的电流流入其中的一个极板表示正的电荷正在通过引线流向该极板,但这些电荷不能穿过电容的内部,于是聚集在极板上。事实上,电流和这个正在增长的电荷通过下面的公式联系起来:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

现在,将极板看做是一个面积很大的节点,并对它应用基尔霍夫电流定律。显然这时并不满足基尔霍夫电流定律,因为有电流从外部电路流入极板,但是并没有电流从极板内部流出。在一个世纪以前,苏格兰人麦克斯韦(James Clerk Maxwell)就发现了这个矛盾,后来,他发展了一套统一的理论来解释这个矛盾,他假设当电场或电压随时间变化时均产生"位移电流"。位移电流存在于电容内部的两个极板之间,正好与从电容引线流入的传导电流相等。这样,如果同时考虑到传导电流和位移电流,则满足基尔霍夫电流定律。但是,在电路分析中并不关心内部的位移电流,并且既然它恰好与传导电流相等,那么可以将麦克斯韦的假设看做为将传导电流与电容两端变化的电压联系起来。

由两个相距为 d 面积为 A 的平行导电极板组成的电容器的电容大小为 $C = \epsilon A/d$,其中,ϵ 是两个极板间的绝缘体的介电常数,并且假定导电极板的尺寸要比 d 大得多。对于空气和真空,$\epsilon = \epsilon_0 = 8.854$ pF/m。许多电容都采用比空气介电常数大得多的薄电介质层来减小器件的尺寸。图7.2画出了几种电容的外形,不过要记住的是,任何相互不接触的两个导电表面之间均存在非零的电容(尽管可能非常小)。还需要指出的是,几百微法(μF)就可以认为是很"大"的电容。



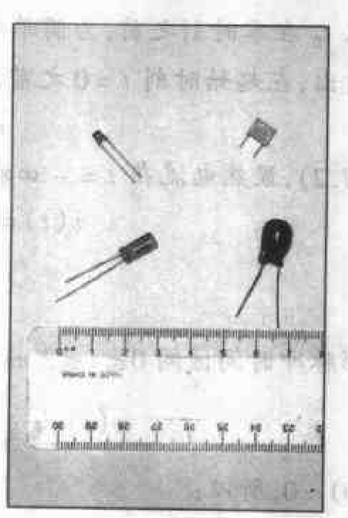


图7.2 几种可买到的电容器的类型

从定义式(7.1)出发,可以得到这个新的数学模型的几个重要特性。例如将恒定的电压加到电容两端将得到大小等于零的电流,即对于直流而言电容相当于开路,电容的符号正体现了这个事实。另外,很显然电压的突变需要无穷大的电流,这在物理上是不可实现的,所以不允许电容两端的电压在零时间间隔内发生改变。

7.2.2 电压-电流的积分关系

通过对式(7.1)积分,可以将电容电压用电流来表示。首先得到:

$$dv = \frac{1}{C}i(t)\,dt$$

然后对时间从 t_0 到 t 进行积分[①],相应的电压为 $v(t_0)$ 和 $v(t)$:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t')\,dt' + v(t_0) \tag{7.2}$$

式(7.2)还可以写成不定积分加上一个积分常数的形式:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i\,dt + k$$

最后需要指出的是,对于很多实际问题,不能确定电容两端的初始电压 $v(t_0)$,在这种情况下,为方便起见,假定 $t_0 = -\infty$ 和 $v(-\infty) = 0$,所以:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,dt'$$

因为电流在任何时间区间的积分等于该时间间隔内电流流入的那个极板上所聚集的电荷,所以还可以将电容定义为:

$$q(t) = Cv(t)$$

其中,$q(t)$ 和 $v(t)$ 分别代表各极板上的瞬时电量和两个极板之间的电压。

例题 7.1 当电流为图 7.3(a)所示曲线时,求相应的电容电压

如果从图形上来说明式(7.2),则电压在 t 和 t_0 时刻的差与电流曲线在此时间区间内的面积成正比,比例常数为 $1/C$。可以通过查看图 7.3(a)得到需要的 t 和 t_0 而求出该区域的面积。取 t_0 在零时刻之前,为简单起见,选取 t 的第一个区间为 $-\infty$ 和 0 之间,从输入波形可以看出,在起始时刻 $t=0$ 之前没有任何输入加入到电容上,所以:

$$v(t_0) = v(-\infty) = 0$$

参看式(7.2),显然电流在 $t = -\infty$ 和 0 之间的积分为零,因为在该区间内 $i = 0$。从而:

$$v(t) = 0 + v(-\infty),\ -\infty \leqslant t \leqslant 0$$

或者:

$$v(t) = 0,\ t \leqslant 0$$

考虑矩形脉冲时间区间 $0 \leqslant t \leqslant 2$ ms,有:

$$v(t) = \frac{1}{5\times10^{-6}}\int_{0}^{t} 20\times10^{-3}\,dt' + v(0)$$

因为 $v(0) = 0$,所以:

---

① 注意,当积分变量 t 也是积分限的情况下,采用了另一个变量 t' 来表示积分变量。

$$v(t)=4\,000t, 0\leq t\leq 2\ \text{ms}$$

因为在该脉冲之后的半无限区间内积分也为零,所以:

$$v(t)=8, t\geq 2\ \text{ms}$$

这些分析结果可以用一个图简单地表示出来,如图 7.3(b)所示。

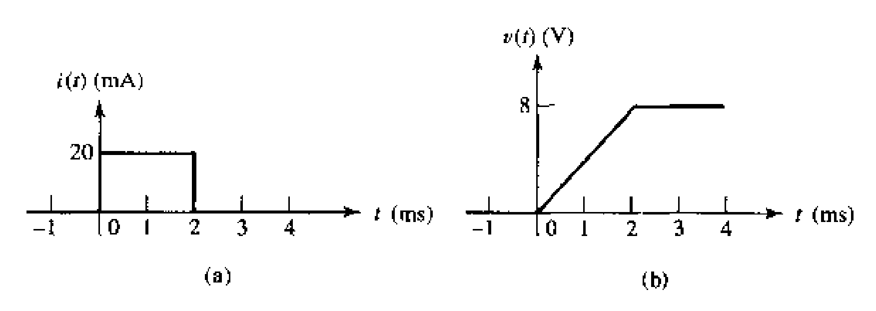


图 7.3 (a)加到 5 μF 电容的电流波形;(b)根据电流波形积分所得到的电压波形

练习

7.1 如果 100 pF 电容电压随时间变化关系如图 7.4 所示,求流过该电容的电流。

答案:0 A, $-\infty\leq t\leq 1$ ms;200 nA, 1 ms $\leq t\leq 2$ ms;0 A, $t\geq 2$ ms

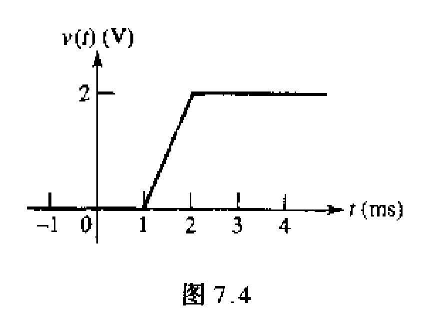


图 7.4

7.2.3 能量储存

传递给电容的能量为:

$$p=vi=Cv\frac{dv}{dt}$$

于是储存在电容电场中的能量为:

$$\int_{t_0}^{t}p\,dt = C\int_{t_0}^{t}v\frac{dv}{dt}dt = C\int_{v(t_0)}^{t}v\,dv = \frac{1}{2}C\{[v(t)]^2-[v(t_0)]^2\}$$

从而:

$$w_C(t)-w_C(t_0)=\frac{1}{2}C\{[v(t)]^2-[v(t_0)]^2\} \tag{7.3}$$

其中,能量的单位为焦耳(J),$v(t_0)$为 t_0 时刻的电压。如果选取 t_0 时刻为零能量参考点,即意味着该时刻电容的电压为零,于是:

$$w_C(t)=\frac{1}{2}Cv^2$$

下面来考虑一个简单的数值例子。如图 7.5 所示,正弦电压源与一个 1 MΩ 电阻以及一个

20 μF电容并联，这里的并联电阻可以看做是实际电容的两个极板之间的电介质所具有的电阻（理想电容具有无穷大的电阻）。

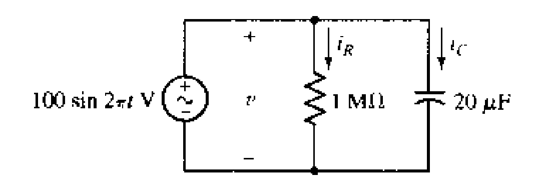


图7.5 将正弦电压源接到并联 RC 网络中，1 MΩ 电阻表示实际电容的电介质层的电阻

例题7.2 求图7.5中的电容在时间区间 $0<t<0.5$ s 内储存的最大能量和电阻消耗的能量

● 弄清问题的目标：

储存在电容中的能量是随时间变化的，本题所要求解的是在给定时间区间内能量的最大值，同时要求出电阻在该时间段内消耗的总能量。实际上这是两个完全不同的问题。

● 收集已知信息：

电路中惟一的能量来源是独立电压源，其大小为 $100\sin 2\pi t$ V。这里只对时间区间 $0<t<0.5$ s 感兴趣。图中已正确标出了各量。

● 选择最适合问题的已有方法：

可以先求出电压值再求出电容储存的能量。为了求出电阻在相同时间区间内所消耗的能量，需要对消耗的功率 $p_R = i_R^2 \cdot R$ 进行积分。

● 建立适当的方程组：

储存在电容中的能量为：

$$w_C(t) = \frac{1}{2}Cv^2 = 0.1\ \sin^2 2\pi t\ \text{J}$$

于是得到电阻消耗功率的表达式，以电流 i_R 表示：

$$i_R = \frac{v}{R} = 10^{-4}\ \sin 2\pi t\ \text{A}$$

所以，电阻在 0~0.5 s 所消耗的能量为：

$$w_R = \int_0^{0.5} p_R dt = \int_0^{0.5} 10^{-2}\ \sin^2 2\pi t\ dt\ \text{J}$$

● 确定是否还需其他信息：

这对，已经求出了储存在电容的能量表达式，图7.6画出了该表达式的图形。电阻消耗能量的表达式中不包含任何未知量，所以很容易计算出来。

● 试解：

从图7.6可以看出，能量从 $t=0$ 时刻的零增长到 $t=\frac{1}{4}$ s 时刻的最大值 100 mJ，并在另一个 $\frac{1}{4}$ s 后减为零，所以，$w_{C_{max}} = 100$ mJ。根据前面求得的电阻消耗的能量的积分表达式，可以计算出 $\omega_R = 2.5$ mJ。

● 证实所得解是否合理和满足要求：

由于实际电容存在内阻，所以在储存和释放过程中，它储存的最大能量（100 mJ）有 2.5%

被消耗了。而理想电容只储存能量，不消耗能量，这在数学模型上是正确的，但对实际电容而言它并不正确。

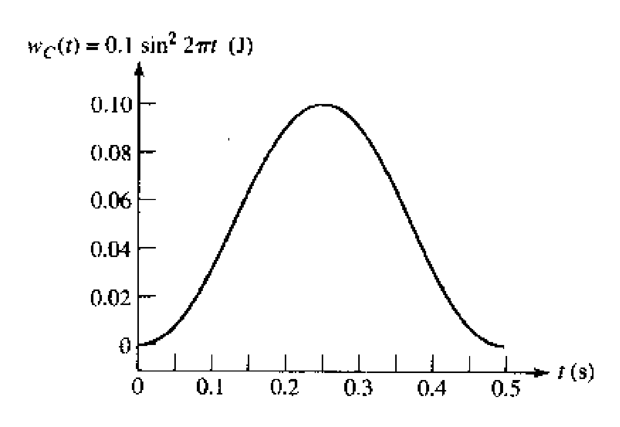


图 7.6 储存在电容的能量随时间变化的曲线

练习

7.2 如果 1 000 μF 电容两端的电压为 $1.5\cos 10^5 t$ V，计算电容在 $t = 50$ μs 储存的能量。
答案：90.52 μJ

7.2.4 理想电容的重要特性

1. 如果电容两端的电压不随时间变化，那么就没有电流流过它，因而对于直流而言电容相当于开路。
2. 即使流过电容的电流为零，它也可以储存能量，例如在电容两端具有恒定电压时。
3. 不可能在零时间间隔内改变电容两端的电压，因为这要求流过电容的电流为无穷大。可以将电容对于电压突变的抵抗类比弹簧对于位移突变的抵抗。
4. 理想电容只储存能量不消耗能量，这从数学模型而言是正确的，但对于实际电容而言它并不正确，因为实际电容具有一定的电阻。

实 际 应 用

混合电池：超级电容器件

数字蜂窝电话和卫星电话具有两个基本工作模式：接收模式和发送模式。典型的信号接收并不要求电池提供大的电流，但是发送却需要较大的电流(图 7.7)。不过，如图所示，用于发送的时间通常只是这种设备总工作时间的一小部分。

从第 5 章可以知道，电池仅能在小电流时保持恒定电压，因此当所需的电流增大时，电池电压将下降(图 7.8)。这样会产生一些问题，因为大多数电路具有一个最低的工作电压，称为截止电压。低于截止电压时，电路将不能正确工作。

如果电路吸收电流的最大值使得电池电压降到截止电压以下，那么就需要更换容量更大

的电池。但对于便携式设备来说，这样做通常不能满足实际需要，因为它们通常要求使用小和轻的电池。另一种办法是使用一种混合器件，这种器件由一个标准电池和一个经过特别设计的电容（有时称为电化学电容或超级电容）组成。图 7.9 给出了这种器件的结构图。

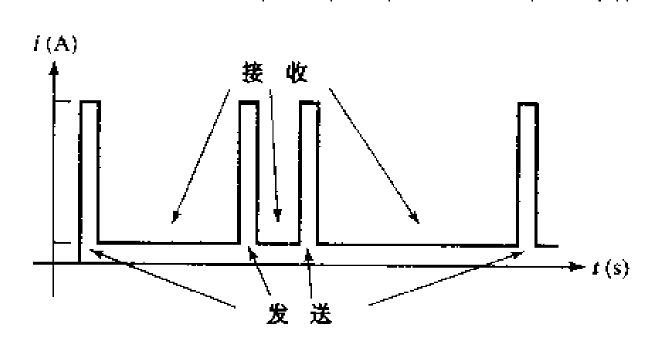


图 7.7　蜂窝电话系统的典型工作电流示意图，表示了发送和接收时所需的电流大小

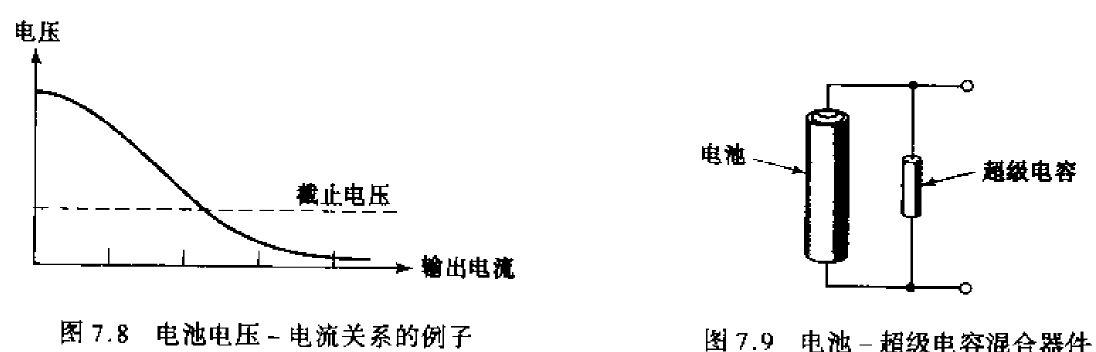


图 7.8　电池电压 - 电流关系的例子

图 7.9　电池 - 超级电容混合器件

这种器件的工作原理如下：当电池处于维持电路工作所要求的电流时（例如电话处于接收模式），电容从电池那里储存能量（$\frac{1}{2}CV^2$）。如果需要的电流突然增大（例如电话处于发送模式），则电池电压将下降。这时，由于 dv/dt 发生变化，那么将产生额外的电流从已充电的电容中流出。如果电话电路的戴维南等效电阻要比电池的内阻小得多，那么该电流将流过电话电路，而不是流过电池。因为电荷离开电容的速度非常快，所以电流"增加"的时间很短。不过，如果发送操作的时间也很短，则该电容将有效地辅助了电池，从而防止了电路的截止。第 8 章将研究如何估算电容辅助时间的大小，假定已知电池和电路的戴维南等效电阻。

7.3 电感

7.3.1 理想电感模型

在严格地从电路角度（即通过电压 - 电流关系）定义电感之前，了解一些关于磁场理论的历史发展将有助于更好地理解电感的定义。在 19 世纪早期，丹麦科学家奥斯特发现，当导体中有电流流过时，导体周围将产生磁场（例如，有电流流过的导线，将影响附近的指南针）。不久，安培做了几个精密的测量实验，结果表明磁场和产生它的电流成线性关系。大约在 20 年

后，英国实验物理学家法拉第和美国发明家亨利几乎同时发现：变化的磁场可以使附近的电路产生电压。他们指出，这个电压与产生磁场的电流随时间的变化率成正比，这个比例系数即为现在所说的感应系数，用符号 L 表示，所以：

$$v = L\frac{di}{dt} \tag{7.4}$$

必须注意，v 和 i 都是时间的函数，当需要强调这一点时，可以使用符号 $v(t)$和 $i(t)$来表示。

电感的电气符号如图 7.10 所示，需要注意的是，与电阻和电容一样，已采用了无源符号规则。电感的单位为亨利(H)，由定义公式可以看出亨利只是伏特·秒/安培的简洁表示。

图 7.10　电感的电气符号和其电流－电压规定

式(7.4)所定义的电感是一个数学模型，是一个用来近似实际器件的理想元件。实际电感可以通过将一定长度的导线绕成线圈而制成，这样等效于增大产生磁场的电流，同时也增大了感应出法拉第电压电路的“数目”。综合这两方面产生的效果，线圈的电感大致与电感匝数的平方成正比。例如，一个外形类似有很小螺距的长螺旋杆的电感线圈，其电感为 $\mu N^2 A/s$，其中 A 为横截面积，s 为螺旋杆轴向长度，N 为线圈匝数，μ 为与螺旋杆内部材料有关的常量，称为磁导率，在真空中(和空气中非常接近)，$\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m = 4 πnH/cm。图 7.11 画出了几种电感的外形。



图 7.11　几种常见的电感，有时也称它们为扼流圈

现在来仔细考察式(7.4)以得到该数学模型的一些有用的电学特性。式(7.4)表明，电感两端的电压与流过它的电流随时间的变化率成正比，特别是，当电感流过恒定的电流时，不管电流的数值是多少，它两端的电压都为零，因此可以将电感看做“直流短路”。

还可以从式(7.4)得出另外一个结论。根据这个公式可知，电流的突变或者电流的不连续变化必然导致电感两端电压为无穷大，换句话说，如果试图使电感电流产生突变，那么必须在电感两端加上无穷大的电压。尽管从理论上说可以存在电压为无穷大的激励函数，但对于实际器件，这种情况永远不会出现。后面将看到，电感电流的突变还要求储存在电感上的能量产生突变，能量的突变要求在该时刻具有无穷大的能量，而无穷大的能量在实际物理世界中同样

不存在。为了避免出现无穷大的电压和无穷大的能量，不允许电感电流瞬间从一个值跳变到另一个值。

如果将实际电感的电流突然截断，那么在开关处将产生电弧。某些汽车的点火系统正是利用了这一点，在那里，流过火花线圈的电流被分流器截断，于是在火花塞上将产生电弧。尽管这不是瞬时产生的，但发生在一个很短的时间间隔里，从而可以产生一个很大的电压。在很短的间隔上产生很大电压等同于存在一个很大的电场，储存的能量将通过空气电离后的电弧路径而释放。

式(7.4)还可以用图形的方式来描述(及求解)，如例题7.3所示。

例题7.3 流过3 H电感的电流波形如图7.12(a)所示，求出电感电压并画出草图

电流在 $t = -1$ s之前为零，在下一个1 s内线性增加到1 A，并维持2s，然后在下一个1 s减小到零，其后一直保持为零。如果该电流流过3 H的电感，并且电压和电流的定义符合无源符号规则，那么可以应用式(7.4)得到电压波形。

因为电流在 $t < -1$ s时为零，所以电压在该时间区间也为零。然后电流以1 A/s的速率线性增大，这时将产生一个 $L\,di/dt = 3$ V的恒定电压。在随后的2 s时间区间里，电流为常量，因此电压为零。最后，电流线性减小且 $di/dt = -1$ A/s，这时 $v = -3$ V。对于 $t > 3$ s，$i(t)$是常量(为零)，所以在该时间区间 $v(t) = 0$。完整的电压的波形如图7.12(b)所示。

下面来研究电流在0~1 A之间上升和下降速度更快时对电压产生的影响。

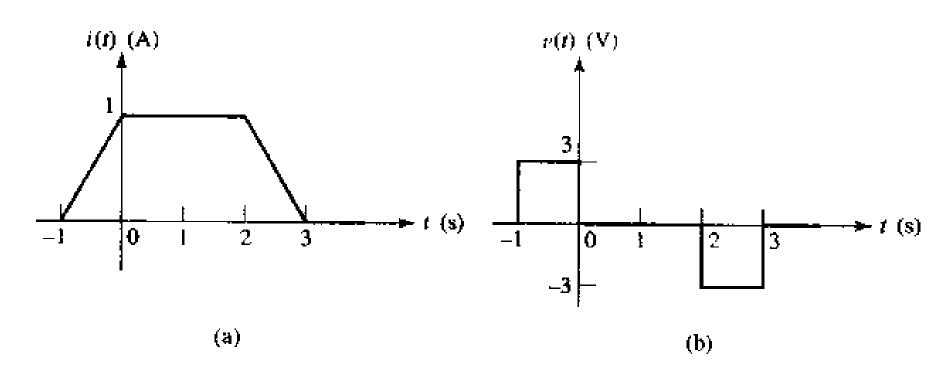


图7.12 (a)流过3 H电感的电流波形；(b)相应的电压波形，$v = 3di/dt$

例题7.4 将图7.13(a)所示的电流波形加到例题7.3中的电感上，求相应的电感电压

注意到，这时电流上升和下降的时间区间减小为0.1 s，这样，相应导数的幅度均增大为原来的10倍，这时的电流和电压曲线分别如图7.13(a)和图7.13(b)所示。有趣的是，对于图7.12(b)和7.13(b)所示的电压波形，各电压脉冲的面积均为3 V·s。

继续减小这两个时间区间的长度将使电压幅度成比例增大，但这只发生在电流上升或者下降区间。电流的突变将产生无穷大的电压尖峰(每个尖峰的面积均为3 V·s)，如图7.14(a)和图7.14(b)所示。或者从相反但同样有效的另一个角度来看，产生无穷大电压尖峰需要电流的突变。

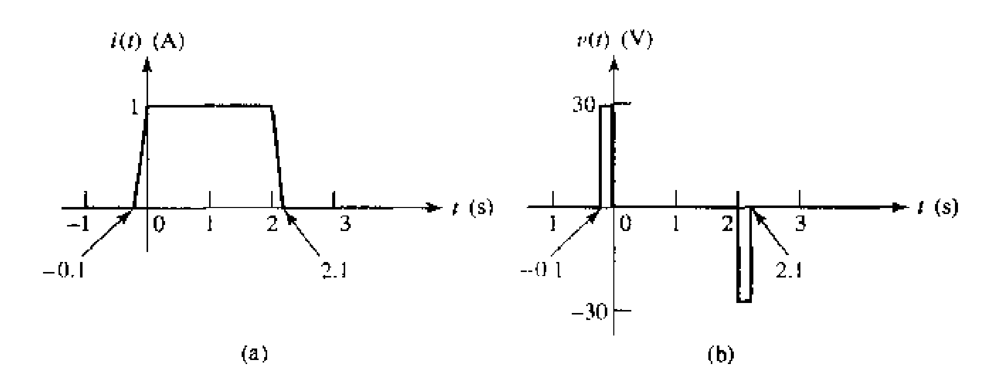


图 7.13　(a)图 7.12(a)中的电流从 0 A 变到 1 A,从 1 A 变到 0 A 的时间区间减小为原来的1/10;(b)相应的电压波形。为清晰起见,放大了脉冲宽度

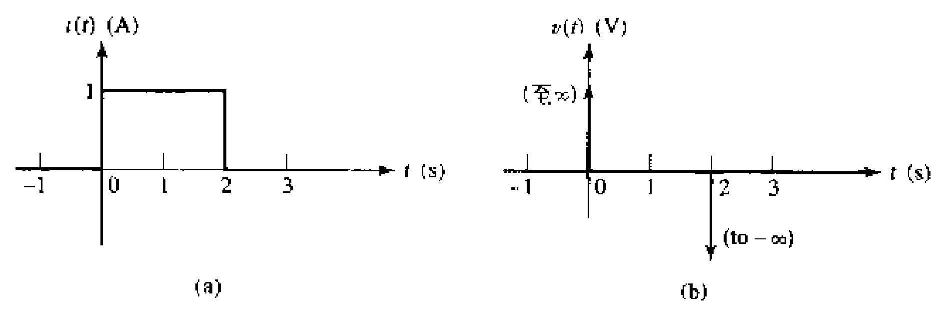


图 7.14　(a)图 7.13(a)中电流从 0 A 变到 1 A 和从 1 A 变到 0 A 所要求的时间减小到 0,上升和下降为突变;(b)3 H 电感上的电压由一个正无穷大尖峰和一个负无穷大尖峰组成

练习

7.3　某个 0.2 H 电感上流过的电流如图 7.15 所示.采用无源符号规则,求出 t 为下列值时的 v_L:(a)0;(b)2 ms;(c)6 ms。

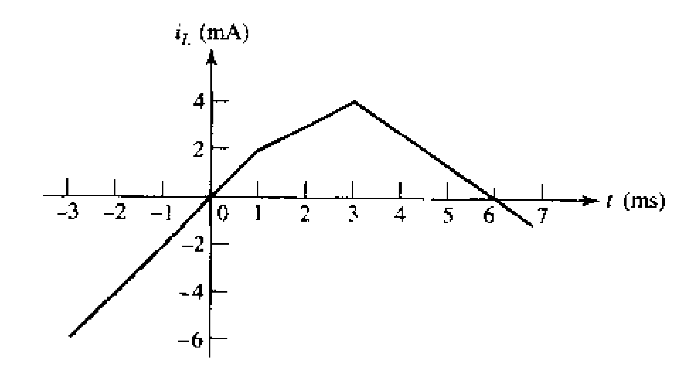


图 7.15

答案:0.4 V;0.2 V;−0.267 V

7.3.2　电压−电流的积分关系

前面采用了下面简单的微分公式来定义电感:

$$v = L\frac{di}{dt}$$

并且,根据这个关系式已经得到了电感的几个特性。比如,对于直流电流而言,可以将电感视为短路;另外,不允许电感电流从一个值跳变到另一个值,因为这要求电感具有无穷大的电压和功率。从这个简单的电感定义式中还可以得到其他信息。将公式改写成稍微不同的形式:

$$di = \frac{1}{L}v\ dt$$

然后来考虑对它的积分。首先考虑两个积分的积分限,因为需要求出时刻 t 的电流 i,所以这两个值就分别规定了公式两边的积分上限;同样,对于下限,不失一般性,假定电流在时刻 t_0 的电流为 $i(t_0)$,于是:

$$\int_{i(t_0)}^{i(t)} di' = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t')dt'$$

这样可以得到下面的公式:

$$i(t) - i(t_0) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} vdt'$$

或

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} vdt' + i(t_0) \tag{7.5}$$

式(7.4)以电流来表示电压,而式(7.5)则以电压来表示电流。式(7.5)还可以有其他表示形式,例如可以将定积分写成不定积分加上积分常数 k 的形式:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int vdt + k \tag{7.6}$$

进一步假定求解的是一个实际问题,这时可选取 t_0 为 $-\infty$,以保证电感初始时没有任何电流和能量。因此,如果 $i(t_0) = i(-\infty) = 0$,那么:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} vdt' \tag{7.7}$$

下面通过分析电感两端电压为确定值的一个例子来看上面几个积分的应用。

例题 7.5 一个 2 H 电感两端电压为 $6\cos 5t$ V,如果 $i(t = -\pi/2) = 1$ A,求电感电流

根据式(7.5)有:

$$i(t) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} 6\cos 5t'dt' + i(t_0)$$

或

$$i(t) = \frac{1}{2}\times\left(\frac{6}{5}\right)\sin 5t - \frac{1}{2}\times\left(\frac{6}{5}\right)\sin 5t_0 + i(t_0)$$
$$= 0.6\sin 5t - 0.6\sin 5t_0 + i(t_0)$$

第一项表明电感电流以正弦形式变化;第二项和第三项代表一个常量,当给定某个时刻的电流值后就可以求出这个常量。因为已知 $t = -\pi/2$ s 时的电流为 1 A,即当 t_0 为 $-\pi/2$ 时 $i(t_0) = 1$,于是得到:

$$i(t) = 0.6\sin 5t - 0.6\sin(-2.5\pi) + 1$$

或

$$i(t)=0.6\sin 5t+1.6$$

还可以从式(7.6)出发得到相同的结果。已经有：

$$i(t)=0.6\sin 5t+k$$

通过令 $t=-\pi/2$ 时电流为 1 A，可以得到 k 的值为：

$$1=0.6\sin(-2.5\pi)+k$$

或

$$k=1+0.6=1.6$$

于是，和前面一样，得到：

$$i(t)=0.6\sin 5t+1.6$$

如果使用式(7.7)求解，则对于这个特定的电压值而言将会出现问题。因为该公式是建立在 $t=-\infty$ 时电流为零的基础之上，这对于实际的物理世界来说是正确的，但现在处理的是一个数学模型，其中的元件和激励函数都是理想的。应用式(7.7)产生的困难在于积分后将得到：

$$i(t)=0.6\sin 5t'\big|_{-\infty}^{t}$$

试试通过积分下限求出该积分：

$$i(t)=0.6\sin 5t-0.6\sin(-\infty)$$

但是正弦函数在 $\pm\infty$ 处的值是不确定的，不能求出该表达式。所以只有当求解的函数在 $t\to-\infty$ 时趋于零时才能使用式(7.7)。

但是，不能简单地下结论说以后将只采用哪个公式，因为这些公式各有其优越性，这取决于不同的问题和应用。式(7.5)是一种通用的方法，它明显地表明了积分常数为电流。式(7.6)是式(7.7)的简洁形式，但是它没有很好地体现出积分常数的性质。最后需要指出的是，式(7.7)是一个很好的表达式，因为其中不含有任何常数，但是，它只适用于当 $t=-\infty$ 时电流为零或者当 $t=-\infty$ 时电流有确切解析表达式的情形。

7.3.3 电感储存的能量

下面来看功率和能量。吸收功率用电压和电流的乘积表示为：

$$p=vi=Li\frac{di}{dt}$$

电感吸收的能量 w_L 储存在线圈周围的磁场中，可用功率在所求时间区间的积分表示：

$$\int_{t_0}^{t}pdt'=L\int_{t_0}^{t}\frac{di}{dt'}dt'=L\int_{i(t_0)}^{i(t)}idi=\frac{1}{2}L\{[i(t)]^2-[i(t_0)]^2\}$$

于是：

$$w_L(t)-w_L(t_0)=\frac{1}{2}L\{[i(t)]^2-[i(t_0)]^2\}$$

这里再一次假定了电流在时刻 t_0 为 $i(t_0)$。在使用该能量表达式时，通常假定 t_0 选取为电流为零的时刻；通常还假定该时刻的能量为零，于是电感储存的能量可以用下面的表达式简单表示为：

$$w_L(t)=\frac{1}{2}Li^2$$

根据以上分析可以知道，能量为零的参考时刻就是电感电流为零的任何时刻。在参考时刻后面的任何时刻，如果电流为零，则线圈中就没有储存能量，而只要电流不为零，无论其方向或符号如何，都必然有能量储存在电感中。从而，功率可以在某段时间传送到电感，然后又会被释放出来，对于理想电感而言，所有储存的能量都可以被释放出来。但是，实际线圈都是用实际的导线来制造的，这样必然具有一定的电阻，这时，能量就不能够无损耗地储存和释放。

可以用一个简单的例子来说明上面的结论。在图 7.16 中，3 H 电感与 0.1 Ω 电阻以及正弦电流源 $i_s=12\sin\frac{\pi t}{6}$ A 相串联，电阻可以看做为实际线圈的导线中必然存在的电阻。

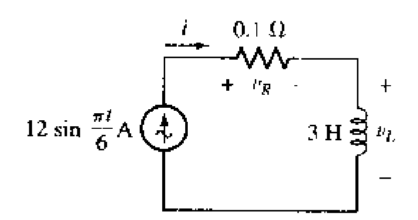


图 7.16 将正弦电流作为激励函数接入到串联 *RL* 电路中，其中的0.1Ω代表制造电感的实际导线的电阻

例题 7.6 求图 7.16 中电感中能储存的最大能量，并计算有多少能量在电感的储存和释放的过程中被消耗

电感储存的能量为：

$$w_L=\frac{1}{2}Li^2=216\sin^2\frac{\pi t}{6}\ \text{J}$$

该能量从 $t=0$ 时的零增加到 $t=3$ s 时的 216 J，因此在电感中储存的最大能量为 216 J。

电阻两端的电压为：

$$v_R=Ri=1.2\sin\frac{\pi t}{6}\ \text{V}$$

电感两端的电压可由电感的定义式给出：

$$v_L=L\frac{di}{dt}=3\frac{d}{dt}\left(12\sin\frac{\pi}{6}t\right)=6\pi\cos\frac{\pi}{6}t\ \text{V}$$

能量在 $t=3$ s 达到峰值后，又逐渐被电感完全释放出来。下面来看 216 J 能量在 6 秒的时间内由于储存和释放所消耗的部分。容易求得电阻消耗的功率为：

$$p_R=i^2R=14.4\sin^2\frac{\pi t}{6}\ \text{W}$$

于是可以得到在 6 s 的时间内在电阻上转变为热量的能量为：

$$w_R=\int_0^6 p_R dt=\int_0^6 14.4\sin^2\frac{\pi}{6}t\,dt$$

或

$$w_R=\int_0^6 14.4\times\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\cos\frac{\pi}{3}t\right)dt=43.2\ \text{J}$$

即在 6 s 的时间内储存和释放 216 J 能量的过程中，一共消耗了 43.2 J 的能量。这个数值

相当于所储存的最大能量的 20%，不过，对于具有这么大电感的线圈来说这是合理的；对于电感值为 100 μH 左右的线圈，可以估计出这个值大约为 2%到 3%。

练习

7.4　假定图 7.17 中的电感 $L = 25$ mH，(a) 如果 $i = 10\ te^{-100t}$，求 $t = 12$ ms 时的 v；(b) 如果 $v = 6te^{-12t}$，$i(0) = 10$ A，求 $t = 0.1$ s 时的 i。如果 $i = 8(1 - e^{-40t})$ mA，求(c) $t = 50$ ms时传送到电感的功率和(d) $t = 40$ ms 时电感储存的能量。

图 7.17

答案： -15.06 mV；24.0A；7.49 μW；0.510 μJ

下面来概括一下由定义式 $v = L di/dt$ 导出的电感的 4 个重要特性。

7.3.4 理想电感的重要特性

1. 如果流过电感的电流不随时间变化，则电感两端的电压为零，因此，电感是“直流短路”的。
2. 电感两端的电压为零时仍然可以储存能量，例如当流过它的电流为恒定值时。
3. 不可能在零时间间隔内改变流过电感的电流，因为这要求电感两端的电压为无穷大。可以将电感对于电流突变的抵抗类比为物体对于速度突变的抵抗。
4. 理想电感只储存能量不消耗能量。这在数学模型上是正确的，但是对于实际电感而言它并不正确，因为实际电感总存在一定的电阻。

如果将上面这几句话的某些词语用它们的“对偶”词语来替换，即将“电感”替换为“电容”，“电流”替换为“电压”，“流过”替换为“两端”，短路替换为“开路”，就得到了前面给出的关于电容的特性的表达，反之亦然。这是一件很有趣的事，在 7.7 节中将详细讨论这种对偶关系。

7.4 电感和电容的组合

既然认为电感和电容为无源元件，那么需要验证一下以前得到的电阻电路的分析方法是否还有效。同时，采用类似于第 3 章中电阻组合的方法，可以把电感或电容串联或并联组合用它们的等效电路来替换。

首先来看两个基尔霍夫定律，这两个定律的正确性是不言而喻的。因为这两个定律成立的前提对组成网络的元件类型并没有什么限制，所以对于电感和电容它们都是正确的。

7.4.1 电感的串联

现在开始将以前用于简化电阻组合的过程应用到简化电感和电容组合上。首先，考虑将一个理想电压源加到由 N 个电感串联的组合上，如图 7.18(a)所示。需要求出单个等效电感 L_{eq}，用它代替串联的电感组合后电流 $i(t)$ 不改变。等效电路图如图 7.18(b)所示。对原电路运用 KVL，有：

$$v_s = v_1 + v_2 + \cdots + v_N$$

$$= L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \cdots + L_N \frac{di}{dt}$$

$$= (L_1 + L_2 + \cdots + L_N)\frac{di}{dt}$$

或者,简写为:

$$v_s = \sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N} L_n \frac{di}{dt} = \frac{di}{dt}\sum_{n=1}^{N} L_n$$

而对于等效电路,有:

$$v_s = L_{eq}\frac{di}{dt}$$

从而得到等效电感为:

$$L_{eq} = (L_1 + L_2 + \cdots + L_N)$$

或

$$L_{eq} = \sum_{n=1}^{N} L_n$$

串联电感组合的等效电感值为各电感的和,这与串联电阻组合所得到的结果完全相同。

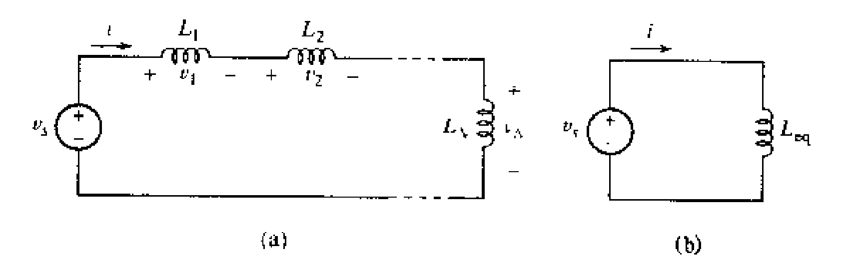


图 7.18 (a)N个电感的串联;(b)其等效电路,其中$L_{eq} = L_1 + L_2 + \cdots + L_N$

7.4.2 电感的并联

对原电路列出惟一的节点方程,可以得到并联电感组合的等效电感,如图 7.19(a)所示:

$$i_s = \sum_{n=1}^{N} i_n = \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{L_n}\int_{t_0}^{t} v\,dt + i_n(t_0)\right]$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{L_n}\right)\int_{t_0}^{t} v\,dt + \sum_{n=1}^{N} i_n(t_0)$$

将它与图 7.19(b)所示的等效电路得到的结果相比较:

$$i_s = \frac{1}{L_{eq}}\int_{t_0}^{t} v\,dt + i_s(t_0)$$

根据基尔霍夫电流定律可知,$i_s(t_0)$必须等于 t_0 时刻各支路的电流和,所以这两个积分必然相等,因此:

$$L_{eq} = \frac{1}{1/L_1 + 1/L_2 + \cdots + 1/L_N}$$

对于两个电感并联的特殊情形:

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

可以看到，并联电感组合与并联电阻组合的结果完全相同。

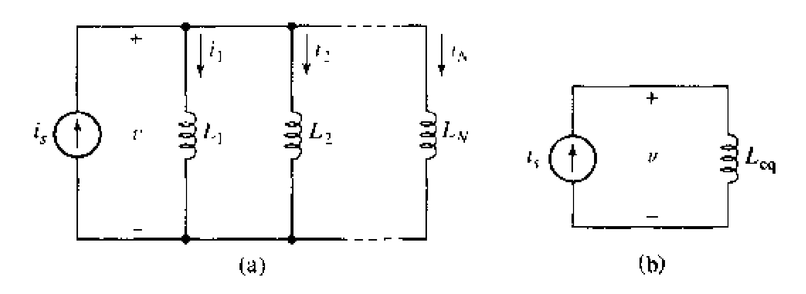


图 7.19　(a) N 个电感的并联；(b) 其等效电路，其中 $L_{eq} = [1/L_1 + 1/L_2 + \cdots + 1/L_N]^{-1}$

7.4.3　电容的串联

为求出 N 个串联电容的等效电容，利用图 7.20(a)的电路以及图 7.20(b)的等效电路可以写出：

$$v_s = \sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{C_n}\int_{t_0}^{t} i\,dt + v_n(t_0)\right]$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{C_n}\right)\int_{t_0}^{t} i\,dt + \sum_{n=1}^{N} v_n(t_0)$$

和

$$v_s = \frac{1}{C_{eq}}\int_{t_0}^{t} i\,dt + v_s(t_0)$$

根据基尔霍夫电压定律可知，$v_s(t_0)$ 必须等于 t_0 时刻的各电容电压的和，从而：

$$C_{eq} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2 + \cdots + 1/C_N}$$

可以看到，串联电容组合与串联电导组合的结果相同，或者说与并联电阻组合的结果相同。对于两个电容的串联情形，有：

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

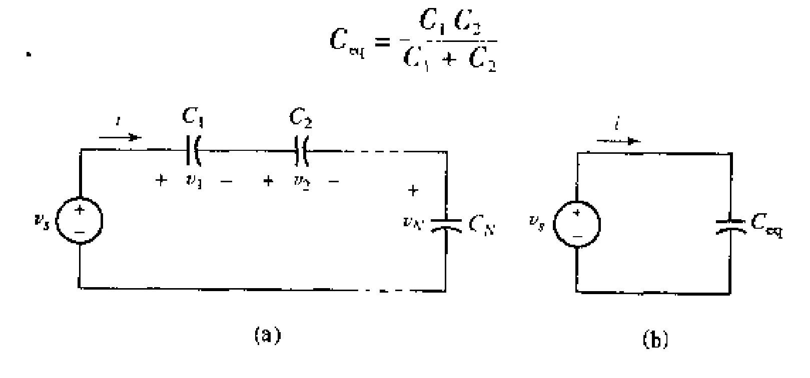
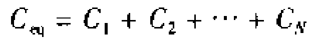


图 7.20　(a) N 个电容的串联；(b) 其等效电路，其中 $C_{eq} = [1/C_1 + 1/C_2 + \cdots + 1/C_N]^{-1}$

7.4.4 电容的并联

最后，利用图 7.21 中的电路，可以得到与 N 个并联电容等效的电容值为：



$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_N$$

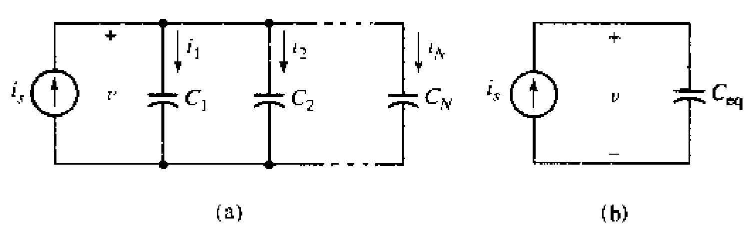


图 7.21 (a)N 个电容的并联；(b)其等效电路，其中 $C_{eq} = C_1 + C_2 + ... + C_N$

得到这个结果并不让人感到惊讶，即并联电容组合与前面串联电阻组合的结果相同，这就是说，简单地将所有的电容相加即可。

上面这些公式都非常有用，因此值得记住它们。电感的并联和串联公式与相应的电阻公式相同，因而它们通常被认为是"显然"的，而对于电容的串联和并联相应的表达式需要特别注意，因为它们的形式与电阻或电感相反，如果不注意的话，往往会犯错误。

例题 7.7 利用串联和并联组合的简化方法，化简图 7.22(a)所示的网络

首先把串联的 6 μF 和 3 μF 电容组合成等效的 2 μF 电容，然后该电容又与 1 μF 电容并联，得到等效电容为 3 μF。另外，3 H 和 2 H 电感已用等效的 1.2 H 代替，并且把它和另外的 0.8 H 加起来，得到总的等效电感为 2 H。这个大大简化后的等效网络如图 7.22(b)所示。

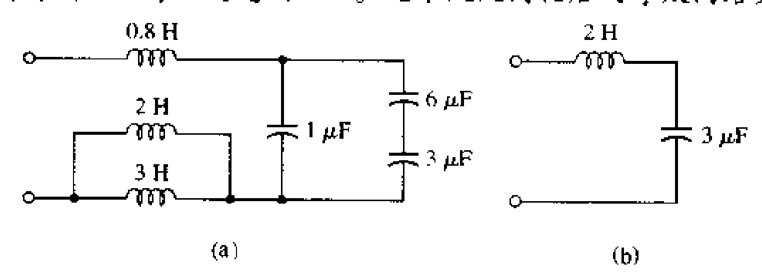


图 7.22 (a)给出的 LC 网络；(b)简化后的等效电路

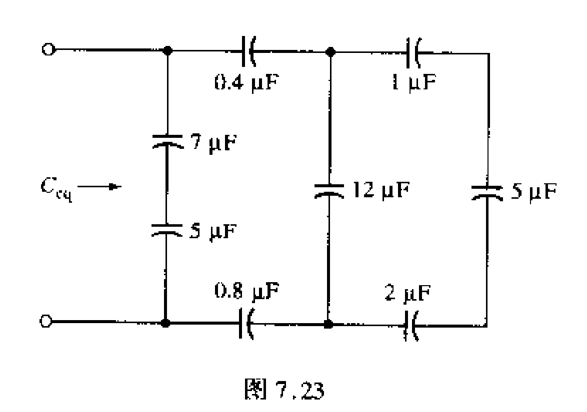


图 7.23

练习

7.5 求图7.23所示网络的 C_{eq}。

答案:3.18 μF

图7.24所示网络含有3个电感和3个电容,但是其中并没有任何并联或串联的电感或电容可以合并,所以不能用上面的方法来简化该网络。

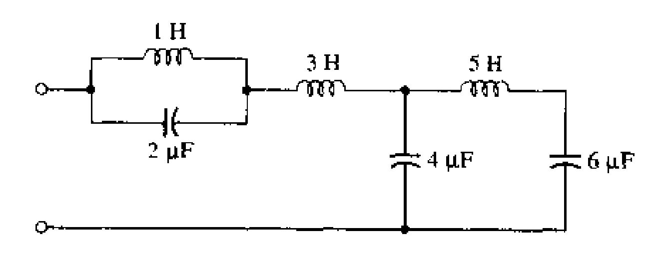


图7.24 一个 *LC* 网络,其中没有任何可合并的并联或串联的电感或电容

7.5 线性推论

下面开始讨论节点和网孔分析。既然知道基尔霍夫定律对电感和电容仍然适用,那么根据这个定律对要分析的电路列出足够多的独立方程组应该不会有困难。但是,这些方程是常系数线性积分微分方程,很难将它们描述出来,更不用说去求解。所以,这里写出它们的目的只是为了熟悉如何在 *RLC* 电路中应用基尔霍夫定律,在后面的章节中将讨论简单情形下的求解。

例题7.8 如图7.25所示电路,写出正确的节点方程

选取节点电压如图7.25所示,对流出中间节点的电流求和,有:

$$\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}(v_1 - v_s)\,dt + i_L(t_0) + \frac{v_1 - v_2}{R} + C_2\frac{dv_1}{dt} = 0$$

其中,$i_L(t_0)$是在积分起始时刻的电感电流的值。对于右边的节点:

$$C_1\frac{d(v_2 - v_s)}{dt} + \frac{v_2 - v_1}{R} - i_s = 0$$

重新写出上面这两个公式,得到:

$$\frac{v_1}{R} + C_2\frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}v_1\,dt - \frac{v_2}{R} = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}v_s dt - i_L(t_0)$$

$$-\frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{R} + C_1\frac{dv_2}{dt} = C_1\frac{dv_s}{dt} + i_s$$

这些就是前面说过的积分微分方程,它们有几个有趣的特性。首先可以看到,电压源 v_s 恰好分别以积分和微分的形式出现在两个公式中,而不是简单地以 v_s 的形式出现。因为所有电源在所有时刻的值都是确定的,所以可以求出它们的积分或者微分。其次,电感的初始电流 $i_L(t_0)$相当于中间节点方程中的(并且是恒定的)电流源。

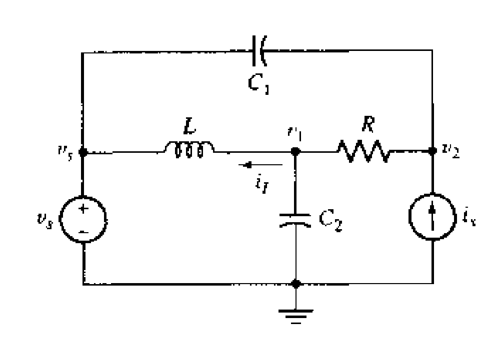


图 7.25 一个 4 节点 *RLC* 电路，已标出各节点电压

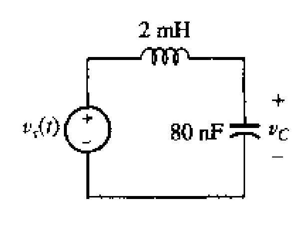


图 7.26

练习

7.6 如图 7.26 所示电路中 $v_C(t) = 4\cos 10^5 t$ V，求 $v_s(t)$。

答案：$-2.4\cos 10^5 t$ V。

现在不去求解积分微分方程。不过，有必要指出的是，当电压激励函数为正弦函数时，可以分别对三个无源元件定义电压－电流比（称为阻抗），或者电流－电压比（称为导纳）。这样，上面方程中的两个节点电压前的因子将简化为简单的因子，于是方程组变成了线性的代数方程组，这样就可以和以前一样采用行列式或者简单的线性消元法来求解。

把线性性质应用于 *RLC* 电路中将会简化分析。根据前面对线性电路的定义知，*RLC* 电路也是线性电路，因为电感和电容的电压－电流关系为线性关系。例如对于电感，有：

$$v = L\frac{di}{dt}$$

将电流乘以某个常量 K，电压也会增大为原来的 K 倍。对于积分形式：

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt' + i(t_0)$$

可以看到，如果各项都乘以因子 K，那么电流的初始值也必然增大相同的倍数。

对电容进行类似的分析可知它也是线性的。于是，由独立电源、线性受控源和线性电阻、电感和电容组成的电路都是线性电路。

同样，这些线性电路中响应和激励函数也成正比，这可以通过从一般的积分微分方程组出发去证明它。首先，将各方程中的含有 Ri，$L\,di/dt$，$1/C\int i\,dt$ 的项放在方程左边，而将独立电源的电压放在右边。比如其中的一个方程可能具有下面的形式：

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt + v_C(t_0) = v_s$$

如果现在令每个独立电源都增大 K 倍，那么每个方程的右边都增大了 K 倍。现在在左边的各项或者是含有某个回路电流，或者是初始电容电压的线性项。为了使得所有响应（回路电流）也增大 K 倍，很显然必须把初始电容电压也增大 K 倍，这就是说，必须将电容初始电压看做独立电源，这样它也增大 K 倍。同样地，在节点分析中电感初始电流也应当看做独立电源。

这样，激励源和响应之间的比例关系可以扩展到一般的 *RLC* 电路，这样叠加原理依然适用。需要强调的是，在应用叠加原理时，电容初始电压和电感初始电流必须当成独立电源看待。在第 5 章中我们知道，叠加原理是电阻电路线性特性的必然结果。电阻电路的线性性质

是因为电阻的电压－电流关系和基尔霍夫定律均是线性的

但是，在对 RLC 电路应用叠加原理之前，首先有必要导出只存在一个独立电源时的求解电路方程组的方法。这时应该很明确，线性电路的响应幅度和激励源的幅度成正比。在以后使用叠加原理时，要考虑到 $t = t_0$ 时的电感电流或者电容电压相当于电源，并且在适当的时候将它们移去。

戴维南定理和诺顿定理成立的基础是电路的线性性质、基尔霍夫定律和叠加原理。一般的 RLC 电路都满足这些要求，因此，任何线性电路都可以用这两个定理来分析，其中线性电路可以包含独立电压源和电流源，线性受控电压源和电流源，以及线性电阻、电感和电容等等。在这里没有必要重复这两个定理，因为前面关于它们的表述同样适用于一般的 RLC 电路。

7.6 带电容的简单运放电路

前一章已经介绍了几种基于理想运放的放大电路，可以发现几乎在所有的情形下，都是通过电阻比值的组合形式将输出与输入电压联系起来。如果将其中的一个或多个电阻替换成电容，那么可以得到一些有趣的电路，它们的输出与输入电压的微分或者积分成正比。这些电路广泛应用于许多实际电路中，例如可以将速度传感器和运放电路连接起来得到与加速度成正比的信号，又如可以对一段给定时间内所测量的电流积分而得到表示向金属电极注入总电荷的输出信号。

使用理想运放来构造积分器时，可以将运放的同相输入端接地，然后将理想电容作为反馈元件接到输入端和输出端之间，再将电源 v_s 通过一个理想电阻接到反相输入端，如图 7.27 所示。

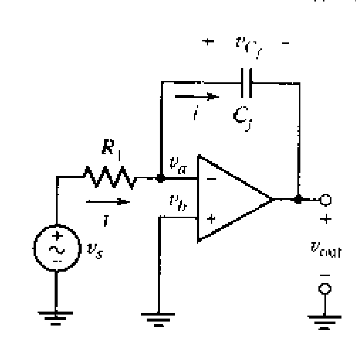


图 7.27 用理想运放构造的积分器

对反相输入端应用节点分析，有：

$$0 = \frac{v_a - v_s}{R_1} + i$$

可以将电流 i 与电容两端的电压联系起来：

$$i = C\frac{dv_{C_f}}{dt}$$

于是得到：

$$0 = \frac{v_a - v_s}{R_1} + C_f\frac{dv_{C_f}}{dt}$$

根据理想运放规则 2 可知 $v_a = v_b = 0$，所以：

$$0=\frac{-v_s}{R_1}+C_f\frac{dv_{C_f}}{dt}$$

对 v_{out}积分并求解可以得到：

$$v_{C_f}=v_a-v_{out}=0-v_{out}=\frac{1}{R_1C_f}\int_0^t v_s dt'+v_{C_f}(0)$$

或

$$v_{out}=-\frac{1}{R_1C_f}\int_0^t v_s dt'-v_{C_f}(0) \tag{7.8}$$

这样，就用一个电阻、一个电容和一个运放得到了积分器。可以看到，输出的第一项是$1/RC$乘以输入在$t'=0$到t区间的积分的负值，第二项是$(RC)^{-1}$的初始值的负值。如果需要，可以通过选取合适的 R 和 C 值使$(RC)^{-1}$等于1，比如取 $R=1\ \text{M}\Omega$ 和 $C=1\ \mu\text{F}$，而取其他值时则$(RC)^{-1}$不等于1，这时输出电压将相应增大或者减小。

在结束对积分电路的讨论以前，喜欢思考的读者可能会问："可以用电感来替换电容来得到一个微分电路吗？"确实可以，不过在电路设计中，考虑到电感的尺寸大、重量大、成本高以及它的寄生电阻和电容，因此总是尽可能地少用电感。事实上，如果将图7.27中电阻和电容的位置交换，就可以得到微分器。

例题7.9　如图7.28所示的运放电路，导出输出电压的表达式

首先，在反相输入端写出节点公式，已知 $v_{C_1}\triangleq v_a-v_s$：

$$0=C_1\frac{dv_{C_1}}{dt}+\frac{v_a-v_{out}}{R_f}$$

根据理想运放规则2，有 $v_a=v_b=0$，于是：

$$C_1\frac{dv_{C_1}}{dt}=\frac{v_{out}}{R_f}$$

解出 v_{out}：

$$v_{out}=R_fC_1\frac{dv_{C_1}}{dt}$$

因为 $v_{C_1}=v_a-v_s=-v_s$，所以：

$$v_{out}=-R_fC_1\frac{dv_s}{dt}$$

所以，交换图7.28所示电路中电阻和电容的位置，就得到了微分电路。

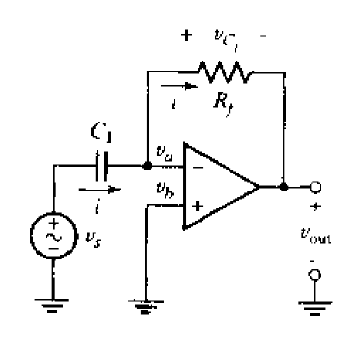


图7.28　用理想运放构成微分器

练习

7.7　如图7.29所示电路，导出以 v_{in} 表示的 v_{out} 的表达式。

答案：$v_{out} = -L_f/R_1\, dv_s/dt$

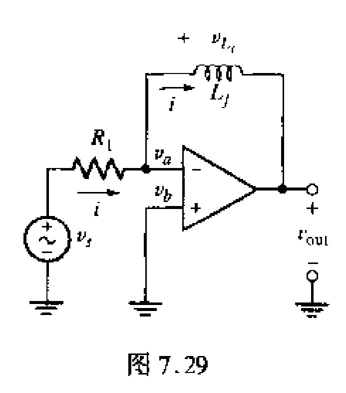


图7.29

7.7　对偶

对偶性可以应用于很多基本的工程概念中，本节将以电路方程组的形式来定义对偶。如果描述一个电路特性的网孔方程组与描述另一个电路特性的节点方程组具有相同的数学形式，则称两个电路是对偶的。如果一个电路的各网孔方程均与另一个电路相应的节点方程在数值上也相同，则称它们为完全对偶(exact duals)。当然，电流变量与电压变量本身不可能相同，对偶性本身仅是指对偶电路所表现出来的性质。

下面通过列出图7.30所示电路的两个网孔方程来解释该定义，并且用这个定义来构造一个完全对偶电路。设两个网孔电流为 i_1 和 i_2，则网孔方程为：

$$3i_1 + 4\frac{di_1}{dt} - 4\frac{di_2}{dt} = 2\cos 6t \tag{7.9}$$

$$-4\frac{di_1}{dt} + 4\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{8}\int_0^t i_2\,dt + 5i_2 = -10 \tag{7.10}$$

注意到上式假定了 $t=0$ 时电容电压 v_C 为10 V。

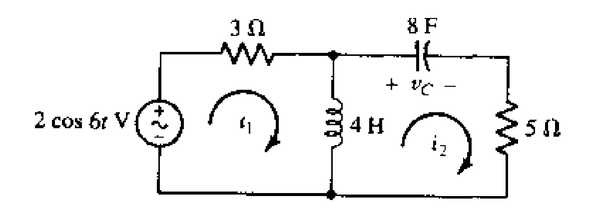


图7.30　用对偶的定义求该电路的对偶电路

现在就可以根据以上两个方程构造出另外两个方程，它们描述了所给电路的对偶电路。因为希望它们为节点方程，所以首先把方程(7.9)和方程(7.10)中的网孔电流 i_1 和 i_2 替换成相对参考节点的节点电压 v_1 和 v_2，得到：

$$3v_1 + 4\frac{dv_1}{dt} - 4\frac{dv_2}{dt} = 2\cos 6t \tag{7.11}$$

$$-4\frac{dv_1}{dt}+4\frac{dv_2}{dt}+\frac{1}{8}\int_0^t v_2\,dt+5v_2=-10 \tag{7.12}$$

下面来构造上面两个节点方程所表示的电路。

首先画一条线用来代表参考节点，然后可以在 v_1 和 v_2 的正参考处放置两个节点。

方程(7.11)表明节点1和参考节点之间存在一个 $2\cos 6t$ A 的电流源，它提供了流入节点1的电流。这个公式还表明在节点1和参考节点之间存在一个3 S电导。下面来看方程(7.12)，首先考虑非公共项，这就是说没有出现在方程(7.11)中的项，这个非公共项说明在节点2和参考节点之间存在一个8 H电感和一个5 S电导(它们相互并联)。方程(7.11)和方程(7.12)中类似的两项说明节点1和2之间存在一个4 F电容。方程(7.12)右边的常数项为电感电流在 $t=0$ 时的值，换句话说，$i_l(0)=10$ A。构造出的对偶电路如图7.31所示，因为这两组方程在数值上也相同，所以两个电路为完全对偶。

事实上，可以用更简单的方法来得到对偶电路，因为没有必要列出方程。为构造电路的对偶，可以通过考虑该电路的网孔方程来得到。因为每一个网孔需要有一个非参考节点与之对应，另外还必须有一个参考节点，所以可以在所给电路中的各网孔分别放置一个节点，然后在电路图附近画一条线或者画一个将电路图围起的环作为参考节点。位于两个网孔之间的每个公共元件产生相应网孔方程中的相同项(不包括符号)，必须将它替换为这样一个元件，使之产生两个节点方程中的对偶项，于是这个对偶元件必然连接在公共元件所在的两个网孔内的两个非参考节点之间。

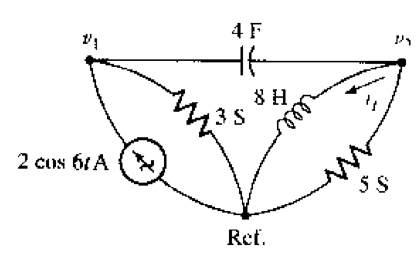


图7.31 图7.30所示电路的完全对偶

如果将电感替换成电容，电容替换成电感，电导替换成电阻，电阻替换成电导，则两组方程的数学模型相同。因此图7.30所示电路中网孔1和网孔2之间的4 H电感在对偶电路中对应于节点1和2之间的4 F电容。

如果某个元件只位于单个网孔中，则该元件的对偶必然位于这个网孔在对偶电路中对应的节点与参考节点之间。重新来看图7.30，电压源 $2\cos 6t$ V 仅在网孔1中，则它的对偶电流源 $2\cos 6t$ A 位于非参考节点1和参考节点之间。因为电压源为顺时针方向，所以电流源的方向必然为流入非参考节点。最后，还需要求出给定电路中8 F电容初始电压的对偶。从前面两个方程组可以看出，电容初始电压的对偶为对偶电路中流过电感的初始电流，其大小与初始电压相同；通过将所给电路中初始电压和对偶电路中的初始电流均视为电源，容易判断出该电流的方向。因此，如果将所给电路中的 v_C 看做电源，那么它将以 $-v_C$ 的形式出现在网孔方程的右边；在对偶电路中，如果将电流 i_L 看做电源，那么它将以 $-i_l$ 的形式出现在网孔方程的右边。两个对偶方程组的形式完全一样，因此将 v_C 和 i_l 看做电源时，这两个电源必然具有相同的符号，所以如果 $v_C(0)=10$ V，那么 $i_L(0)$ 必然为10 A。

将图7.30所示电路重新画出，如图7.32所示，可以直接在原电路图上进行操作得到其完全对偶电路。对原电路图的每一个元件，采用下面的方法依次画出其对偶，其对偶元件位于以该元件为公共元件的两个网孔内的两个对偶节点之间。在所给电路外围画一条线表示参考节点，可以更加直观。将求得的对偶电路画成更标准的形式后如图7.31所示。

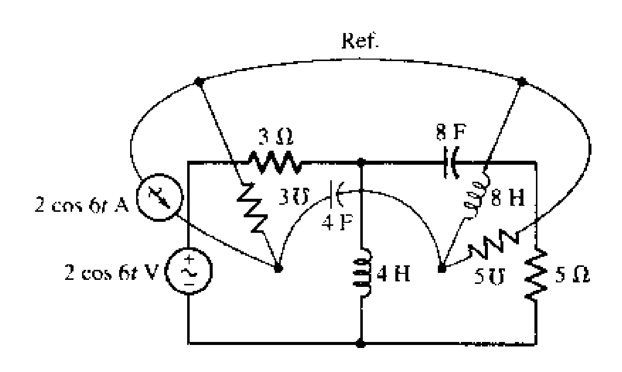


图7.32　直接从图7.28电路构造出的对偶电路

构造对偶电路的另一个例子如图7.33(a)和图7.33(b)所示。因为没有确定任何元件的值，所以这两个电路是对偶电路，但不一定是完全对偶的。通过在图7.33(b)所示对偶电路中的5个网孔中分别放置一个节点，然后按前面的步骤可以重构原电路。

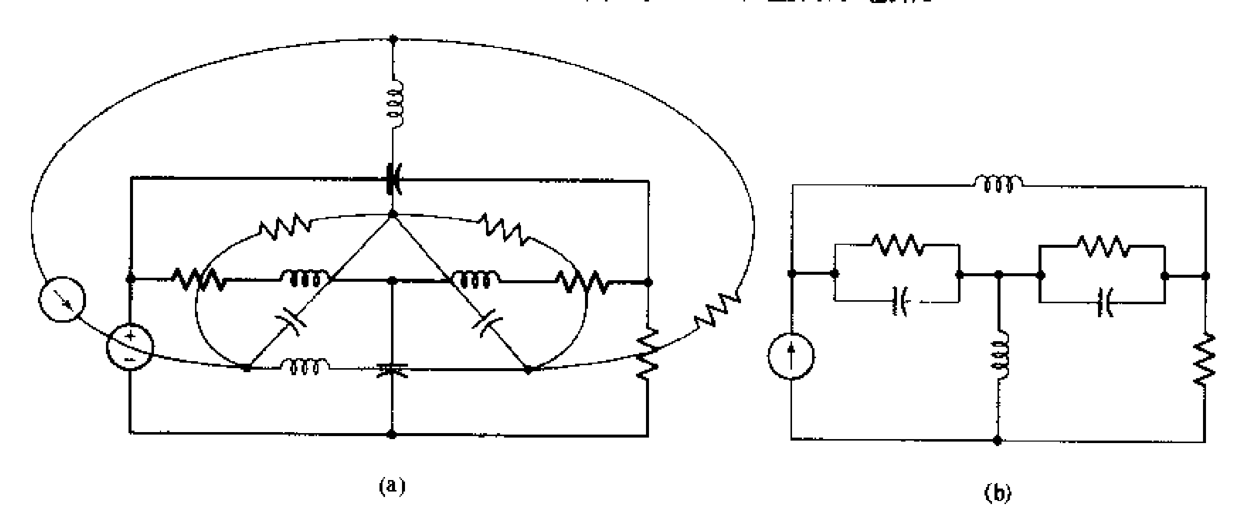


图7.33　(a)在所给电路图(粗体)中直接画出原电路的对偶；(b)为便于与原来的电路相比较，以更标准的形式画出的对偶电路

对偶的概念还可以运用到电路分析的过程和描述电路工作情况的语言表述中。例如，如果给定一个电压源与一个电容的串联，那么可以做出下面的结论："电压源将产生流过电容的电流"，而用对偶语言可将其表述为："电流源将产生电感两端的电压。"对于不那么严格的表述，例如"电流沿串联电路流过，"则需要一些创造性才可以得到其对偶表述①。

前面已经说过了对偶元件、对偶语言表述和对偶电路，那么什么是对偶网络呢？考虑由电阻 R 与电感 L 串联组成的网络，这是一个双端网络，它的对偶存在，通过给该网络连接一个理想电源可以得到其对偶。这时，首先得出电源的对偶，然后将对偶电源并联一个与电阻 R 大

① 有人建议为，"电压存在于整个并联电路中"。

小相等的电导 G，再并联一个与电感 L 大小相等的电容 C，就得到了对偶网络。可以将对偶网络看做是连接到对偶电源的双端网络，它由 G 和 C 并联组成。

在结束对偶的讨论之前，需要指出的是，对偶是以网孔和节点方程为基础定义的。因为非平面电路不能用网孔方程组描述，所以非平面电路不存在对偶。

应该使用对偶性来减少工作量，因为对于一些简单的标准电路，如果已经分析过其对偶电路，就不必再分析了。所以当已分析了串联 RL 电路，那么就不需要仔细分析并联 RC 电路了，但并不是因为它没那么重要，而是因为已经知道了分析该网络的对偶方法。因为一些复杂电路并不是那样易于分析，所以使用对偶的方法通常并不能加速求解。

练习

7.8 写出图 7.34(a)所示电路的节点方程，并通过直接代入来验证 $v = -80e^{-10^6 t}$ mV 为其解。根据这个结论，对图 7.34(b)所示电路，求(a) v_1；(b) v_2；和(c) i。

答案：$-8e^{-10^6 t}$ mV；$16e^{-10^6 t}$ V；$-80e^{-10^6 t}$ mA

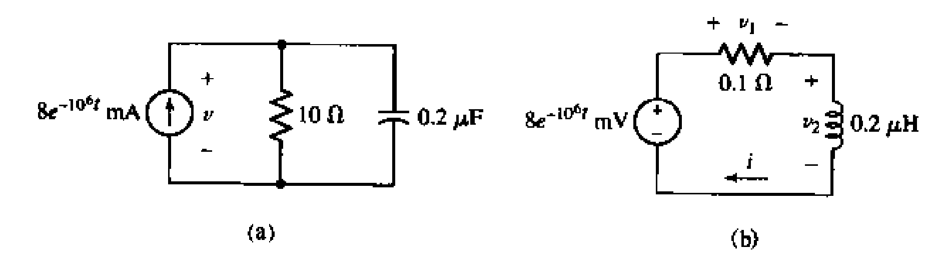


图 7.34

7.8 用 PSpice 对电容和电感建模

用 PSpice 来分析包含电感和电容的电路时，往往需要能够确定各元件的初始条件[例如 $v_C(0)$和 $i_L(0)$]。这可以通过双击元件符号来完成，双击后将产生图 7.35 所示的对话框。可以看到，除了可设定电容的值(默认值为 1 nF)外，还可设定初始条件(IC =)。双击电感的符号也得到一个类似的对话框。如果希望初始条件显示在原理图上(这总是一个好想法)，则可以单击 Change Display 按钮，然后做相应的选择即可。要注意的是，在原理图中放置电容时，初始为水平放置，初始电压的正参考端为它的左端。

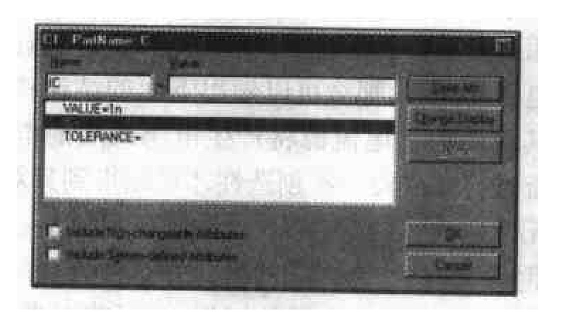


图 7.35 设置电容值和初始条件的对话框

7.8.1 PSpice

对图 7.36 所示电路的输出电压波形进行仿真，设 $v_s = 5 \sin 100t$ V，$R_1 = 100$ kΩ，$C_f = 4.7$ μF，以及 $v_C(0) = 2$ V。

首先，用原理图绘制工具画出该电路，并设置好电容两端电压的初始条件（图 7.37）。注意到，仿真前必须先把频率 100 rad/s 转换为 $100/2\pi = 15.92$ Hz。

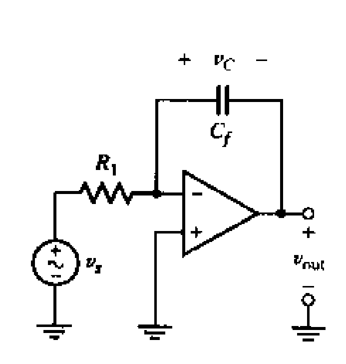


图 7.36　一个积分运放电路

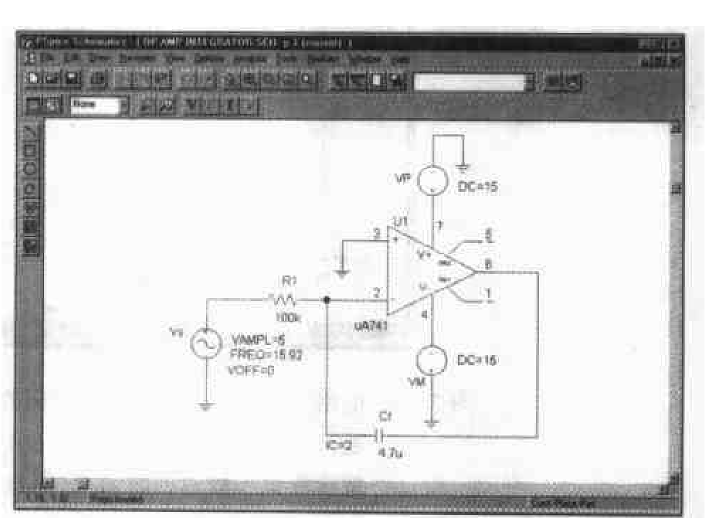


图 7.37　原理图绘制工具画出的图 7.36 所示的电路

为得到随时间变化的电压和电流，需要进行暂态分析。在 Setup 菜单中选择 Transient Analysis，将弹出如图 7.38 所示的对话框。其中 Final Time 表示仿真的结束时间，PSpice 将自动选择计算电压和电流值的离散时间点。有时 PSpice 会给出一个暂态解不收敛的出错信息，这时，需要在 Step Ceiling 中输入一个值，这个值表示计算时采用的最大时间步长（步长越小越好）。

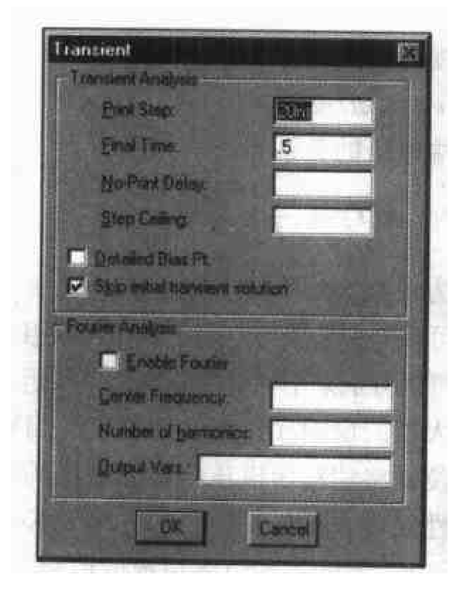


图 7.38　设置暂态分析的对话框。为了获得几个周期的结果（1/15.92≈0.06 s），选取最终时间为0.5 s

根据以前的分析，输出波形与输入波形的积分的相反数成正比，这可从图7.39中看出。电容上的2 V初始电压使得输出产生了−2 V的直流偏移，或者，根据式(7.8)可以知道输出电压的平均值为−2 V。图7.39画出了输入和输出波形。

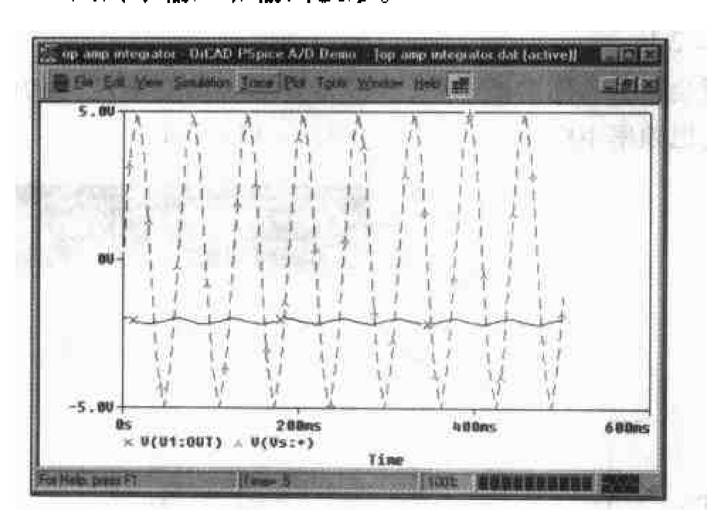


图7.39 电路的仿真输出结果。如果需要得到更平滑的曲线，可以通过设置更小的Step ceiling而得到，更小的Step ceiling意味着更多数目的时间点(但也增加了仿真运行的时间)

7.9 小结与复习

- 流过电容的电流表示为 $i = C\,dv/dt$。
- 电容两端的电压与流过它的电流的关系为：

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t')\,dt' + v(t_0)$$

- 电容对于直流电流可以视为开路。
- 电感两端的电压给出为 $v = L\,di/dt$。
- 流过电感的电流与它两端电压的关系为：

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt' + i(t_0)$$

- 电感对于直流电流可视为短路。
- 串联和并联电感的组合，可以分别采用与电阻串联和并联组合相同形式的方程来表示。
- 串联和并联电容的组合，可以分别采用与电阻并联和串联组合相同形式的方程来表示。
- 将电容作为反相运算放大器的反馈元件将使输出电压与输入电压的积分成正比。交换输入电阻和反馈电容的位置将使输出电压与输入电压的微分成正比。
- 因为电容和电感均为线性元件，所以仍然可以将KVL，KCL，叠加原理，戴维南和诺顿定理，以及节点和网孔分析应用于电容和电感组成的电路。
- 对偶概念从另外一个角度上建立了含有电感的电路与含有电容的电路之间的联系。
- PSpice中可以设置电容两端的初始电压和流过电感的初始电流。使用PSpice的暂态分

析，可以得到含有这类元件的电路的时域响应。

习题

1. 某电容由两块薄铝片构成，铝片直径为 1 cm，相隔 100 μm(0.1 mm)。(a)计算其电容，假定两块金属板之间为空气；(b)确定电容两端加上多大电压时，其储存的能量为 1 mJ。(c)在某个应用中可以提供 100 V 的电压，如果需要电容储存 2.5 μJ 的能量，则要求两块金属片板之间的相对介电常数 $\varepsilon/\varepsilon_0$ 为多大？
2. 一个硅材料面结型二极管的结电容可以用下式表示：

$$C_j = \frac{K_s\varepsilon_0 A}{W}$$

其中，对于硅 $K_s = 11.8$，ε_0 为真空介电常数，A 为横截面积，W 为耗尽层厚度。W 不仅与二极管的构造有关，还与接到两端的电压有关：

$$W = \sqrt{\frac{2K_s\varepsilon_0}{qN}(V_{bi} - V_A)}$$

二极管大量用于电子电路中，因为可以将二极管用做压控电容。假定上式的参数为 $N = 10^{18}\ \text{cm}^{-3}$，$V_{bi} = 0.57$ V，并令 $q = 1.6\times10^{-19}$ C，分别计算出横截面积为 $A = 1\ \mu\text{m}\times1\ \mu\text{m}$ 的二极管在加上电压 $V_A = -1$，-5 和 -10 V 时的电容。
3. 设计一个电容，其电容值可通过旋转手柄在 100 pF 和 1 nF 之间进行调节，并画出相应的电路图来解释你的设计。
4. 将电压 $v(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 3e^{-t/5}\ \text{V}, & t\geq 0 \end{cases}$ 加到 300 μF 电容的两端。(a)计算电容在 $t = 2$ ms 时储存的能量；(b)电容储存的能量在何时下降到其最大值的 37%（以秒为单位取整，四舍五入）？(c)确定 $t = 1.2$ s 时流过电容的电流；(d)计算在 $t = 2$ s 时电容向外部电路传送的功率。
5. 流过 47 μF 电容的电流如图 7.40 所示，计算电容两端在下列情况的电压：(a) $t = 2$ ms；(b) $t = 4$ ms；(c) $t = 5$ ms。
6. 已知流过电容的电流为 $i(t) = 7\sin \pi t$ mA，如果在 $t = 200$ ms 电容储存的能量为 3 μJ，计算该电容的大小。
7. (a)如果图 7.1 所示的电容大小为 0.2 μF，令 $v_C = 5 + 3\cos^2 200t$ V，求 $i(t)$。(b)电容储存的最大能量为多少？(c)如果 $t<0$ 时 $i_C = 0$，$t<0$ 时 $i_C = 8e^{-100t}$ mA，求 $t<0$ 时的 $v_C(t)$；(d)如果 $t>0$ 时 $i_C = 8e^{-100t}$ mA，$v_C(0) = 100$ V，求 $t>0$ 时的 $v_C(t)$。
8. 将图 7.41 所示的电流波形接入到一个 2 mF 的电容上，给定 $v_C(0) = 250$ V，假定遵循无源符号规则，那么在哪段时间内 v_C 的值在 2 000 到 2 100 V 之间？
9. 电阻 R 与一个 1 μF 的电容并联，在 $t\leq 0$ 时，储存在电容的能量为 $20e^{-1000t}$ mJ。(a)求 R；(b)通过积分，证明电阻 R 在时间 $0\leq t\leq\infty$ 消耗的能量为 0.02 J。

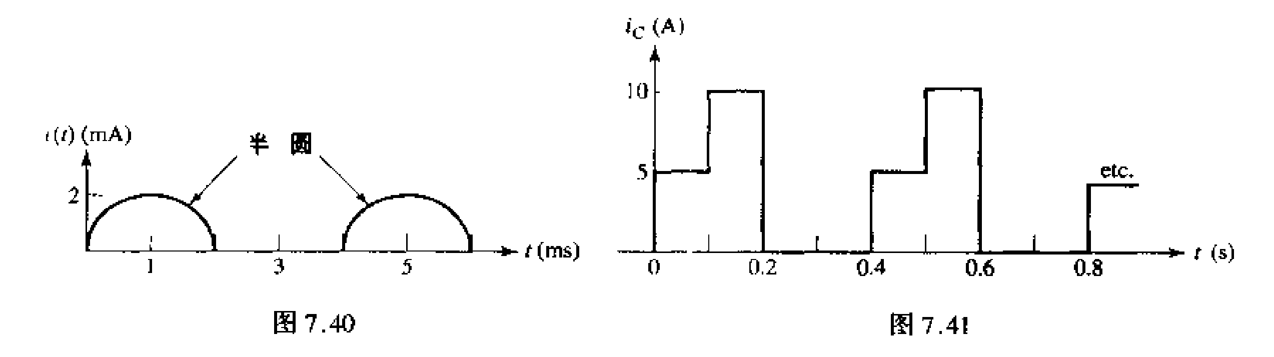


图 7.40　　图 7.41

10. 如图 7.42 所示电路,(a)计算各电容两端的电压;(b)用 PSpice 验证你的解答。

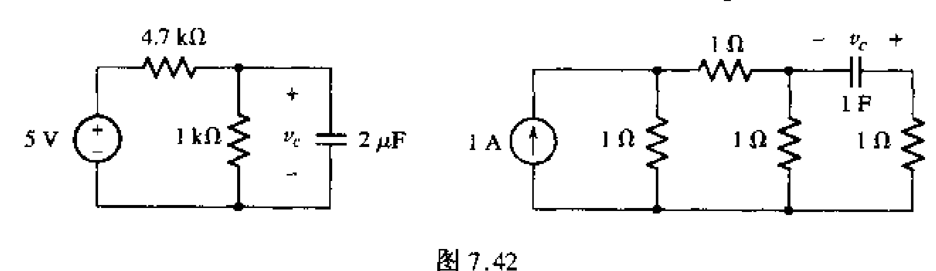


图 7.42

11. 参看图 7.43:(a)画出 $0 < t < 60$ ms 时 v_L 随时间变化的曲线;(b)求电感吸收功率达到最大时的时刻;(c)求电感提供最大功率时的时刻;(d)求 $t = 40$ ms 时电感储存的能量。

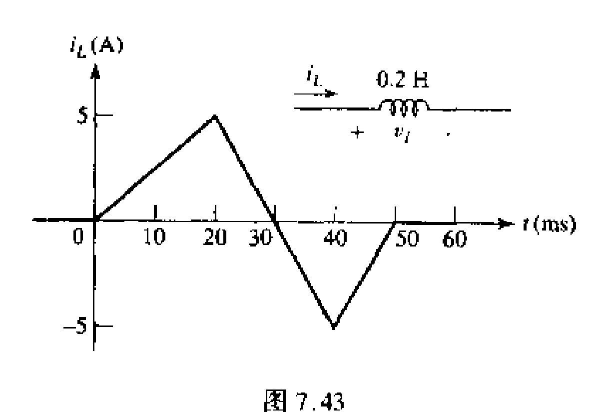


图 7.43

12. 在图 7.10 中,设 $L = 50$ mH,且 $t < 0$ 时 $i_L = 0$, $t > 0$ 时 $i_L = 80te^{-100t}$ mA,求 $|i_L|$ 和 $|v|$ 的最大值以及在何时达到最大值。

13. (a)如图 7.44(a)所示电路,如果 $t > 0$ 时 $i_s = 0.4t^2$ A,求出并画出 $t > 0$ 时的 $v_{in}(t)$。(b)如果 $t > 0$ 时 $v_s = 40t$ V, $i_L(0) = 5$ A,求出并画出图 7.44(b)所示电路中 $t > 0$ 时的 $i_{in}(t)$。

14. 将电压 $20\cos 1\,000t$ V 加到一个 25 mH 的电感上,如果在 $t = 0$ 时电感电流为零,求出并画出($0 \leq t \leq 2\pi$ ms):(a)电感吸收的功率;(b)电感储存的能量。

15. 一个 0.2 H 的电感在 $0 < t \leq 10$ ms 时两端的电压 v_L 为 100 V,并在时间 $10 < t < 20$ ms 内线性减小到零,在 $20 \leq t < 30$ ms 内为零,在 $30 < t < 40$ ms 内为 100 V,此后一直为零,假定 v_L 和 i_L 遵循无源符号规则,如果 $i_L(0) = -2$ A,(a)如果 $v_L(0) = -2$ A,计算

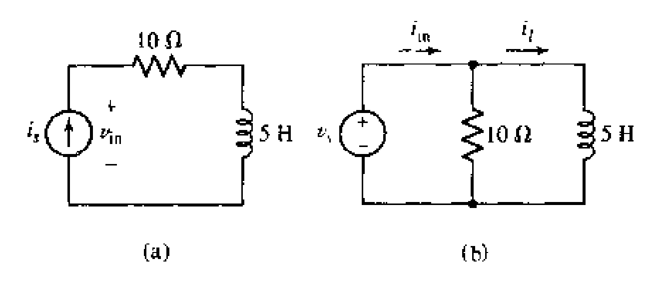


图 7.44

$t=8$ ms 时的 i_l；(b)如果 $i_L(0)=0$，求 $t=22$ ms 时电感储存的能量；(c)如果图 7.45 所示的电路已经工作了很长时间，求 i_x。

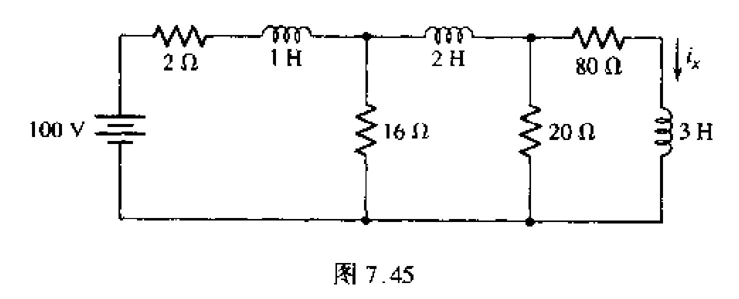


图 7.45

16. 一个 5 H 电感两端的电压为 $v_L=10(e^{-t}-e^{-2t})$ V，如果 $i_L(0)=80$ mA，且 v_L 和 i_L 均遵循无源符号规则，求(a)$v_L(1\text{ s})$；(b)$i_L(1\text{ s})$；(c)$i_L(\infty)$。
17. 假设图 7.46 所示电路已经工作了很长时间，如果(a)x 和 y 之间为电容；(b)x 和 y 之间为电感，分别求 v_x。

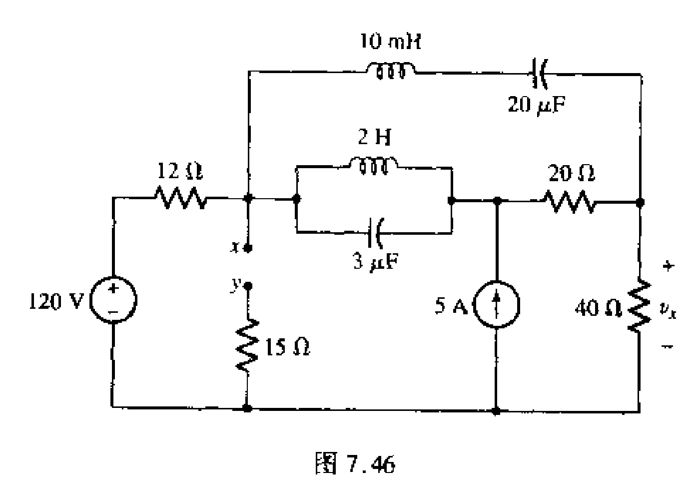


图 7.46

18. 参看图 7.47 所示的电路，求(a)w_L；(b)w_C；(c)电路各元件两端的电压；(d)各电路元件上的电流。
19. 如图 7.48 所示电路，设 $t>0$ 时 $v_s=400t^2$ V，$i_L(0)=0.5$ A，计算 $t=0.4$ s 时下面各能量的值：(a)储存在电容上的能量；(b)储存在电感上的能量；(c)自 $t=0$ 在电感消耗的能量。

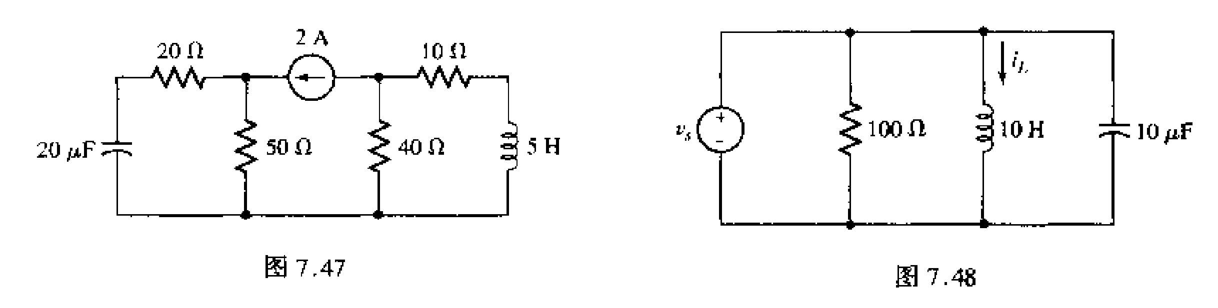


图 7.47

图 7.48

20. 对图 7.49 的电路，(a)分别计算 7 Ω 和 10 Ω 电阻消耗的功率；(b)用 PSpice 验证你的答案。

21. 如果所有电容为 10 μF，求图 7.50 所示网络的等效电容。

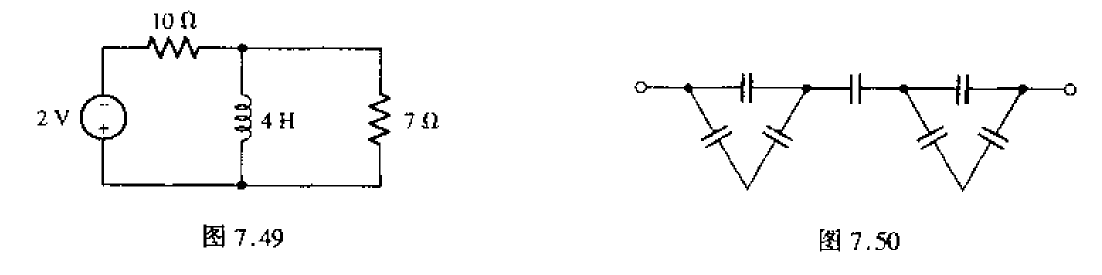


图 7.49

图 7.50

22. 如果所有电感为 77 pH，求图 7.51 所示网络的等效电感。

23. 对图 7.52 的电路，(a)利用串联和并联组合方法对电路进行化简，直至含有最少可能元件时为止；(b)如果所有电阻为 10 kΩ，所有电容为 50 μF 和所有电感为 1 mH，求 v_x。

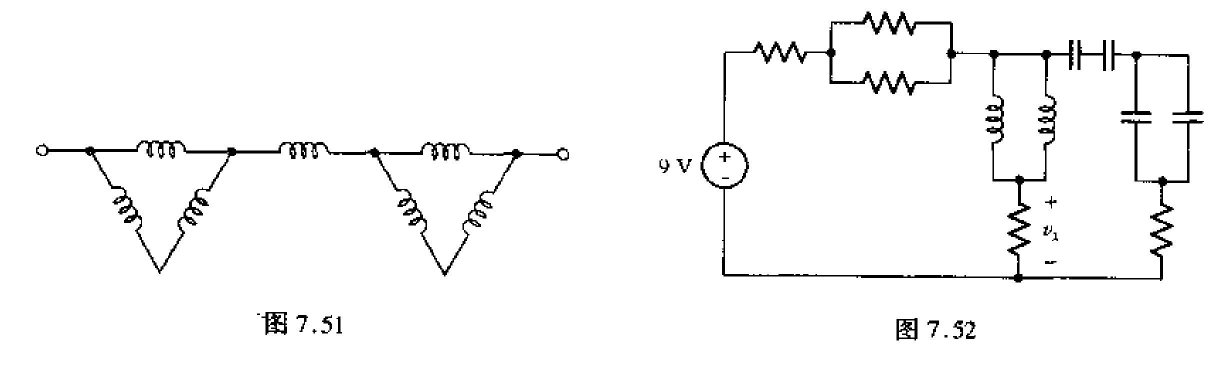


图 7.51

图 7.52

24. 对图 7.53 所示电路，(a)利用串联和并联组合方法，用最少可能元件重新画出该电路；(b) 设所有电阻为 1 Ω，所有电容为 50 μF 和所有电感为 10 nH，求 V_x。

25. 化简图 7.54 所示网络，使得从 ab 端看过去为单个电容。

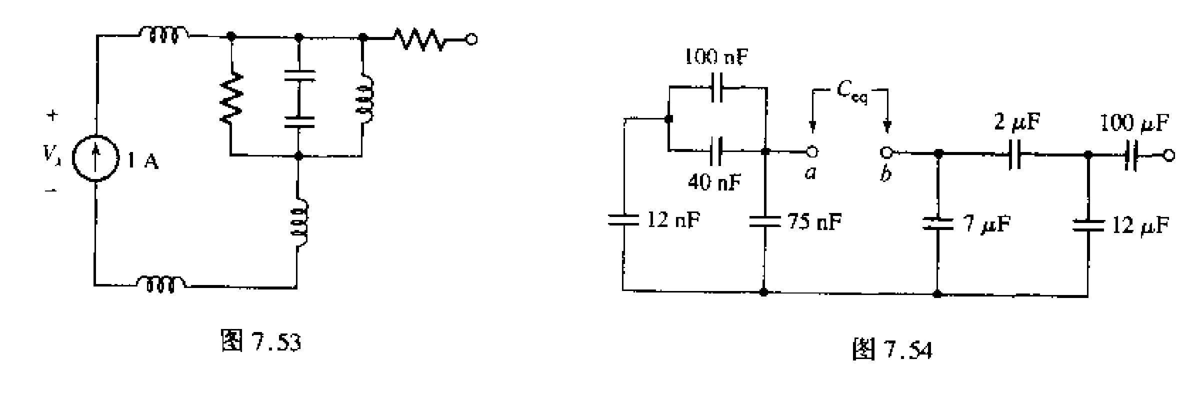


图 7.53

图 7.54

26. 化简图 7.55 所示网络，使得从 ab 端看过去为单个电感。

27. 如图 7.56 所示网络，当 ab 端接入 2.5 V 电压时储存能量为 534.8 μJ，则 C_x 的值是多少？

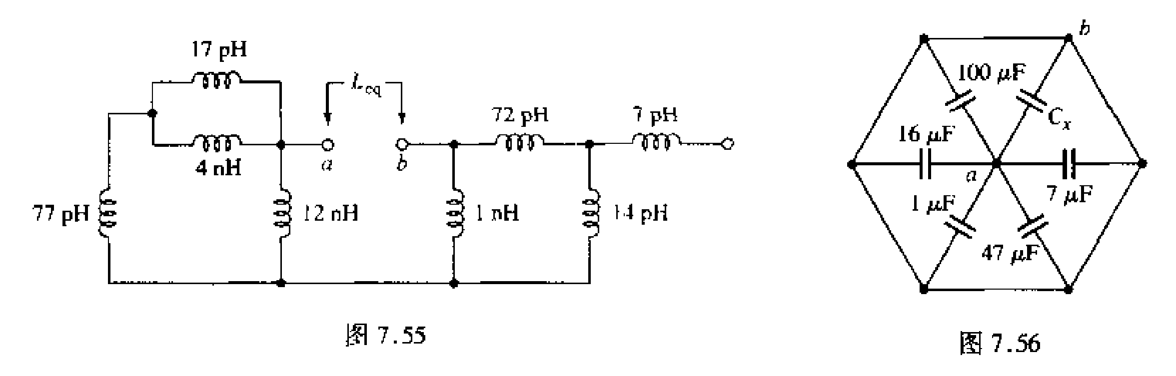


图 7.55

图 7.56

28. 如图 7.57 所示网络由三级并联电感网络串联而成，每级的电感数等于该级的序号。(a)如果所有电感为 1.5 H，求等效电感；(b)当级数为 N 时，求该网络的等效电感表达式。

29. 对图 7.57 所示网络，$L_1 = 1$ H，$L_2 = L_3 = 2$ H，$L_4 = L_5 = L_6 = 3$ H。(a)求等效电感；(b)当级数为 N 时，求该网络的等效电感表达式，假定第 N 级由 N 个电感组成，每个电感的电感值为 N 亨利。

30. 将 Δ-Y 变换的概念应用于图 7.58 所示网络中以简化网络，假定所有元件为 2 pF 电容。

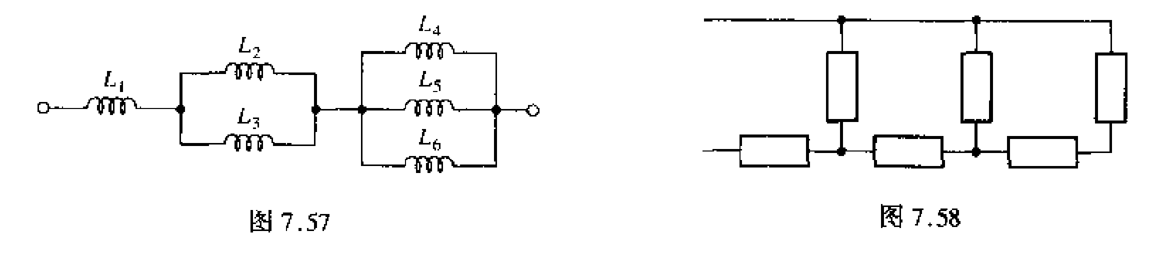


图 7.57

图 7.58

31. 将 Δ-Y 变换的概念应用于图 7.58 所示网络中以简化网络，如果所有元件为 1 nH 电感。

32. 给你足够多的 1 μH 电感，说明如何(用尽可能少的元件)得到如下的等效电感：(a)2.25 μH；(b)750 nH；(c)450 nH。

33. 参看图 7.59 所示电路，求(a)R_{eq}，假定各元件为 10 Ω 电阻；(b)L_{eq}，假定各元件为 10 H 电感；(c)C_{eq}，假定各元件为 10 F 电容。

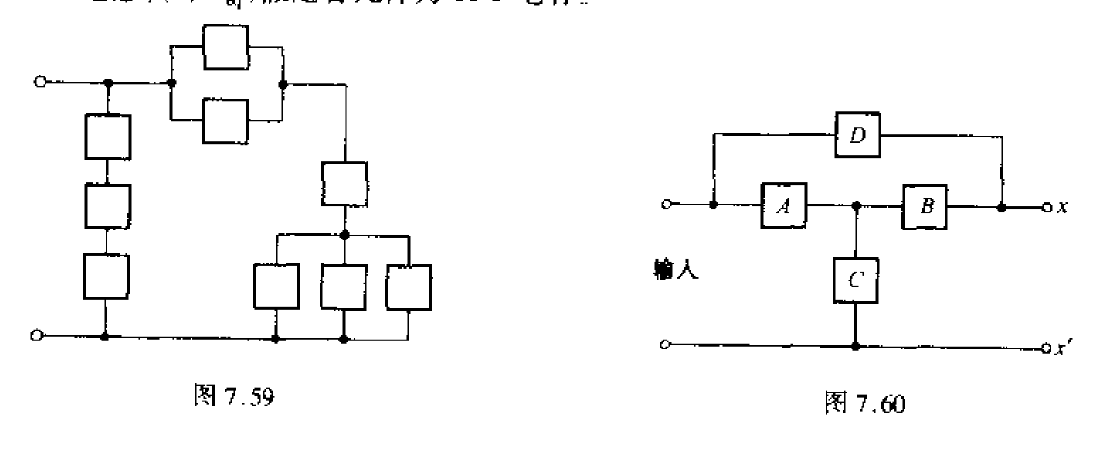


图 7.59

图 7.60

34. 图 7.60 中，设元件 A，B，C 和 D 分别为(a)1 H，2 H，3 H 和 4 H 的电感，分别求出 $x-x'$ 开路和短路时的输入电感；(b)1 F，2 F，3 F 和 4 F 电容，分别求出 $x-x'$ 开路和短路时的输入电容。

35. 给你足够多的 1 nF 电容，使用尽可能少的元件，说明如何得到下面的等效电容：(a)2.25 nF；(b)0.75 nF；(c)0.45 nF。

36. 如图 7.61 所示电路，设 $i_s = 60e^{-200t}$ mA，$i_1(0) = 20$ mA。(a)求 $v(t)$ 的表达式；(b)求 $t \geq 0$ 时 $i_1(t)$ 的表达式；(c)求 $t \geq 0$ 时 $i_2(t)$ 的表达式。

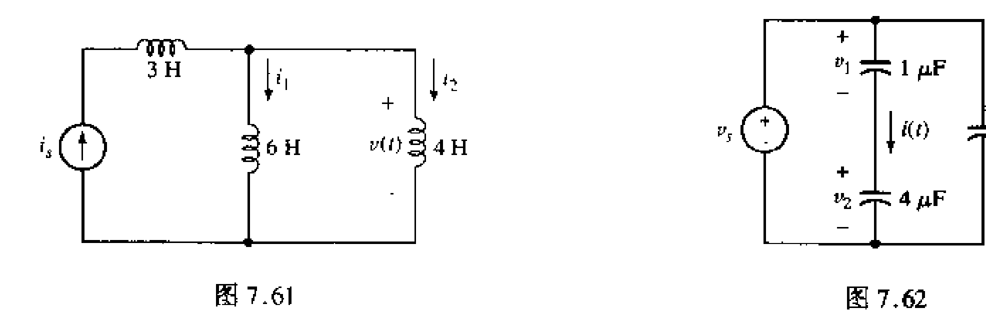


图 7.61　　图 7.62

37. 如图 7.62 所示电路，设 $v_s = 100e^{-80t}$ V，$v_1(0) = 20$ V。(a)求 $i(t)$ 的表达式；(b)求 $t \geq 0$ 时 $v_1(t)$ 的表达式；(c)求 $t \geq 0$ 时 $v_2(t)$ 的表达式。

38. (a)对 7.63 所示电路列出节点方程组；(b)对同样的电路列出网孔方程组。

39. 如果假定图 7.64 所示电路已工作了很长的时间，利用叠加原理求 $v_C(t)$ 和 $v_L(t)$。

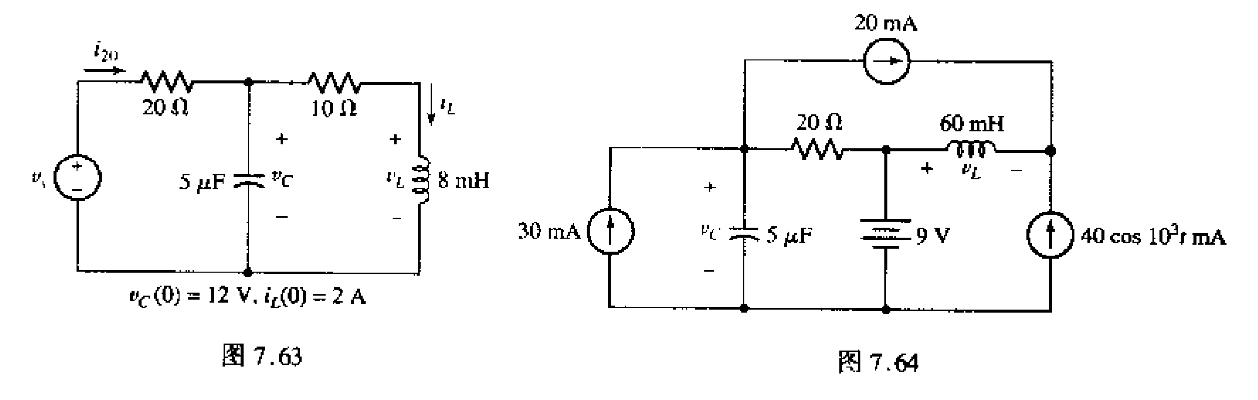


图 7.63　　图 7.64

40. 对图 7.65 所示电路，假定 $t = 0$ 时没储存任何能量，列出节点方程组。

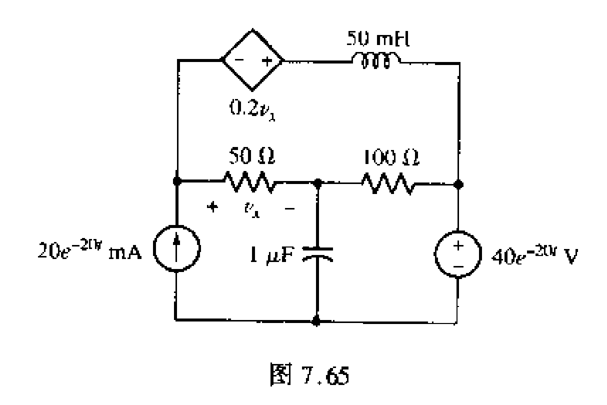


图 7.65

41. 交换图 7.27 所示电路中 R 和 C 的位置，并假定运放的 $R_i=\infty$，$R_o=0$ 和 $A=\infty$。(a)求 $v_o(t)$，以 $v_s(t)$ 表示；(b)如果 A 为有限值，求 $v_o(t)$，以 $v_s(t)$表示。

42. 离子注入机的作用是将电离的原子注入硅中以改变它的电气特性，为后续的二极管和三极管的制造做准备。离子的注入将产生一个电流，已知该电流与离子浓度成正比($i=1.602\times10^{-19}\times$每秒入射的离子数)，可以通过让该电流流过一个已知精确阻值的电阻来测量电流的大小，从而得到注入的离子数。如果用 1.000 MΩ 电阻来检测该电流，设计一个电路使得其输出与注入过程中注入硅的总离子数(称为剂量)成正比。

43. 如图 7.27 所示电路，设 $R=0.5\ \text{M}\Omega$，$C=2\ \mu\text{F}$，$R_i=\infty$ 和 $R_o=0$。假定期望的输出为 $v_{out}=\cos 10t-1\ \text{V}$，如果(a)$A=2\ 000$ 和(b)A 为无穷大，分别求出 $v_s(t)$。

44. 在一个旋转的轮子中有一个速率传感器，设计一个电路，使得其输出一个正电压，且电压幅度等于轮子的加速度(单位为 rpm/m，即转动次数/分钟)。假定速率传感器的输出为 1 mV/rpm，轮子转速小于 3 500 rpm。

45. (a)在图 7.66 所示电路中，交换电阻和电感的位置，并导出 v_{out}的表达式，以 v_s 表示。(b)解释为什么该电路通常不能应用到实际中。

46. (a)画出图 7.63 所示电路的完全对偶，并确定对偶变量和对偶初始条件；(b)列出对偶电路的节点方程；(c)列出对偶电路的网孔方程。

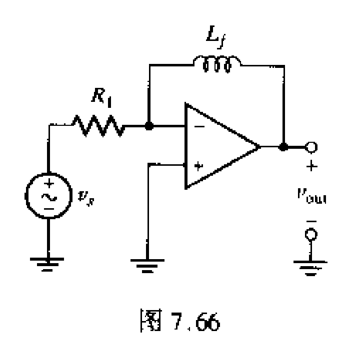


图 7.66

47. 画出图 7.46 所示电路的完全对偶，以整洁的形式画出，即画图时使用方的转折角，使用明显的参考节点，并且图中不存在交叉线。

48. 以整洁的形式画出图 7.67 所示电路的完全对偶。

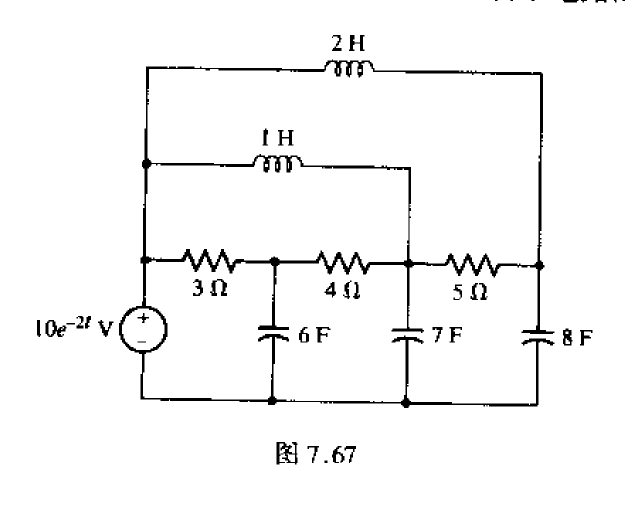


图 7.67

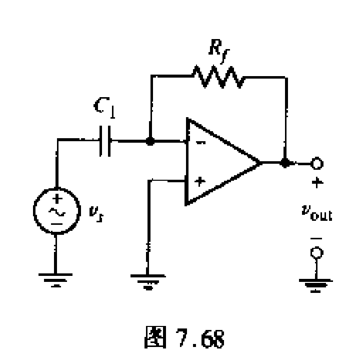


图 7.68

49. (a)画出习题 37 所给电路的完全对偶,并标出各变量;(b)写出习题 37 的对偶表述;(c)求解用对偶语言表述后的习题 37。
50. 求出图 7.68 所示电路的对偶,并求出 v_{out}的表达式,以 v_s 表示(提示:利用运放的详细模型)。
51. 用 PSpice 验证当 33 μF 电容所接电压源为 $v(t) = 5\cos 75t$ V 时,在 $t = 10^{-2}$ s 时电容储存的能量为 221 μJ(提示:利用组件 VSIN)。
52. 用 PSpice 来验证当 100 pH 电感所接电流源为 $i(t) = 5\cos 75t$ A 时,在 $t = 0.01$ s 时电感储存的能量为 669 pJ(提示:利用组件 ISIN)。
54. 将习题 7.51 的 $v(t)$改为 $v(t) = 5\cos 75t - 7$ V,重做该题。
55. 将习题 7.51 的 $i(t)$改为 $i(t) = 5\cos 75t - 7$ A,重做该题。

第 8 章　基本 *RL* 和 *RC* 电路

本章要点：

- 定义 *RL* 电路和 *RC* 电路的时间常数
- 区分自由响应和受迫响应
- 计算 *RL* 和 *RC* 电路的完全响应
- 确定初始条件对电路响应的影响
- 掌握用单位阶跃函数来表示脉冲波形
- 培养对 *RL* 电路和 *RC* 电路响应的直觉理解

8.1　引言

前一章已对同时包含电感和电容的几种电路列出了描述电路响应的方程，但并没有对其中的任何一个进行求解。下面开始对只含有电阻和电容或者只含有电阻和电感的简单电路进行求解。

虽然下面要讨论的电路只包含一些简单元件，但它们仍然具有重要的实用价值。这种形式的网络常常应用于电子放大器、自动控制系统、运算放大器、通信设备以及其他许多设备中。如果熟悉这些简单的电路，那么就可以估算出放大器的输出对快速变化的输入的跟随精度，或者可以估算出当电动机的场电流变化时电动机响应速度的快慢。在了解基本 *RL* 和 *RC* 电路工作性能之后，还可以对放大器或者电动机做一些调整以得到所需的响应。

8.2　无源 *RL* 电路

对包含电感和电容电路的分析包括列出并求解描述电路特性的积分微分方程，如果得到的积分微分方程的每一项都是因变量或因变量导数的一次项，则称为齐次线性微分方程。如果得到了因变量的一个表达式，它满足微分方程，同时满足电容或者电感在指定时刻（通常为 $t=0$ 时刻）的能量分布，那么就称得到了这个方程的一个解。

微分方程的解描述了电路的响应，它有很多个名称。因为电路响应取决于电路的固有特性（例如元件的类型、尺寸和元件之间的连接），所以通常称它为本征（即自由）响应。但是，实际的电路并不能永久地存储能量，因为电路中的电感和电容具有的电阻最终会把所有存储的能量转为热量，所以这个响应最终必然消失，由此也通常称它为暂态响应。最后，还应该熟悉数学上的一些术语，在数学上称齐次线性微分方程的解为通解（余函数）。

当考虑独立电源作用于电路时，响应中的一部分将类似于所采用的电源（即激励函数）的特性，这部分解称为特解、稳态响应或者受迫响应，无源电路所产生的自由响应作为它的补充。电路的完全响应可以表示为通解与特解的和，换句话说，完全响应是自由响应与受迫响应的和。无源响应可称为暂态响应、自由响应和通解，但由于该响应更多地描述了系统本身的特

性，所以通常称为自由响应。

下面将讨论微分方程的几种不同求解方法，但要记住的是，数学处理不等于电路分析，这里最关心的是解本身、它们的含义以及对它们的解释。后面还将试图达到熟悉响应的各种形式，在熟悉它们之后，对一个新的电路，仅通过大脑中清晰的想像就可以写出其响应形式。尽管当简单的方法失效时必须采用更复杂的分析方法，但在这种情况下，训练有素的直觉仍然是一种相当有价值的能力。

下面以图8.1所示的简单串联 RL 电路开始对暂态分析的研究。设时变电流为 $i(t)$，$t=0$时 $i(t)$的值为 I_0，即 $i(0)=I_0$。于是有：

$$Ri+v_L=Ri+L\frac{di}{dt}=0$$

或

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=0 \tag{8.1}$$

图8.1 求该串联 RL 电路中 $i(t)$的表达式，已知初始值为 $i(0)=I_0$

在一个无源电路中讨论时变电流看起来有些奇怪！要记住的是，这里仅知道 $t=0$ 时刻的电流值，并不知道该时刻以前的电流值；同样，也不知道 $t=0$ 时刻前电路所处的状态。而且，为了使得电流存在，必须在某个时刻存在某个电源，但是这里并不知道这些情况。幸运的是，在分析电路时并不是必须知道这些情况。

本题要求出 $i(t)$的表达式，该表达式满足方程，同时满足 $t=0$ 时的值为 I_0，这可以通过下面几种不同的方法来得到。

8.2.1 直接法

求解微分方程的一种非常直接的方法是，首先将方程写成分离变量的形式，然后对方程两边进行积分。方程(8.1)的积分变量为 i 和 t，显然可以将方程乘以 dt，然后除以 i，再重新写成分离变量的的形式：

$$\frac{di}{i}=-\frac{R}{L}dt \tag{8.2}$$

因为 $t=0$ 时电流为 I_0，t 时刻为 $i(t)$，于是在方程两边用相应的积分限进行积分，并令这两个定积分相等：

$$\int_{I_0}^{i(t)}\frac{di'}{i'}=\int_0^t-\frac{R}{L}dt'$$

对上式进行积分可得：

$$\ln i'\Big|_{I_0}^{i}=-\frac{R}{L}t'\Big|_0^t$$

于是：

$$\ln i - \ln I_0 = -\frac{R}{L}(t-0)$$

经过一些简单运算，得到电流 $i(t)$ 的表达式为：

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L} \tag{8.3}$$

可以通过将方程(8.3)代入方程(8.1)来验证上面的解，这时得到恒等式 0=0。然后将 $t=0$ 代入方程(8.3)，得到 $i(0)=I_0$。以上的两步验证都是必要的，因为解必须满足描述电路特性的微分方程，同时也必须满足初始条件。

8.2.2 另一种方法

对上面的方法稍做变化，也可以得到方程的解。对方程(8.2)分离变量后，然后可以得到不定积分，其右边含有一个积分常数：

$$\int \frac{di}{i} = -\int \frac{R}{L}dt + K$$

积分得到：

$$\ln i = -\frac{R}{L}t + K \tag{8.4}$$

积分常数 K 不能通过将方程(8.4)代入原来的微分方程(8.1)而求得，代入它将得到恒等式 0=0，因为对任意的 K，方程(8.4)都是方(8.1)的解(读者可以自己去验证)。选取的积分常数必须使得解满足初始条件 $i(0)=I_0$，根据这点，令 $t=0$，这时方程(8.4)成为：

$$\ln I_0 = K$$

利用公式(8.4)得到的 K 值就可以得到所求的响应为：

$$\ln i = -\frac{R}{L}t + \ln I_0$$

或

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

和前面的结果一致。

8.2.3 更一般的求解法

只有当方程可以分离变量时，才能使用前面介绍的两种方法，但实际情况下方程并不总是能够分离变量。在后面的例子中，将介绍一种非常有效的方法，它能否成功运用取决于我们的直觉或者经验。首先，猜测或假定解的一种形式，然后去验证这个假定。验证的过程是首先将它代入微分方程中，然后应用初始条件来验证。因为不可能猜测出解的精确数值表达式，所以所假定的解通常都包含一些未知常量，通过选择这些常量可以使得解同时满足微分方程和初始条件。在电路分析中遇到的很多微分方程的解都可以表示为指数函数或者几个指数函数的和的形式。例如，对方程(8.1)，假定齐次解为指数形式：

$$i(t) = Ae^{s_1 t} \tag{8.5}$$

其中 A 和 S_1 为待定常量。将假定的解代入方程(8.1)，得到：

$$As_1 e^{s_1 t} + A\frac{R}{L}e^{s_1 t} = 0$$

或

$$\left(s_1+\frac{R}{L}\right)Ae^{s_1 t}=0$$

要使以上方程在所有时刻均成立，必然有 $A=0$，$s_1=-\infty$ 或 $s_1=-R/L$。但如果取 $A=0$ 或者 $s_1=-\infty$，那么任何响应均将为零，这不能作为所求问题的解，因此必须选取：

$$s_1=-\frac{R}{L}$$

于是得到假定的解具有下面的形式：

$$i(t)=Ae^{-Rt/L}$$

剩下的待定常量必须根据初始条件 $i(0)=I_0$ 来确定，根据这点可求出为 $A=I_0$。于是，(再次得到)解的最终形式为：

$$i(t)=I_0e^{-Rt/L}$$

在解释该响应的含义之前，先来验证该电路中功率与能量的关系。电阻吸收的功率为：

$$p_R=i^2R=I_0^2Re^{-2Rt/L}$$

在电阻上转化为热的总能量可以通过对瞬时功率从零到无穷大的时间区间内积分得到：

$$w_R=\int_0^{\infty}p_R\,dt=I_0^2R\int_0^{\infty}e^{-2Rt/L}dt$$

$$=I_0^2R\left(\frac{-L}{2R}\right)e^{-2Rt/L}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{2}LI_0^2$$

这个结果与预想的一致，因为储存在电感中初始总能量为$\frac{1}{2}LI_0^2$，经过无限长的时间后电感不再储存任何能量，因为流过它的电流最终将降为零。于是可得到结论，电阻对能量的吸收是初始能量消失的原因。

例题 8.1 对图 8.2(a)中的电路，求出 $t=200$ ms 时流过 5 H 电感的电流

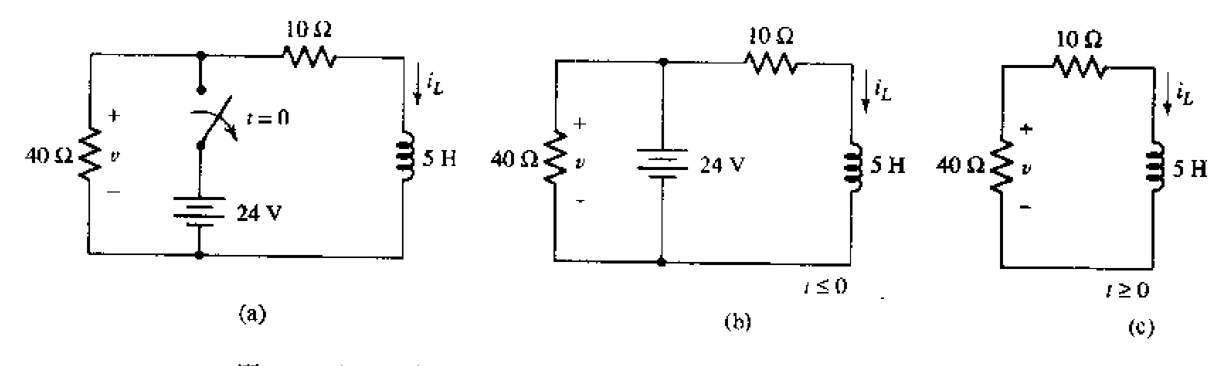


图 8.2 (a)一个简单 RL 电路，开关在 $t=0$时打开；(b) $t=0$之前的电路；(c)开关打开后的电路，已移去原图中的 24 V 电源

● 弄清问题的目标：

图 8.2 所示的原理图实际上表示了两个不同的电路：一个是开关闭合的电路，另一个是开关打开后的电路。为了进行分析，有必要将这两个电路画出，分别如图 8.2(b)和图8.2(c)所示。本题要求的是 $t=200$ ms 时图 8.2(c)所示电路中的电流 i_L。

● 收集已知信息：

重画电路时，最好检查一下重画出的电路图是否正确，这样可以减少错误。可以看到，各图均已正确标出了各元件值和电流 i_L。必须假定图 8.2(b)所示的电路已处于该状态很长时间，使得 24 V 电源接入时产生的暂态响应已消失了很长时间。

● 选择最适合问题的已有方法：

因为要求出 i_L = 200 ms 时的电感电流，所以首先将两个电阻合并为单个 50 Ω 的等效电阻，然后可以使用本节中所讨论过的任何方法。

● 建立适当的方程组：

将图 8.2(c)所示电路简化为简单 RL(其中 $R = 50\ \Omega$ 和 $L = 5$ H)电路后，可以假定电感电流的形式为：

$$i_L(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

● 确定是否还需其他信息：

尽管已经知道 R 和 L 的值，且知道需要求解 $t = 200$ ms 的电流值，但还不知道 $t = 0$ 时电感电流 I_0 的值。因为电感电流不能瞬时改变，那么它的值必然与开关切换前的瞬时值相等。因此，这时可以使用图 8.2(b)所示的电路来求解电感的初始电流。

根据欧姆定理以及对于直流而言电感相当于短路，所以得到：

$$I_0 = \frac{24}{10} = 2.4\ \text{A}$$

● 试解：

代入求得的 I_0 值，可以得到 $i_L(200\ \text{ms}) = 324.8$ mA。

● 证实所得解是否合理和满足要求：

在开关切换的瞬间，流过电感的电流为 2.4 A；仅仅在 200 ms 之后，它就减小到了几百毫安。这可信吗？到目前为止，还没有对电路这种特性进行判断的经验。不过，下一节将讨论电路的时间常数的概念，对于图 8.2(c)所示电路，其时间常数为 100 ms。后面将会看到，RL 电路的暂态响应经过两倍时间常数后将下降到大约其最大值的 14%(在本例中 2 × 100 ms = 200 ms)，所以这里的解答是合理的。

电流是否会增加呢？这看起来是不可能的，因为图 8.2(c)所示电路除了电感储存了一些能量以外，不再有其他能量源，所以能量很快就损耗在了电阻中，并转成了热量。

练习

8.1 图 8.3 中的电感初始储存的能量为 7 μJ，求它在 $t = 2$ ns 时剩余的能量。

答案：2.349 μJ

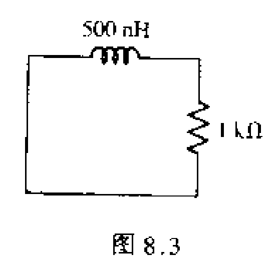


图 8.3

8.3 指数响应的性质

现在来讨论串联 *RL* 电路的响应特性。前面已得到电感电流可以表示为:

$$i(t) = I_0 e^{\ Rt/L}$$

从上式可知,$t=0$ 时,电流的值为 I_0,但随着时间的增加,电流将逐渐衰减并趋于零。图 8.4 画出了该指数衰减曲线的形状,以 $i(t)/I_0$ 随 t 变化来表示。因为画出的是函数 $e^{-Rt/L}$的曲线,所以当 R/L 保持不变时曲线形状保持不变,于是对每一个具有相同 R/L 或 L/R 比值的 *RL* 串联电路必然得到相同的曲线。下面来看这个比值如何影响曲线的形状。

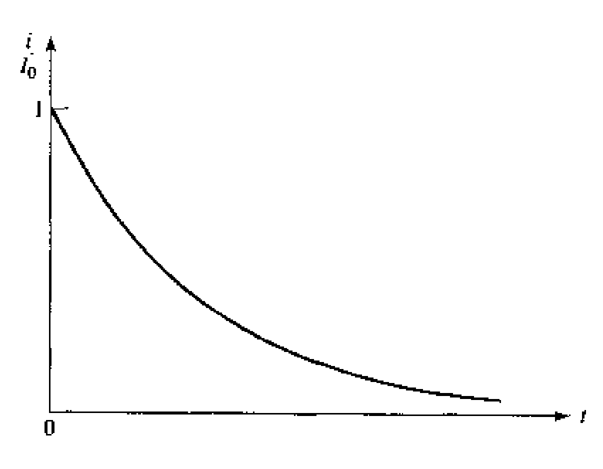


图 8.4 $e^{-Rt/L}$随时间变化的曲线

如果将 L 与 R 的比值加倍,那么如果 t 也加倍则指数保持不变。换句话说,原来各时刻的响应将在以后的时刻产生,新的响应曲线可以通过将原来曲线中的每个点都向右移动 2 倍而得到。当 L/R 变大时,电流衰减到小于初始值的某个特定值所需要的时间将加大。这时可能会认为曲线的"宽度"加倍了,或者说曲线"宽度"与 L/R 成正比。但是,随后将会发现给曲线定义"宽度"很困难,因为每条曲线都是从零一直延伸到无穷大。于是换一个角度,考虑当电流按初始速率衰减时,电流衰减到零所需的时间。

初始衰减速率可以通过将电流对 t 求导并取零时刻的导数值而得到:

$$\frac{d}{dt}\frac{i}{I_0}\bigg|_{t=0} = -\frac{R}{L}e^{-Rt/L}\bigg|_{t=0} = -\frac{R}{L}$$

维持以上速率,i/I_0 由单位值衰减到零所用的时间用希腊字母 τ 来表示,即:

$$\left(\frac{R}{L}\right)\tau = 1$$

或

$$\tau = \frac{L}{R} \tag{8.6}$$

因为指数 $-Rt/L$ 必然是无量纲的,所以比值 L/R 具有时间的量纲(秒)。τ 的大小称为时间常数,如图 8.5 所示。*RL* 串联电路的时间常数可以从响应曲线图解得到,只需要在 $t=0$ 处作响应曲线的切线,切线在时间轴上的截距就是所求的时间常数。如果需要从示波器显示出的曲线来求近似的时间常数,通常采用这种方法。

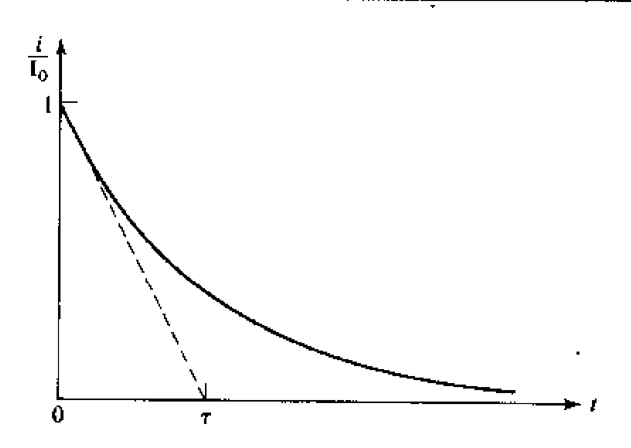


图 8.5　串联 RL 电路的时间常数为 $\tau = L/R$，时间常数为响应曲线按初始速率衰减到零所需的时间

通过求 $t=\tau$ 时 $i(t)/I_0$ 的值，可以得到时间常数的另一个同样重要的解释。这时：

$$\frac{i(\tau)}{I_0} = e^{-1} = 0.367\,9 \quad 或 \quad i(\tau) = 0.367\,9 I_0$$

因此，经过一个时间常数后，响应下降到了其初始值的 36.8%，根据这一点可以从响应曲线图解得到 τ，如图 8.6 所示。以时间常数作为间隔来度量曲线的衰减通常比较方便，使用计算器或者通过查复指数表可知，$t=\tau$ 时 $i(t)/I_0$ 的值为 0.367 9，$t=2\tau$ 时为 0.135 3，$t=3\tau$ 时为 0.049 79，$t=4\tau$ 时为 0.018 32，$t=5\tau$ 时为 0.006 738。从时刻零开始经过 3～5 倍时间常数后，可以认为此时的电流值与它初始时的值相比可以忽略。于是，如果要问，“电流需要多长时间衰减到零?”那么可以这么回答，“大约在 5 倍时间常数后。”此时的电流比它初始值的 1% 还要小。

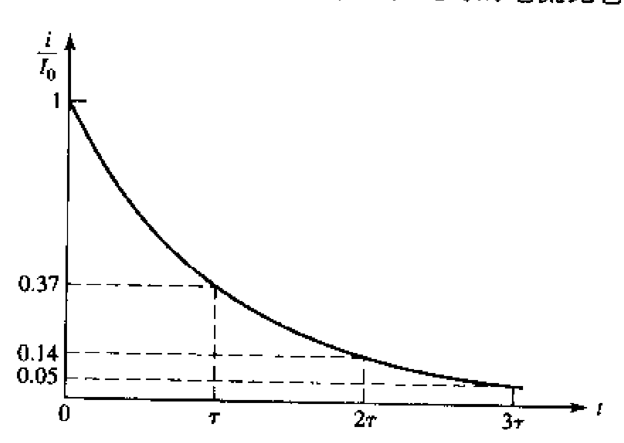


图 8.6　串联 RL 电路的电流在 $t=\tau$ 时衰减到它初始值的37%，$t=2\tau$时为14%，$t=3\tau$时为5%

练习

8.2　在无源串联 RL 电路中，求下面各比值：(a) $i(2\tau)/i(\tau)$；(b) $i(0.5\tau)/i(0)$和(c) t/τ，假定 $i(t)/i(0)=0.2$；(d) t/τ，假定 $i(0)-i(t)=i(0)\ln 2$。

答案：0.368；0.607；1.609；1.181

计算机辅助分析

在考虑无源电路的自由响应时，PSpice 的暂态分析功能非常有用。本例将使用 PSpice 的一个功能来更改仿真时各元件的参数，就像在仿真时可以改变直流电压一样。这可以通过在原理图中加入 PARAM 元件来实现，可以将 PARAM 元件放置在原理图的任何地方，因为不需要把它连接到电路中。图 8.7 画出了完整的 *RL* 仿真电路图，其中还设定了初始电感电流为 1 mA。

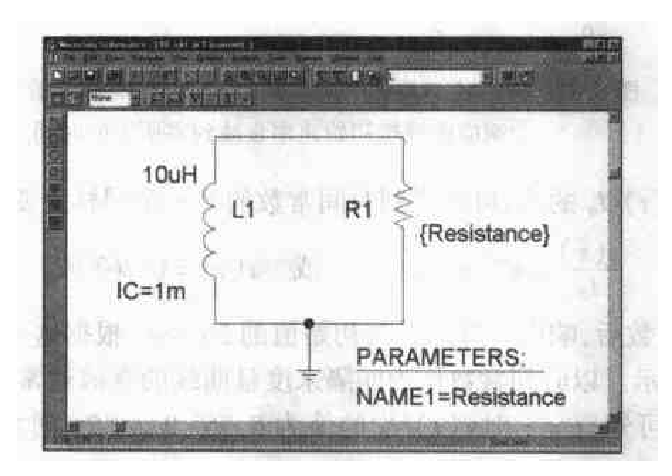


图 8.7 用原理图绘制工具画出的简单 *RL* 电路。其中 PARAM 的一个"哑"参数 VALUE1 = 0 并没有显示出来，但是必须设定这个参数值，以避免在仿真时产生错误信息

为了将电阻值与仿真的扫描参数建立联系，必须完成以下两个步骤。首先，必须给参数取一个名字，为清晰起见，这里取为"Resistance"。其次，双击电阻元件，在对话框的 Value 项中键入{Resistance}。

现在可以对仿真进行参数设置了。从 Analysis 菜单中选择 Setup，然后选择 Parametric，图 8.8 示出了这个弹出对话框。在 Name 栏中键入变量名称 Resistance，然后选择电阻的起始值和终止值，这里希望观察 $R = 10\ \Omega, 100\ \Omega$ 和 $1\ 000\ \Omega$ 时电路的输出，所以在 Decade 扫描中，取 Start 值为 10，End 值为 1 000，每 Decade 为 1(表示每隔 10 倍取一个电阻值)。选择 Value List 选项，可以列出前面的这三个值。

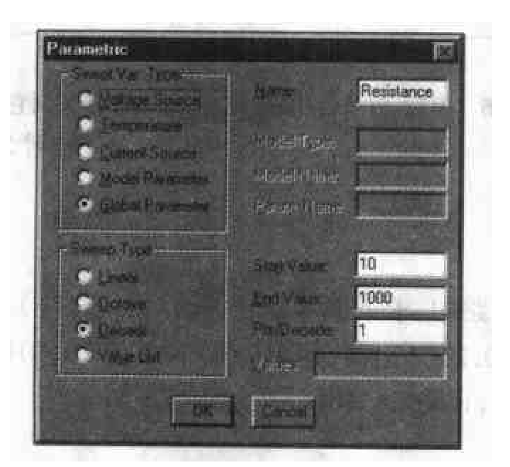


图 8.8 扫描参数对话框

下一步来设置暂态分析参数，选取终止时间为 300 ns。仿真结束后，将显示如图 8.9 所示的对话框，其中列出了可以用于画图的数据(这里包括电阻 Resitance = 10,100 和 1 000 对应的数据)，这里选取了所有的数据。Probe 输出如图 8.10 所示。

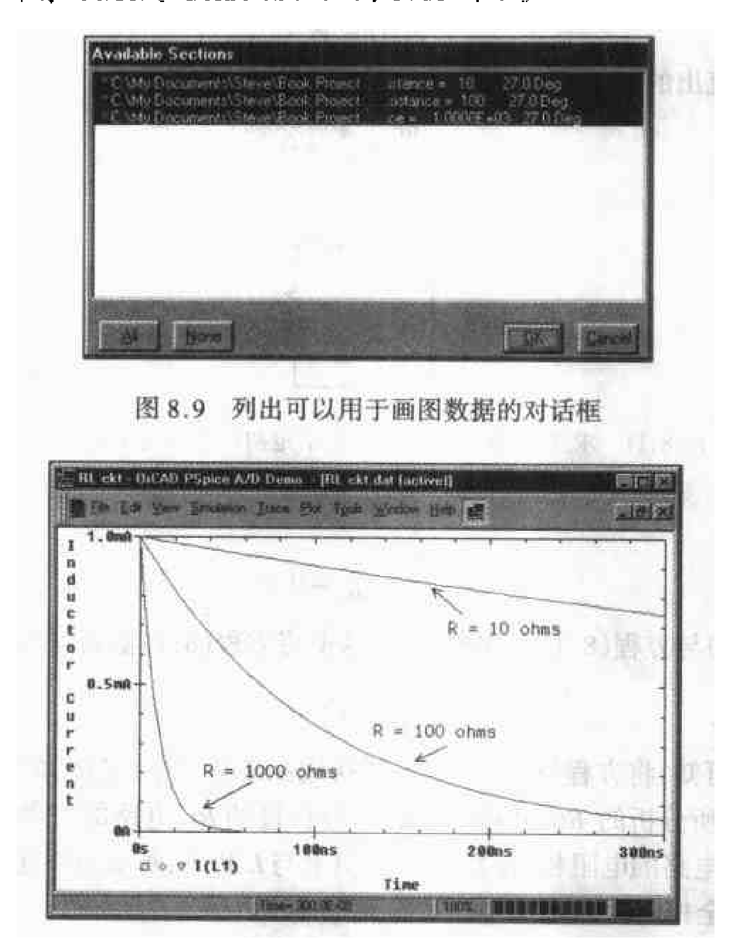


图 8.9　列出可以用于画图数据的对话框

图 8.10　三个电阻值的 Probe 输出

为什么时间常数 *L*/*R* 越大响应曲线衰减越慢呢？下面来分析各元件变化对时间常数产生的影响。

利用时间常数 τ，可以将串联 *RL* 电路的响应表示为：

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

增大 *L* 意味着在同样的初始电流下电感将储存更多的能量，因此电阻需要用更长的时间来消耗这些能量。减小 *R* 同样可以增大 *L*/*R*，在这种情况下，对于同样的初始电流，流入电阻的功率将更小，同样，这需要更长的时间来消耗电感所储存的能量。从图 8.10 所示的仿真结果可以很清楚地看到电阻的这种影响。

8.4　无源 *RC* 电路

由电阻 - 电容组合构成的电路要比由电阻 - 电感构成的电路更为常见，主要原因是电阻 - 电容组合电路的物理损耗更小，成本更低，器件的实际工作特性与它们的简单数学模型符合

得更好，而且尺寸更小，重量更轻，这两点对集成电路来说尤为重要。

现在来看并联（或者说串联）*RC* 电路的分析（如图 8.11 所示）与相应的 *RL* 电路的分析有多少相似之处。假定存储在电容上的初始能量用下式表示：

$$v(0) = V_0$$

从电路图上端节点流出的总电流必然为零，所以，可以写出：

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

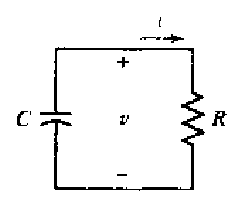


图 8.11　求并联 *RC* 电路的 $v(t)$，给定初始条件为 $v(0) = V_0$

将上式除以 C，得：

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0 \tag{8.7}$$

可以看到，方程(8.7)与方程(8.1)形式很相似，这里将方程(8.1)重新写出如下：

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \tag{8.1}$$

对比以上两个方程可知，将方程(8.1)中的 i 替换成 v、L/R 替换成 RC 的乘积，可以得到方程(8.7)。事实上，现在所分析的 *RC* 电路正是前面分析过的 *RL* 电路的对偶。根据对偶性可知，如果 *RC* 电路与 *RL* 电路的电阻相同，且 C 在数值上与 L 相等，那么 *RC* 电路的 $v(t)$ 与 *RL* 电路的 $i(t)$ 的表达式完全相同。因此，根据 *RL* 电路的响应：

$$i(t) = i(0)e^{-Rt/L} = I_0 e^{-Rt/L}$$

可以直接写出 *RC* 电路的响应为：

$$v(t) = v(0)e^{-t/RC} = V_0 e^{-t/RC} \tag{8.8}$$

假定选取电流 i 而不是电压 v 作为 *RC* 电路的变量，则根据基尔霍夫电压定律，有：

$$\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i dt' + v(t_0) + Ri = 0$$

此时得到一个积分方程而不是微分方程，但如果方程两边均对时间求导：

$$\frac{i}{C} + R\frac{di}{dt} = 0 \tag{8.9}$$

然后将 i 替换成 v/R，则又得到了方程(8.7)：

$$\frac{v}{RC} + \frac{dv}{dt} = 0$$

需要指出，可以将方程(8.9)作为前面讨论的出发点，但这样不能体现对偶原理的作用。

现在讨论这个 *RC* 电路的电压响应的物理特性，它由公式(8.8)来描述。将 $t = 0$ 代入该式，可以得到正确的初始条件，并且可以验证当 t 变为无限大时电压趋于零，这个结论与前面的结论一致，即如果电容两端还有电压存在，那么能量将继续以热量的形式被耗尽，因此，最终

的电压值必然为零。RC 电路的时间常数可以根据 RL 电路的时间常数的表达式并使用对偶性来得到，也可以根据响应经过一个时间常数后下降到其初始值的 37% 来得到：

$$\frac{\tau}{RC}=1$$

所以：

$$\tau = RC \tag{8.10}$$

现在已经熟悉了负指数函数和时间常数的含义，这时就很容易画出响应曲线(图 8.12)。R 或者 C 的值越大，时间常数也越大，存储的能量也消耗得越慢。也就是说，在两端电压固定的情况下，电阻越大其消耗的功率越小，于是需要更长的时间把存储的能量转为热量。而对于电容，当两端电压固定时，电容越大存储的能量越多，电阻同样需要用更长的时间来消耗这些初始能量。

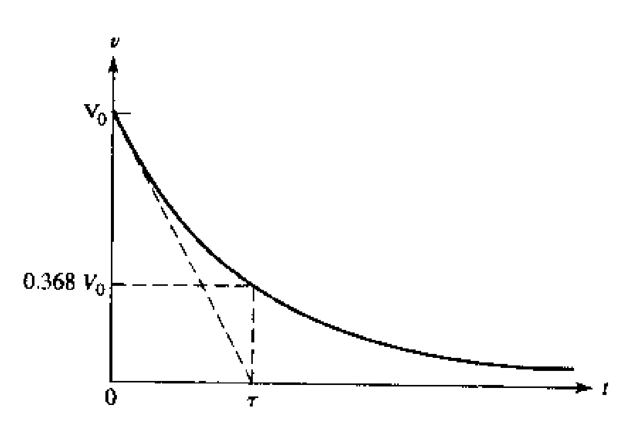


图 8.12　并联 RC 电路中电压 $v(t)$ 随时间变化的曲线，已知 $v(t)$ 的初始值为 V_0

练习

8.3　求图 8.13 所示电路的 $v(0)$ 和 $v(2\text{ ms})$。求解本题需要画出两个不同的电路：一个对应于开关闭合前，另一个对应于开关闭合后，而在 $t=0$ 时刻两个电路中电容两端的电压必须相等。

答案：50 V；14.33 V

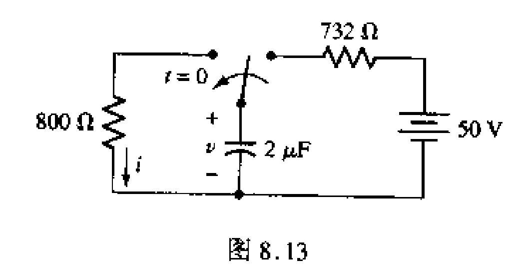


图 8.13

8.5　更一般的观点

不难将前面得到的关于串联 RL 电路的结论推广到包含一个电感和任意多个电阻的电

路，同样，可以将关于 *RC* 电路推广到包含一个电容和任意多个电阻的电路。

8.5.1 *RL* 电路的一般形式

首先来考虑从电感两端看过去的等效电阻，这样电路就简化为简单串联形式。举一个例子，来看图 8.14 所示电路，从电感两端看出去的等效电阻为：

$$R_{eq} = R_3 + R_4 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

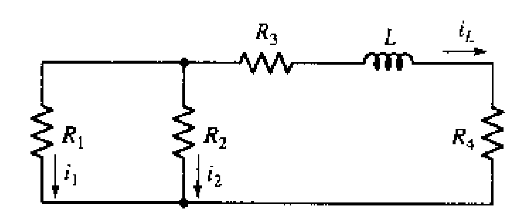


图 8.14 含有一个电感和几个电阻的无源电路，首先确定其时间常数 $\tau = L/R_{eq}$ 然后再对该电路进行分析

于是，得到时间常数为：

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}}$$

因此，电感电流 i_L 为：

$$i_L = i_L(0)e^{-t/\tau}$$

这时，求出的解 i_L 称为基本解，通常还需要求出 i_L 之外的电流或者电压，例如 R_2 上的电流 i_2。对于电路中的电阻部分，总是可以运用基尔霍夫定律和欧姆定律进行分析，不过在这里使用分流定理更为方便：

$$i_2 = -\frac{R_1}{R_1 + R_2}[i_L(0)e^{-t/\tau}]$$

有时还可能遇到不知道电感电流而只知道其他电流的情形。因为电阻上的电流可以发生突变，因此采用符号 0^+ 来表示在 $t = 0$ 后的瞬间。如果用更精确的数学语言来描述，那么 $i_1(0^+)$ 表示当 t 趋于 0 时 $i_1(t)$ 的右极限①。因此，如果 i_1 的初始值已知为 $i_1(0^+)$，那么 i_2 的初始值为：

$$i_2(0^+) = i_1(0^+)\frac{R_1}{R_2}$$

根据这些值，可以得到初始电感电流值 $i_L(0)$[或 $i_L(0^-)$或 $i_L(0^+)$]为：

$$i_L(0^+) = -[i_1(0^+) + i_2(0^+)] = -\frac{R_1 + R_2}{R_2}i_1(0^+)$$

从而得到 i_2 的表达式为：

$$i_2 = i_1(0^+)\frac{R_1}{R_2}e^{-t/\tau}$$

---

① 需要注意，这只是为了方便而引入的记号，如果在方程中遇到 $t = 0^+$ 或与之对应的 $t = 0^-$，可以将它们看做零。使用该记号，可以很清楚地区分事件发生前后的时间点，例如开关的打开和闭合，或者电源的接通和断开。

下面来看能否更直接地得到最后这个表达式。由于电感电流是以指数形式 $e^{-t/\tau}$ 衰减，于是这个电路中所有的其他电流也必然具有同样的特性。如果将电感电流视为一个电源的电流，并作用到一个电阻网络上，那么可以很清楚地知道这一点，因为在这个电阻网络中，每个电流和电压必然具有与电源相同的时间依赖关系。利用这点，可以将 i_2 表示为：

$$i_2 = Ae^{-t/\tau}$$

其中：

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}}$$

而 A 必须由 i_2 的初始值确定。因为已知 $i_1(0^+)$，所以可以得到 R_1 和 R_2 两端的电压，并且有：

$$R_2 i_2(0^+) = R_1 i_1(0^+)$$

于是：

$$i_2(0^+) = i_1(0^+)\frac{R_1}{R_2}$$

因此：

$$i_2 = i_1(0^+)\frac{R_1}{R_2}e^{-t/\tau}$$

对于许多问题，可以采用类似的求解步骤快速求解。首先判断出响应对于时间的依赖关系为指数衰减形式，然后通过对电阻进行合并来确定电路的时间常数，然后就可以写出解的形式，它的幅度待定，最后由给定的初始条件确定这个待定的幅度，这样就完成了整个求解过程。

任何包含一个电感和任意多个电阻的电路都可以采用同样的方法进行求解，这种方法也可以运用于包含多个电感和多个电阻的电路，因为可以采用电阻合并和电感合并方法将这些电路简化为成单个电感和单个电阻的形式。

例题 8.2　求图 8.15(a)所示电路中的 i_1 和 i_L

$t=0$ 后断开电压源，如图 8.15(b)所示，容易计算出等效电感为：

$$L_{eq} = \frac{2\times 3}{2+3} + 1 = 2.2 \text{ mH}$$

等效电阻为：

$$R_{eq} = \frac{90\times(60+120)}{90+180} + 50 = 110\ \Omega$$

于是，时间常数为：

$$\tau = \frac{L_{eq}}{R_{eq}} = \frac{2.2\times 10^{-3}}{110} = 20\ \mu\text{s}$$

因此，自由响应的形式为 $Ae^{-50\,000t}$。在独立电源断开前($t<0$)，i_L 为 $\frac{18}{50}$ A，即 360 mA。在 $t=0^+$，i_L 必须仍然为 360 mA，因此：

$$i_L = \begin{cases} 360 \text{ mA}, & (t<0) \\ 360e^{-50\,000t} \text{ mA}, & (t>0) \end{cases}$$

对于 $t<0$，i_1 为 $\frac{18}{90}$ A = 200 mA，后来它将跳变到另一个值，由 $i_L(0^+)$ 确定。利用分流定

理：

$$i_1(0^+) = -i_L(0^+)\frac{120+60}{120+60+90} = -240\text{ mA}$$

因此：

$$i_1 = \begin{cases} 200\text{ mA}, & (t<0) \\ -240e^{-50\,000t}\text{ mA}, & (t>0) \end{cases}$$

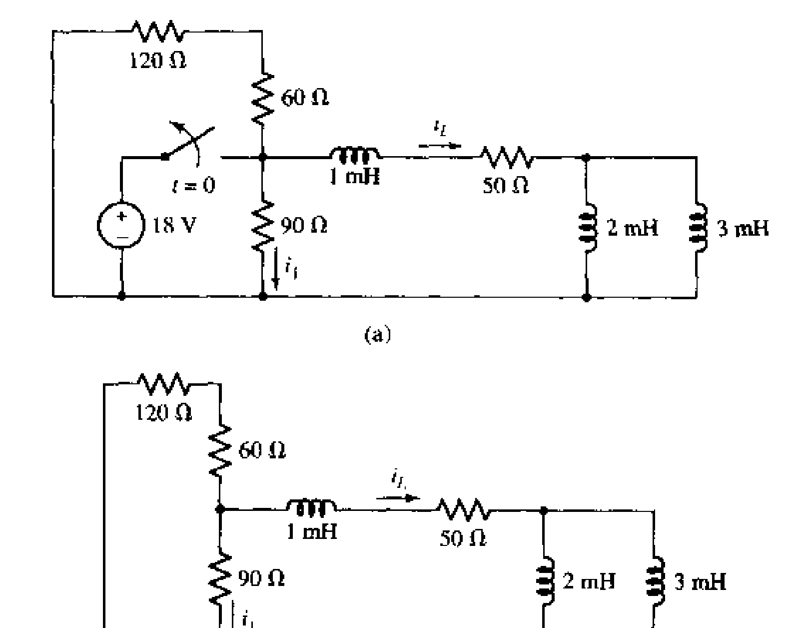


图 8.15 (a)含有多个电阻和多个电感的电路；(b)在 $t=0$ 以后，电路简化成等效的单个电阻 $R_{eq}=110\ \Omega$ 与等效的单个电感 $L_{eq}=2.2$ mH的串联

练习

8.4 如图 8.16 所示电路，求 $t=0.15$ s 时下列各量的值：(a) i_L；(b) i_1；(c) i_2。

答案：0.756 A；0；1.244 A

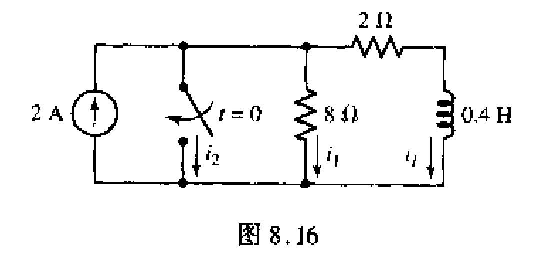


图 8.16

对于含有多个电阻和多个电感的电路，如果可以将其化简成单个等效电感与单个等效电阻串联的电路，这种情况下求解自由响应方法已在前面讨论过了。但是实际上并不总是能进行这样的化简，在这种情况下，不存在单个复指数项或单个时间常数，而是有若干项，项的个数等于对电路进行所有可能的电感合并之后剩余的电感数。

8.5.2　一般 RC 电路

需要求出自由响应的大多数电路都包含多个电阻和多个电容，可以采用类似于 RL 电路的分析方法，首先考虑那些可以最终简化为单个电阻与单个电容相串联的电路。

假定电路只包含一个电容和任意多个电阻，此时可以用一个等效电阻来替换接在电容两端的双端电阻网络，然后可以直接写出电容电压的表达式。

例题 8.3　如图 8.17(a)所示电路，设 $v(0^-)=V_0$，求 $v(0^+)$和 $i_1(0^+)$

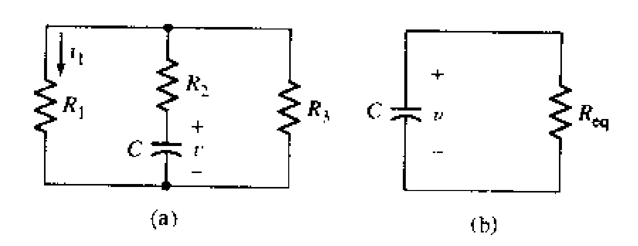


图 8.17　(a)含有一个电容和多个电阻的电路；(b)用一个等效电阻替换电阻网络后的电路，此时的时间常数为 $\tau=R_{eq}C$

首先，将图 8.17(a)所示的电路简化为图 8.17(b)所示的电路，这样可以直接写出：

$$v=V_0e^{-t/R_{eq}C}$$

其中：

$$v(0^+)=v(0^-)=V_0 \quad 和 \quad R_{eq}=R_2+\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}$$

每个电阻的电流和电压必须具有 $Ae^{-t/R_{eq}C}$ 的形式，其中 A 为电流或电压的初始值。例如 R_1 上的电流可以表示为：

$$i_1=i_1(0^+)e^{-t/\tau}$$

其中：

$$\tau=\left(R_2+\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}\right)C$$

$i(0^+)$需要根据初始条件来确定。因为在 $t=0^+$ 时刻流入电路的电流必然来自电容，而电容两端的电压不能瞬时改变，于是：

$$i_1(0^+)=\frac{V_0}{R_2+R_1R_3/(R_1+R_3)}\frac{R_3}{R_1+R_3}$$

练习

8.5　如图 8.18 所示电路，求 v_C 和 v_o 的值，当 t 分别为(a)0^-；(b)0^+；(c)1.3 ms。

答案：100 V，38.4 V；100 V，25.6 V；59.5 V，15.22 V

一些同时包含多个电阻和多个电容的电路可以化简为仅包含单个电阻和单个电容的等效电路，但这要求原来的电路可以划分为两部分，一部分包含所有的电阻，另一部分包含所有的电容，而且这两部分仅通过两根理想导线相连接。不过，通常情况下并不总是能够进行这样的化简，所以更常见的情况是需要用多个时间常数来描述包含多个电阻和多个电容的电路。

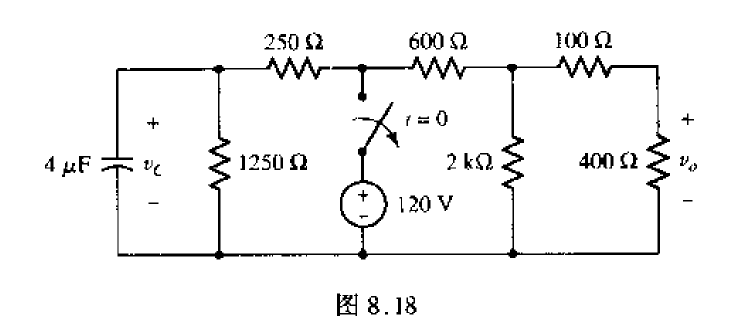


图 8.18

需要留心的是试图将某些理想元件直接相连的情况。例如可能会试图将 $t=0$ 以前具有不同电压的两个理想电容串接起来，这样，使用理想电容模型时将会产生问题，不过，实际的电容都具有一定的电阻，能量可以通过它们被损耗掉。

8.6 单位阶跃函数

前面已经讨论了无源或激励函数不存在时 RL 和 RC 电路的响应，并称这种响应为自由响应，因为它的形式只决定于电路本身的特性。从根本上说，自由响应都产生于存储在电路中的电感或者电容元件上的初始能量。通常会遇到电源和开关电路，而且假定这些开关在 $t=0$ 时打开，这样就相当于移去了电路中的电源，但是电路储存有一定的能量在电容和电感中。换句话说，前面解决的是能源在瞬间从电路移走后的问题，下面是考虑能源在瞬间接入电路时产生的响应类型。

下面主要讨论将直流电源在瞬间接入电路后产生的响应。因为每个电子设备都需要接上电源进行工作，而且大多数设备在它们的使用寿命期间都会开关很多次，所以这里研究的问题适合于很多的实际情况。即使现在只讨论直流电源的情况，但这些简单的例子却可以描述许多实际设备的工作情况。例如，下面要分析的第一个电路可以描述直流电动机启动时电流的建立过程。在微处理器中，采用方波电压脉冲来表示数或者命令，在许多其他电子和晶体管电路中，也可以找到方波电压脉冲的产生和应用的例子。在电视接收机中的同步和扫描电路中，以及在使用脉冲调制的通信系统、雷达系统和许多其他应用中也都存在类似的电路。

前面说到了能源的“瞬间接入”，这句话的含义是它的接入不需要时间①。因此，与电池串联的开关的闭合等效于一个激励函数，它在开关闭合前为零，而在闭合瞬间之后等于电池电压。这种激励函数在开关闭合时刻有一个跳变或者说不连续(或者具有不连续导数，这样的激励函数称为奇异函数)，其中最重要的两种奇异函数为单位阶跃函数和单位脉冲函数。

将单位阶跃激励函数定义为时间的函数，时间小于零时其值为 0，而时间大于零时其值为 1。如果以$(t-t_0)$作为参数，用符号 u 来表示单位阶跃函数，那么对所有小于 t_0 的 t 值，$u(t-t_0)$必然为 0，对所有大于 t_0 的其他 t 值必然为 1，而在 $t=t_0$ 处，$u(t-t_0)$从 0 跳变到 1，它在 $t=t_0$ 没有定义，但是对任意接近 $t=t_0$ 的时刻都是已知的，通常用 $u(t_0^-)=0$ 和 $u(t_0^+)=1$ 来表示这一点。单位阶跃激励函数可以用下式简洁定义为：

① 当然这在物理上是不可能的，但是如果事件发生的时间与描述该电路工作情况的其他时间相比非常短时，它近似正确，并且这便于在数学上描述。

$$u(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t>t_0\end{cases}$$

该函数的图形如图 8.19 所示，注意到，在 $t=t_0$ 处有一段高度为 1 的垂直线，尽管严格地说该上升部分并不是单位阶跃函数定义的一部分，但通常在每个单位阶跃函数的图中都包含它。

还需要注意到，并不要求单位阶跃函数必须为时间的函数，例如可以用 $u(x-x_0)$来表示一个单位阶跃函数，其中的 x 可以代表单位为米的长度或者频率等等。

在电路分析中，一般定义电路中发生不连续或开关作用发生的瞬间为 $t=0$，即 $t_0=0$，这时相应的单位阶跃函数表示为 $u(t-0)$，或简写为 $u(t)$，如图 8.20 所示。因此：

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

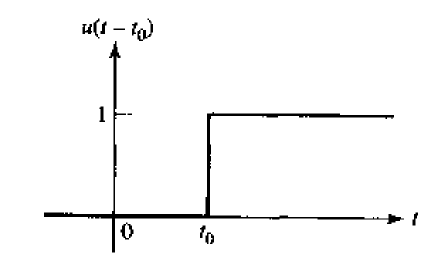


图 8.19 单位阶跃激励函数 $u(t-t_0)$

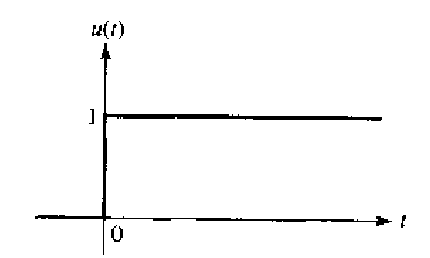


图 8.20 单位阶跃函数 $u(t)$

单位阶跃激励函数本身是无量纲的，所以如果希望用它表示电压，需要将 $u(t-t_0)$乘以一个常量电压，比如 5 V。例如 $v(t)=5u(t-0.2)$V 表示一个理想电压源，在 $t=0.2$ s 之前为零，在 $t=0.2$ s 之后恒为 5 V。图 8.21(a)画出了该激励函数接入到一般网络的情形。

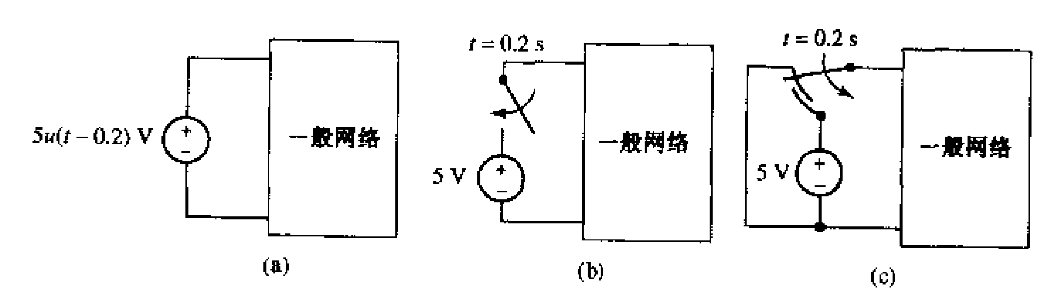


图 8.21 (a)一个电压阶跃函数，它作为一般网络的激励源；(b)简化后的电路，尽管它并不是与(a)精确等效，但在大多数情况下可以用做(a)的等效电路；(c)与(a)完全等效的电路

8.6.1 物理电源与单位阶跃函数

现在很自然地会问，与这些不连续的激励函数相对应的物理电源是什么？这里的等效指的是两个网络的电压－电源特性相同。对于图 8.21(a)所示的阶跃电压源，其电压－电流特性很简单：电压在 $t=0.2$ s 前为零，在 $t=0.2$ s 后为 5 V，而在这两个时间段的电流可以为任意有限值。第一个想到可能是如图 8.21(b)所示的等效电路，即 5 V 直流电源与一个在 $t=0.2$ s闭合的开关相串联的形式。不过这个网络在 $t<0.2$ s 与原网络并不等效，因为这时电池和开关两端的电压不确定(事实上与它等效的电路为开路，这时电压可以为任意值)。不过在 $t=0.2$ s 后，两个网络等效。如果只对该时间区间感兴趣，且在 $t=0.2$ s 流向两个网络的初始

电流相同，那么图 8.21(b)就成为图 8.21(a)的一个很有用的等效。

为了得到与电压阶跃激励函数完全等效的电路，可以使用一个单刀双掷开关。在 $t=0.2$ s前，使用该开关来保证这个一般网络两端的电压为零。在 $t=0.2$ s后，开关打到另一端，接入 5 V 恒定电压。在 $t=0.2$ s，电压是不确定的(符合阶跃激励函数的定义)，并且对于该图而言在 $t=0.2$ s瞬间电池是短路的(幸运的是，这里只是处理数学模型)。这个与图 8.21(a)完全等效的电路如图 8.21(c)所示。

图 8.22(a)画出了将一个阶跃电流激励函数接到一个网络的情形，如果用一个直流电源并联一个开关(在 $t=t_0$ 打开)来代替这个电路，那么必须注意到，虽然在 $t=t_0$ 之后两个电路是等效的，但是只有在初始条件相同时 $t=t_0$ 之后的响应才相同。图 8.22(b)所示电路隐含了 $t<t_0$ 时电流源两端电压为 0，这与图 8.22(a)的情况不同。不过，以后仍然经常混合使用图8.22(a)和图8.22(b)中的电路。与图 8.22(a)完全等效的电路为图 8.21(c)所示电路的对偶，而如果只使用电流和电压阶跃激励函数，并不能构造出与图 8.22(b)所示电路完全等效的电路[①]。

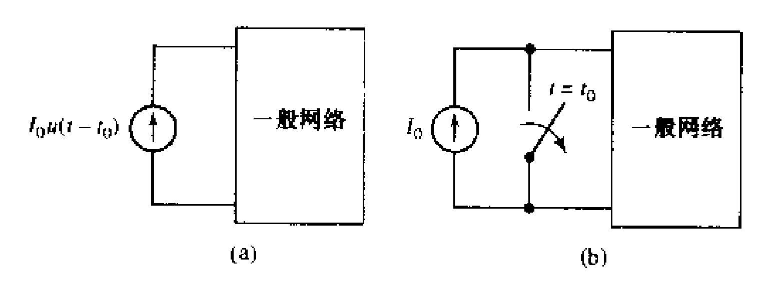


图 8.22 (a)电流阶跃激励函数接入到一个网络中；(b)一个简单电路，尽管它不与(a)完全等效，但在很多情况下通常使用它

8.6.2 矩形脉冲函数

通过对单位阶跃函数进行运算，可以得到一些很有用的激励函数。定义矩形电压脉冲为：

$$v(t-t_0)=\begin{cases}0, & t<t_0\\ V_0, & t_0<t<t_1\\ 0, & t>t_1\end{cases}$$

画出脉冲的图形，如图 8.23 所示。图中的脉冲可以用单位阶跃激励函数表示出来吗？现在考虑两个单位阶跃函数的差 $u(t-t_0)-u(t-t_1)$，这两个阶跃函数如图 8.24(a)所示，它们的差正是一个矩形脉冲。因此，图中的脉冲电压可以用 $V_0u(t-t_0)-V_0u(t-t_1)$表示，如图 8.24(b)所示。

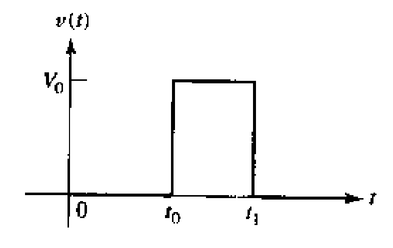


图 8.23 矩形电压脉冲

① 可以得到等效电路的条件是，在 $t=t_0$ 之前流过开关的电流为已知。

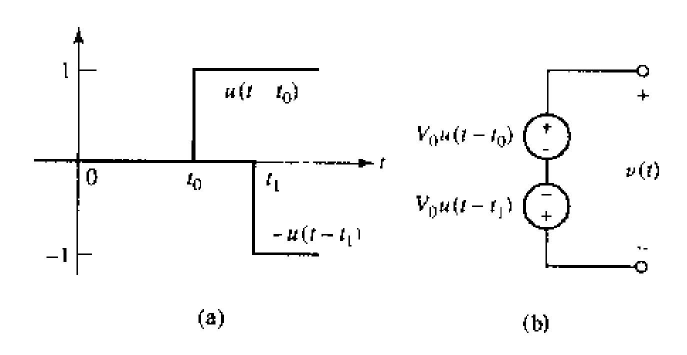


图 8.24　(a)单位阶跃函数 $u(t-t_0)$ 和 $-u(t-t_1)$；(b)得出如图 8.23 所示的矩形电压脉冲

如果将一个正弦电压源 $V_m \sin \omega t$ 在 $t=t_0$ 时接到一个网络，那么正确的激励函数为 $v(t)=V_mu(t-t_0)\sin \omega t$。如果要表示工作在 47 MHz(295 Mrad/s)下的无线遥控小车发送装置能量的突然改变，可以使用另一个单位阶跃函数在 1/10 μs 后关掉这个正弦电源[①]，该电压用脉冲表示为：

$$v(t)=V_m[u(t-t_0)-u(t-t_0-10^{-7})]\sin(295\times10^6 t)$$

激励函数的波形如图 8.25 所示。

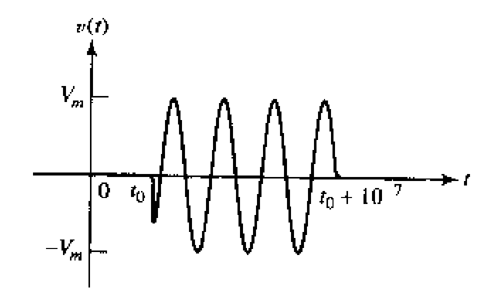


图 8.25　一个 47 MHz 的射频脉冲，用 $v(t)=V_m[u(t-t_0)-u(t-t_0-10^{-7})]\sin(295\times10^6 t)$ 描述

练习

8.6　求出 $t=0.8$ 时下面各表达式的值：(a) $3u(t)-2u(-t)+0.8u(1-t)$；(b) $[4u(t)]u(-t)$；(c) $2u(t)\sin \pi t$。

答案：3.8；0；1.176

8.7　电源作用于 RL 电路

现在开始研究将直流电源瞬间接入简单网络的情形。这个电路含有一个电压为 V_0 的电池，它与一个开关、一个电阻 R 和一个电感 L 串联。$t=0$ 时刻开关闭合，如图 8.26(a)所示。很显然，在 $t=0$ 之前电流 $i(t)$ 为零，于是可以将电池和开关替换成阶跃电压函数 $V_0u(t)$。在 $t=0$ 之前 $V_0u(t)$ 为零，所以电路不产生响应，因此这两个电路是完全等效的，于是，可以根据图 8.26(a)所示的电路，也可以根据图 8.26(b)所示的电路来求解电流 $i(t)$。

① 很显然，可以很容易地控制该小车，响应时间为 0.1 μs。

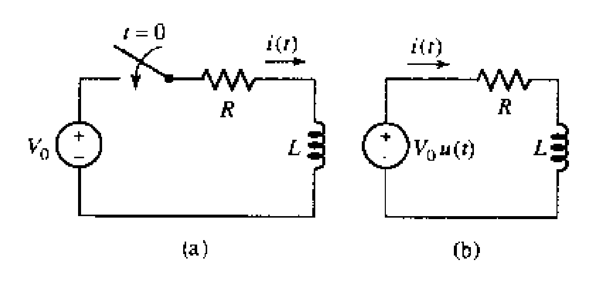


图 8.26 (a)给定的电路;(b)给定电路的等效电路,对所有的时间 t,两个电路的 $i(t)$相同

这时采用下面的方法来求 $i(t)$。首先写出合适的电路方程,然后进行分离变量并积分得到解。当求出解后,可以发现它由两部分组成,通过分析这两部分可以知道它们的物理含义。而当对解的各项物理含义有了更多的理解后,对以后将任何电源接入电路的问题就可以采用更快和物理含义更清晰的方法来求解。首先,采用正式一些的方法来求解。

对图 8.26(b)所示电路应用基尔霍夫电压定律,得到:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_0 u(t)$$

因为单位阶跃激励函数在 $t=0$ 处不连续,所以下面首先考虑 $t<0$ 时的解,然后考虑 $t>0$ 时的解。因为从 $t=-\infty$ 到 $t<0$ 激励为零,所以此时的响应必然也为零,因此:

$$i(t)=0, t<0$$

不过对于正的时间,$u(t)$为 1,则必须求解下面的方程:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_0, t>0$$

经过几步简单代数运算可以分离变量,得到:

$$\frac{L\,di}{V_0 - Ri} = dt$$

直接对方程两边积分得:

$$-\frac{L}{R}\ln(V_0 - Ri) = t + k$$

其中 k 为积分常数,必须利用初始条件来求 k。在 $t=0$ 之前 $i(t)$为零,因此 $i(0^-)=0$。又因为电感中的电流不能在零时间区间内改变,所以 $i(0^+)=0$。令 $t=0$ 时 $i=0$,得到:

$$-\frac{L}{R}\ln V_0 = k$$

因此:

$$-\frac{L}{R}[\ln(V_0 - Ri) - \ln V_0] = t$$

整理得:

$$\frac{V_0 - Ri}{V_0} = e^{-Rt/L}$$

或

$$i = \frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R}e^{-Rt/L}, t>0$$

于是,响应的表达式为:

$$i=\left(\frac{V_0}{R}-\frac{V_0}{R}e^{-Rt/L}\right)u(t) \tag{8.11}$$

8.7.1 更直接的求解方法

前面已经求出了问题的解，但采用的不是最简单的方法。为了找出一种更直接的方法，下面来分析方程(8.11)中两部分的物理含义。指数项与 RL 电路的自由相应具有相同的形式，它为负指数函数，随着时间的增大它将趋于零，它的时间常数为 L/R。于是这部分响应的函数形式与无源电路得到响应形式相同，只是这时指数函数项的幅度决定于电源电压 V_0。因此可以得到结论，响应将由两部分组成，其中第一部分的函数形式与无源电路相同，但幅度取决于激励函数。但另外一部分呢？

公式(8.11)还包含一个常数项 V_0/R，它代表什么呢？答案很简单：随着能量的逐渐损耗，自由响应将趋于零，电路最终将表现为一个电阻 R、一个电感 L 和电池相串联的形式。又因为对于直流而言电感相当于短路，这时流过电感的电流为 V_0/R。这个电流是直接由激励函数产生的，因此称为受迫响应，它表示开关闭合很长时间后电路所出现的响应。

完全响应由两部分组成，自由响应和受迫响应。自由响应描述了电路本身而不是激励源的特性，它可以通过考虑无源电路而得到，其幅度由激励源的初始幅度和电路存储的初始能量共同决定。受迫响应描述了激励函数的特性，它可以通过假定所有的开关都已闭合很长时间以后得到。因为现在只讨论存在开关和直流电源的情形，所以受迫响应的求解只是简单的直流电路的求解问题。

8.7.2 培养直觉理解

将完全响应分为自由响应和受迫响应的原因可以从物理上进行分析。前面已经知道了电路最终必然表现为受迫响应，但是闭合开关的瞬间，电感的初始电流（或者 RC 电路中电容两端的初始电压）的值决定于存储在这些元件的能量，所以这些电流或者电压与由受迫响应决定的电流或电压大小不一样，因此两者之间必然存在一个过渡阶段，在这个过渡阶段，电压或者电流从给定的初始值过渡到由激励源确定的最终值。在完全响应表达式中，体现这个从初值到终值的过渡过程的部分称为自由响应（通常也称为暂态响应）。如果要描述无源简单 RL 电路的自由响应，可以认为其受迫响应为零即可。

以上的讨论仅对那些自由响应最终将消失的电路才正确。对于每个元件都具有一定电阻的实际电路，这通常是正确的，不过也有例外，比如许多“病态”电路，它们的自由响应在时间趋于无穷大时并不会消失。例如由一串电感组成的环形电路中的电流，或者一串电容中的各电容电压。

练习

8.7 电压源 $60-40u(t)$ V 与一个 10 Ω 电阻及一个 50 mH 电感相串联，求下列时刻电感上的电流和电压：$(a)0^-$；$(b)0^+$；$(c)\infty$；$(d)3$ ms。
答案：6 A，0 V；6 A，40 V；2 A，0 V；4.20 A，22.0 V

8.8 自由响应和受迫响应

将完全响应看做自由响应与受迫响应两部分组成，这在数学上有很好的根据。原因是任

何线性微分方程的解都可以表示成两部分的和:通解(自由响应)和特解(受迫响应)。这里不去深入研究一般的微分方程理论,只考虑前面各节中遇到的微分方程的一般形式:

$$\frac{di}{dt}+Pi=Q$$

或

$$di+Pi\,dt=Q\,dt \tag{8.12}$$

这里可以将 Q 视为激励函数,并且可以将其表示成 $Q(t)$ 以强调在一般情况下它依赖于时间。为了简化讨论,假定 P 为正常量,然后还假定 Q 为常量,讨论将限于直流激励函数的情形。

任何一本基础微积分教材都会讲到,如果方程(8.12)的两边乘以一个适当的积分因子,那么两边均为某个函数的微分形式,直接积分就可以得到方程的解。下面不去分离变量,而是将它们重新排列成可以直接进行积分的形式。这个方程的积分因子是 $e^{\int P dt}$ 或简单为 e^{Pt},因为假定了 P 是一个常量。以该积分因子乘方程的两端得到:

$$e^{Pt}di+iPe^{Pt}dt=Qe^{Pt}dt$$

注意到左边的形式为 ie^{Pt} 的微分,因此可以简化为:

$$d(ie^{Pt})=e^{Pt}di+iPe^{Pt}dt$$

于是:

$$d(ie^{Pt})=Qe^{Pt}dt$$

两边积分:

$$ie^{Pt}=\int Qe^{Pt}dt+A$$

其中 A 为积分常数。再乘以 e^{-Pt} 就可以得到 $i(t)$:

$$i=e^{-Pt}\int Qe^{Pt}dt+Ae^{-Pt} \tag{8.13}$$

如果已知激励函数 $Q(t)$,那么就可以通过积分而得到 $i(t)$ 的函数形式。下面并不计算出每个积分,而是利用方程(8.13)来得到几个一般的结论。

8.8.1 自由响应

首先要指出的是,对于无源电路 Q 必然为零,解为自由响应:

$$i_n=Ae^{-Pt} \tag{8.14}$$

当电路仅由电阻、电感和电容组成时,可以发现 P 永远不为负值,并且它仅决定于电路中的无源元件① 以及它们的相互连接关系。于是,随着时间的无限增大,自由响应将趋于零。简单 RL 电路必然属于这种情况,因为初始能量将在电阻中逐渐以热能的形式损耗完。也存在 P 为零的理想电路,这样的电路中自由响应不随时间消失。

8.8.2 受迫响应

下面来考察方程(8.13)中由激励函数 $Q(t)$ 的函数形式决定的第一项。对于随着时间变

① 如果电路含有受控源或者负阻,P 可以为负值。

为无限大自由响应消失的那些电路，这一项必然完全描述了响应的形式，通常称它为受迫响应，也称为稳态响应或者特解。

只考虑将直流电源突然接入电路的情形，于是在所有时间内 $Q(t)$恒定不变，这样，可以计算出方程(8.13)中的积分，得到受迫响应为：

$$i_f = \frac{Q}{P}$$

于是完全响应为：

$$i(t) = \frac{Q}{P} + Ae^{-Pt}$$

对于 RL 串联电路，Q/P 为常量V_0/R，$1/P$ 为时间常数τ。可以看到，不通过求出积分而得到受迫响应，因为它必然是经过无限长时间后的完全响应，它等于电源电压除以串联的电阻值。

8.8.3 完全响应的确定

下面将以简单 RL 串联电路为例，说明如何通过自由响应与受迫响应叠加的方法来确定完全响应。前面已经分析过图 8.27 所示的电路，但当时采用的方法比较繁琐。需要求出的响应是电流 $i(t)$，首先将电流表示成自由响应和受迫响应两部分的和：

$$i = i_n + i_f$$

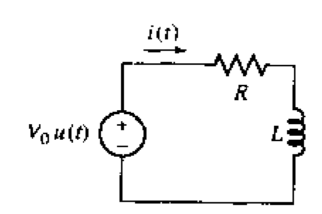


图 8.27　串联 RL 电路，用来说明如何利用自由响应与受迫响应相加的方法得到完全响应的方法

自由响应的函数形式必然与无源电路的响应相同，于是可用短路线代替阶跃电压源，这时，电路成为熟悉的 RL 串联电路，因此：

$$i_n = Ae^{-Rt/L}$$

其中幅度 A 待定，因为初始条件也影响完全响应的形式，所以不能简单地认为 $A = i(0)$。

下一步来考虑受迫响应。在本例中受迫响应必然为常量，因为 $t > 0$ 时电源为常量 V_0。在自由响应消失以后，电感两端电压为零，因此相当于 V_0 直接接在 R 的两端，所以可以得到受迫响应为：

$$i_f = \frac{V_0}{R}$$

注意到，受迫响应中不含未知常量，于是下一步将两个响应合起来，得到：

$$i = Ae^{-Rt/L} + \frac{V_0}{R}$$

然后利用初始条件求出 A。在 $t = 0$ 之前电流为零，且它的值不能瞬时改变，因为该电流流过电感，因此 $t = 0$ 后的瞬间电流仍为零，从而：

$$0 = A + \frac{V_0}{R}$$

所以：

$$i=\frac{V_0}{R}(1-e^{-Rt/L}) \tag{8.15}$$

很明显，A 并不等于 i 的初始值，因为 $A=-V_0/R$，而 $i(0)=0$。不过，对于无源电路，A 为响应的初始值。当存在受迫响应时，必须首先求出响应的初始值，然后将它代入完全响应的表达式中以求出 A。

该响应曲线如图 8.28 所示，可以看到电流从它的初始值零到它的终值 V_0/R 的建立过程。在 3τ 时刻可以认为暂态过程已经结束。如果该电路代表一个大功率直流电动机的励磁线圈，其可能的参数为 $L=10$ H，$R=20$ Ω，可以求出 $\tau=0.5$ s，因此可以知道励磁电流大约在 1.5 s后建立。在经过一个时间常数后，电流大小将达到其终值的 63.2%。

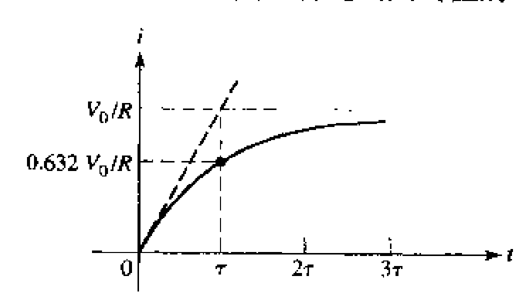


图 8.28 流过图 8.27 所示电路中的电感的电流曲线。曲线在初始时刻的切线与受迫响应在 $t=\tau$ 处相交

例题 8.4 求图 8.29 所示电路中 $i(t)$ 的表达式

这个电路含有一个直流电源和一个阶跃电压源。可能会想到将电感左边的电路用其戴维南等效来替换，不过这里只需要知道它等效为一个电阻串联上一个电压源即可。该电路只包含一个储能元件电感，首先求出：

$$\tau=\frac{L}{R_{eq}}=\frac{3}{1.5}=2\ \text{s}$$

回想起前面用过的式子：

$$i=i_f+i_n$$

于是，和以前一样，自由响应为如下的负指数形式：

$$i_n=Ae^{-t/2}\ \text{A},\qquad t>0$$

因为激励函数为直流电源，所以电流受迫响应为常量。对于直流，电感表现为短路，所以：

$$i_f=\frac{100}{2}=50\ \text{A}$$

从而：

$$i=50+Ae^{-0.5t}\text{A},\quad t>0$$

为了求出 A，必须先求出电感电流的初始值. 在 $t=0$ 之前电感电流为 25 A，因为它不能瞬时改变，所以：

$$25=50+A$$

得：

$$A=-25$$

因此：

$$i = 50 - 25e^{-0.5t}\ \text{A},\quad t > 0$$

它和下面的表达式一起构成了完整的解：

$$i = 25\ \text{A},\quad t < 0$$

或者可以将其写成单个表达式：

$$i = 25 + 25(1 - e^{-0.5t})u(t)\ \text{A}$$

完全响应曲线如图 8.30 所示，注意看自由响应怎样将 $t < 0$ 时的响应状态与恒定的受迫响应状态联系起来。

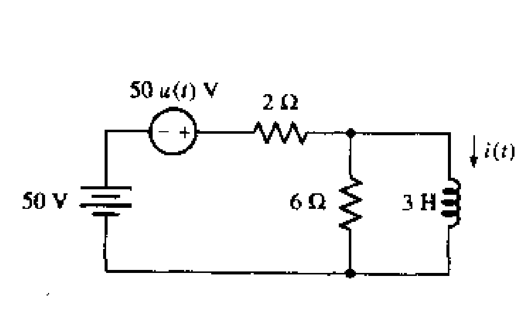


图 8.29　同例题 8.4 中的电路

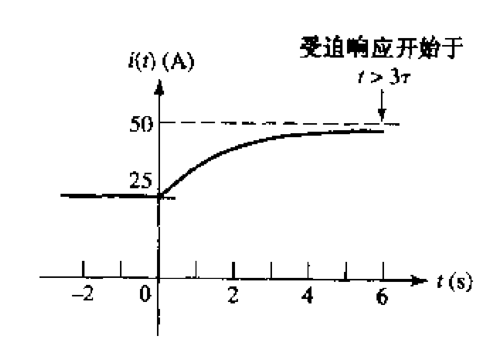


图 8.30　图 8.29 所示电路的响应 $i(t)$ 曲线

练习

8.8　电压源 $v_S = 20e^{-100t}u(t)$ V 与 200 Ω 电阻和 4 H 电感串联，求下列时刻电感电流的幅度：(a)0^-；(b)0^+；(c)8 ms；(d)15 ms。

答案：0；0；22.1 mA；24.9 mA

作为上面这种求解方法的最后一个例子，即不需要求出相应的等效电路就可以求得完全响应，重新考虑简单 *RL* 串联电路。

例题 8.5　求简单串联 *RL* 电路的电流响应，设激励函数为矩形电压脉冲，幅度为 V_0，持续时间为 t_0

首先将激励函数表示成阶跃电压函数的 $V_0u(t)$ 与 $-V_0u(t - t_0)$ 的和，如图 8.31(a) 和图 8.31(b) 所示，下面利用叠加原理来求出电流响应。设 $i_1(t)$ 表示 $i(t)$ 中由上端电压源 $V_0u(t)$ 单独作用产生的响应，$i_2(t)$ 则表示 $-V_0u(t - t_0)$ 单独作用产生的响应，于是：

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

现在的目标是将两个响应 i_1 和 i_2 分别写成自由响应与受迫响应的和。响应 $i_1(t)$ 已经由式(8.15)给出：

$$i_1(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}),\quad t > 0$$

需要注意的是，该解只在 $t > 0$ 有效，上式已注明了这一点。

下面来考虑另一个电源和它产生的响应 $i_2(t)$。注意到这个电源和第一个电源只是极性和接入时间不同，所以没有必要去求解它的自由和受迫响应的形式，因为根据解 $i_1(t)$ 就可以直接写出：

$$i_2(t) = -\frac{V_0}{R}[1 - e^{-R(t-t_0)/L}], \quad t > t_0$$

其中 t 的有效区间为 $t > t_0$，同样必须注明。

将两个解加起来就得到了所求的电流响应，不过需要注意它们的有效时间区间不同。因此：

$$i(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}), \quad 0 < t < t_0$$

和

$$i(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}) - \frac{V_0}{R}(1 - e^{-R(t-t_0)/L}), \quad t > t_0$$

或

$$i(t) = \frac{V_0}{R}e^{-Rt/L}(e^{Rt_0/L} - 1), \quad t > t_0$$

上式与 $t<0$ 时 $i(t)=0$ 合在一起，构成了 $i(t)$ 的完整解，于是可以画出响应随时间变化的曲线。曲线的形状取决于 t_0 与时间常数 τ 的相对大小，图 8.32 画出了两条可能的曲线。左边的曲线是时间常数为激励脉冲宽度一半的情形，所以指数上升的部分在指数衰减之前已基本上达到了 V_0/R。右边为相反的情形，即其时间常数为 t_0 的两倍，于是响应幅度从比较小时就开始衰减。

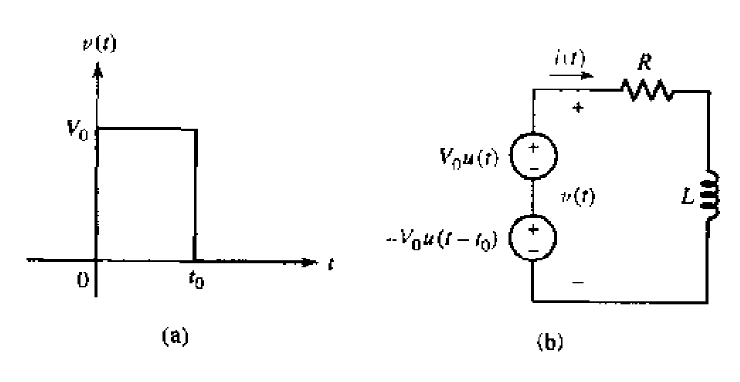


图 8.31 (a)在简单串联 RL 电路中用作激励函数的矩形电压脉冲；(b)串联 RL 电路，其激励函数表示为两个独立阶跃电压源的组合，求电流 $i(t)$

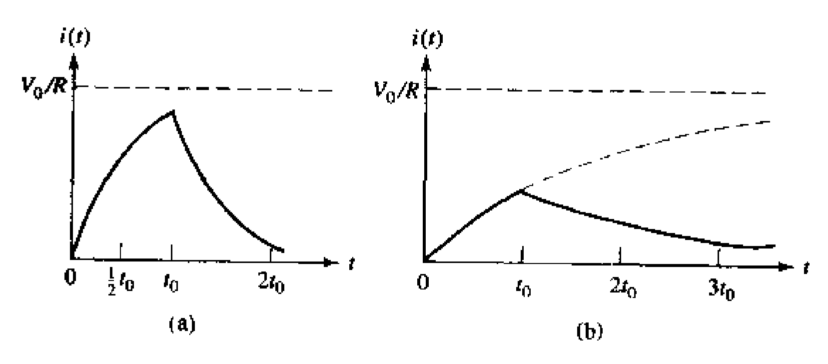


图 8.32 图 8.31(b)所示电路的两个可能的响应曲线。(a)选取 τ 为 $t_0/2$；(b)选取 τ 为 $2t_0$

下面对瞬间接入或者移去直流电源后，RL 电路响应的求解过程做一个总结。假定将所有

独立电源短路后电路可以简化为单个等效电阻 R_{eq} 与单个电感 L_{eq} 串联的情形，需要求出的响应用 $f(t)$ 表示。

1. 移去所有独立电源，简化电路以确定 R_{eq} 和 L_{eq}，得到时间常数为 $\tau = L_{eq}/R_{eq}$。
2. 将 L_{eq} 看做短路，采用直流分析方法确定 $i_L(0^-)$，即不连续性发生前的电感电流。
3. 再次将 L_{eq} 看做短路，采用直流分析方法求出受迫响应，这是当 $t\to\infty$ 时 $f(t)$ 的近似值，将它表示为 $f(\infty)$。
4. 将总的响应写成受迫响应与自由响应的和：$f(t)=f(\infty)+Ae^{-t/\tau}$。
5. 利用初始条件 $i_L(0^+)=i_L(0^-)$ 求出 $f(0^+)$。如果有必要，可以将 L_{eq} 替换为一个电流源 $i_L(0^+)$[如果 $i_L(0^+)=0$ 则为开路]来计算。除了电感电流(和电容电压)外，电路中的其他电流和电压值可以突变。
6. $f(0^+)=f(\infty)+A$，$f(t)=f(\infty)+[f(0^+)-f(\infty)]e^{-t/\tau}$，即总的响应 = 终值 + (初值 − 终值)$e^{-t/\tau}$。

练习

8.9　如图 8.33 所示电路，它在 $t=0$ 开关打开前已工作了很长时间。求下列时刻 i_R 的值：(a)0^-；(b)0^+；(c)∞；(d)1.5 ms。

答案：0；10 mA；4 mA；5.34 mA

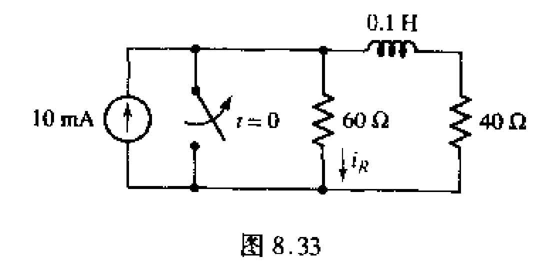


图 8.33

8.9　电源作用于 *RC* 电路

对于任何 *RC* 的电路，其完全响应也可以通过将自由响应与受迫响应加起来得到，下面以一个完整的例子来说明它。

例题 8.6　如图 8.34 所示电路，求电容电压 $v_C(t)$ 和 200 Ω 电阻上的电流 $i(t)$ 的表达式

首先，假定将开关转到 a 时产生的暂态响应已经消失，只余下 120 V 电源产生的受迫响应。这里需要求出 $v_C(t)$，首先求出 $t=0$ 之前开关位于 a 时的受迫响应。图 8.34(b)中，电路的所有电压均为常量，于是没有电流流过电容，利用分压定理可以得到初始电压：

$$v_C(0)=\frac{50}{50+10}\times(120)=100\ \text{V}$$

因为电容电压不能瞬时改变，所以 $t=0^-$ 时和 $t=0^+$ 时的电压相等。

然后将开关从 a 转到 b，设完全响应为：

$$v_C = v_{Cf} + v_{Cn}$$

为方便起见，将此时的电路重新画出，如图 8.34(c)所示。自由响应的形式可以通过将 50 V电源替换为短路线，然后求出等效电阻(即从电容两端“看”过去的戴维南等效电阻)，再求出时间常数而得到。等效电阻为：

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{50}+\frac{1}{200}+\frac{1}{60}} = 24\ \Omega$$

所以：

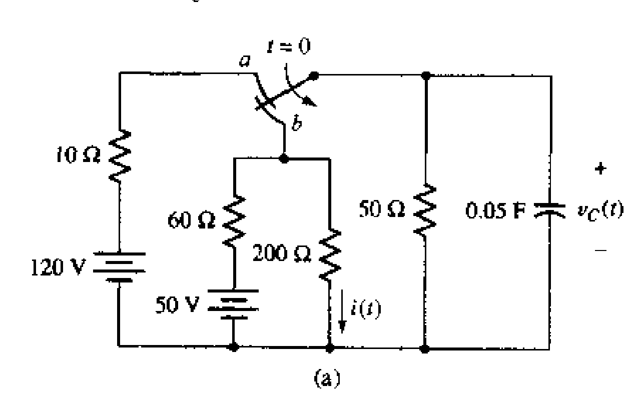
$$v_{C_n} = Ae^{-t/R_{eq}C} = Ae^{-t/1.2}$$

为求出开关位于 b 时的受迫响应，在所有电压和电流都不再变化后，这时可以将电容看成开路，利用分压定理可以得到：

$$v_{Cf} = \frac{(50)\times(200)/(50+200)}{60+(50)\times(200)/(50+200)}(50) = 20\ \text{V}$$

因此：

$$v_C = 20 + Ae^{-t/1.2}\quad \text{V}$$



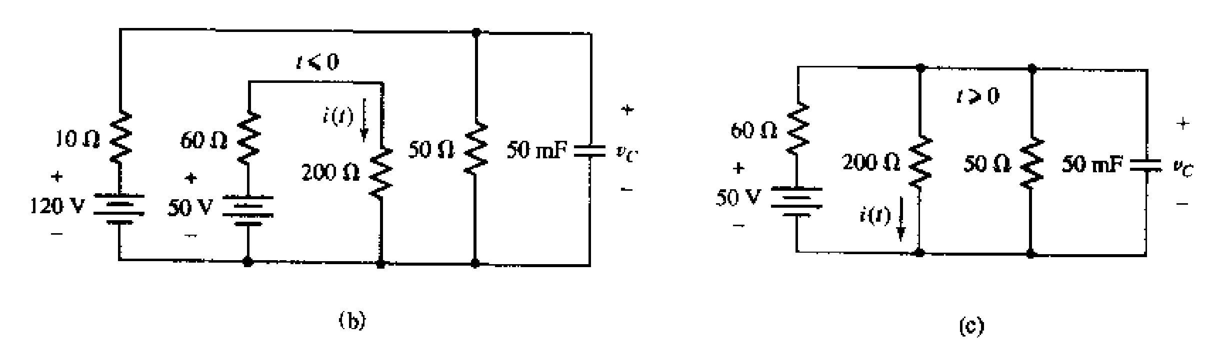


图 8.34 (a)求该 RC 电路中 v_C 和 i 的完全响应，它们由受迫响应与自由响应相加得到；(b) $t \leqslant 0$时的电路；(c) $t \geqslant 0$时的电路

根据已知的初始条件有：

$$100 = 20 + A$$

或

$$v_C = 20 + 80e^{-t/1.2}\quad \text{V}$$

或

$$v_C = 20 + 80e^{-t/1.2}\quad \text{V},\ \ t > 0$$

画出该响应如图 8.35(a)所示。再次看到，自由响应成为初始响应到最终响应的过渡。

下一步来求解 $i(t)$，不必要求该响应在开关切换的瞬间保持不变。当开关位于 a 时，很明显有 $i=50/260=192.3$ mA，而当开关位于 b 时，该电流的受迫响应为：

$$i_f=\frac{50}{60+(50)\times(200)/(50+200)}\left(\frac{50}{50+200}\right)=0.1\ \mathrm{A}$$

而自由响应形式则与前面已求出的电容电压相同：

$$i_n=Ae^{-t/1.2}$$

将受迫响应与自由响应合并起来，得到：

$$i=0.1+Ae^{-t/1.2}\quad \mathrm{A}$$

为了求出 A，需要知道 $i(0^+)$，这可以通过分析储能元件（这里为电容）而得到。v_C 在开关前后必须保持为 100 V 不变，这是求出其他电流和电压在 $t=0^+$ 处的值的关键条件。因为 $v_C(0^+)=100$ V，且该电容与 200 Ω 电阻并联，因此可以得到 $i(0^+)=0.5$ A，于是：

$$i(t)=0.1923\ \mathrm{A},\quad t<0$$
$$i(t)=0.1+0.4e^{-t/1.2}\quad \mathrm{A},\quad t>0$$

或

$$i(t)=0.1923+(-0.0923+0.4e^{-t/1.2})u(t)\quad \mathrm{A}$$

最后一个公式对所有时间 t 均正确。

如果采用 $u(-t)$，可以将完全响应写成更简洁的形式。当 $t<0$ 和 $t=0$ 时 $u(-t)$ 为 1，$t>0$ 时为 0。因此：

$$i(t)=0.1923u(-t)+(0.1+0.4e^{-t/1.2})u(t)\quad \mathrm{A}$$

该响应曲线如图 8.35(b)所示。从上式可以看到，对于只含有单个储能元件的电路，只需要用四个数就可以写出响应函数形式或者画出它，这四个数为：开关闭合前的常数(0.1923 A)，开关闭合后的瞬时值(0.5 A)，恒定的受迫响应(0.1 A)，以及时间常数(1.2 s)。知道这些后，很容易写出或画出这个负指数函数。

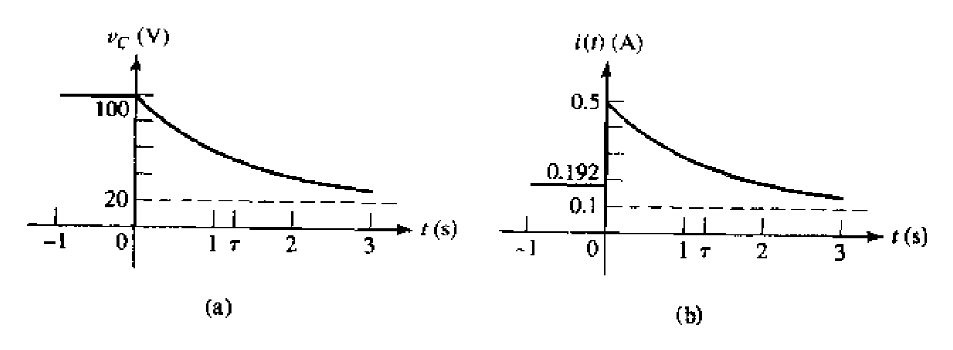


图 8.35　图 8.34 电路响应的时间函数。(a) v_C；(b) i

练习

8.10　如图 8.36 所示电路，求下列时刻 $v_C(t)$ 的值：(a)0^-；(b)0^+；(c)∞；(d)0.08 s。

答案：20 V；20 V；28V；24.4 V

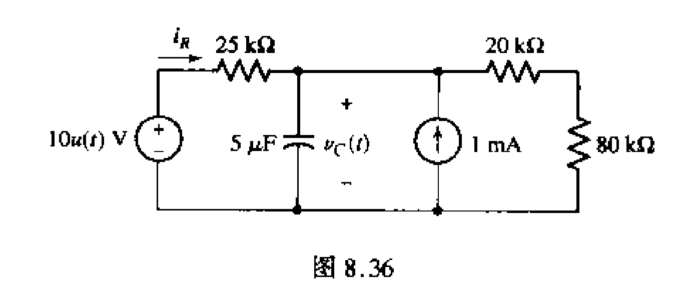
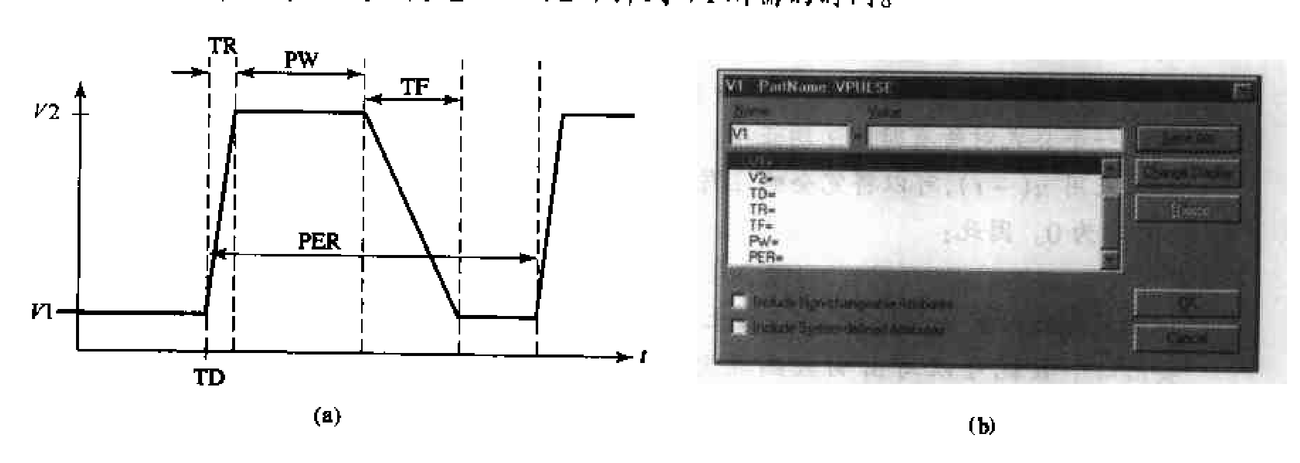


图 8.36

计算机辅助分析

下面考虑 *RC* 和 *RL* 电路对脉冲波形的响应，这里将扩展前面关于自由与受迫响应的讨论。在PSpice中，使用电源元件VPULSE和IPULSE可以很方便地定义任意波形。图 8.37(a)给出了VPULSE参数的定义图，图 8.37(b)给出了元件对话框。波形的脉冲宽度(PW)定义为脉冲电压等于 *V*2 但还没有开始下降时所持续的时间。上升时间 TR 定义为电压从 *V*1 变到 *V*2 所经历的时间。下降时间 TF 定义为电压从 *V*2 下降到 *V*1 所需的时间。



(a) (b)

图 8.37 (a)VPULSE 参数的定义图；(b)VPULSE 对话框

波形周期(PER)指两个连续脉冲的前沿之间的时间间隔。如果选取TR和TF比PER或PW小得多，那么可以得到比较精确的矩形波。如果要得到非周期函数，例如单位阶跃函数，那么将PER设置为小于PW即可。还需要说明的是，如果有必要，可以设置开始第一个脉冲的延时TD。

图 8.38 画出了 1 μF 电容与一个 1 kΩ 电阻和一个VPULSE源串联时，1 μF 电容两端的电压的仿真结果，其中VPULSE的参数为 TD = 0, *V*1 = 0, *V*2 = 9 V, TR = TF = 1 ns, PW = 10 ms 和 PER = 15 ms。需要注意的是电路的时间常数为 1 ms，所以各脉冲的持续时间超过暂态响应时间(约 5τ)的 2 倍。可以从图中清楚地看到这一点，因为电容电压具有足够的时间在脉冲结束前达到 9 V 的稳态值(即受迫响应或 $t=\infty$ 时的响应)。

减小脉冲的宽度，重复上面的仿真，从图 8.39 中所示的仿真输出结果可以看到，电容没有足够的时间在脉冲结束前达到它的稳态值 9 V。因此，图 8.39 所示的波形不能让电容充电完全。

两次仿真结果均为脉冲串，其中每个脉冲均在电容放电完全后才开始，尤其在第二次仿真中可以更清楚地看到这一点。因此，可以认为任何脉冲的前沿在 $t=0$ 时刻开始，且初始条件为零。

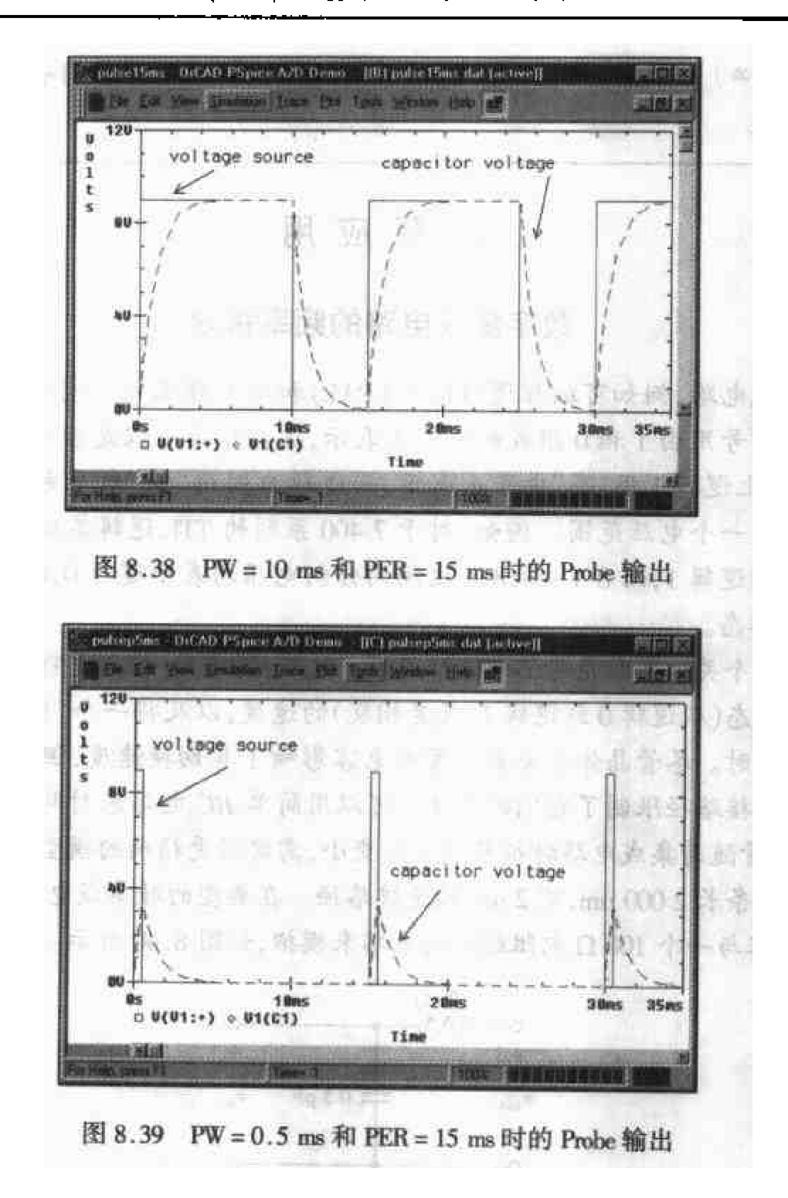


图 8.38　PW = 10 ms 和 PER = 15 ms 时的 Probe 输出

图 8.39　PW = 0.5 ms 和 PER = 15 ms 时的 Probe 输出

最后，作为本节的结束，列出第 8.8 节最后部分的对偶表述。

下面对瞬间接入或者移去直流电源后，*RC* 电路响应的求解过程做一个总结。假定将所有独立电源短路后电路可以简化为单个等效电阻 R_{eq} 与单个电容 C_{eq} 并联的情形，需要求出的响应用 $f(t)$ 表示。

1. 移去所有独立电源，简化电路以确定 R_{eq} 和 C_{eq}，得到时间常数为 $\tau = R_{eq}C_{eq}$。
2. 将 C_{eq} 看做开路，采用直流分析方法确定 $v_C(0^-)$，即不连续性发生前的电容电压。
3. 再次将 C_{eq} 看做开路，来用直流分析方法求出受迫响应，这是当 $t \to \infty$ 时 $f(t)$ 的近似值，将它表示为 $f(\infty)$。
4. 将总的响应写成受迫响应与自由响应的和：$f(t) = f(\infty) + Ae^{-t/\tau}$。
5. 利用条件 $v_C(0^+) = v_C(0^-)$ 求出 $f(0^+)$。如果有必要，可以将 C_{eq} 替换为一个电压源 $v_C(0^+)$[如果 $v_C(0^+) = 0$ 则为短路]来计算。除了电容电压(和电感电流)外，电路中的其他电流和电压值可以突变。

6. $f(0^+)=f(\infty)+A$，$f(t)=f(\infty)+[f(0^+)-f(\infty)]e^{-t/\tau}$，即总的响应 = 终值 + (初值 - 终值)$e^{-t/\tau}$。

实 际 应 用

数字集成电路的频率极限

现代数字集成电路，例如可编程逻辑阵列(PAL)和微处理器是由称为门的晶体管电路连接而成的。数字信号用由1和0组成的符号来表示，这些信号可以是数据或者指令(例如"加"和"减")。在电气上逻辑1用"高"电平来表示，而逻辑0则用"低"电平来表示。在实际中，高电平和低电平都是一个电压范围。例如，对于7 400系列的TTL逻辑集成电路，2 V～5 V之间的任何电压均表示逻辑1，而0 V～0.8 V之间的任何电压均表示逻辑0，0.8 V～2 V之间的电压不表示任何逻辑态。

数字电路的一个关键参数是它们的工作速度。这里的"速度"指的是将一个门从一个逻辑态切换到另一个逻辑态(从逻辑0到逻辑1，或者相反)的速度，以及将一个门的输出传到另一个门的输入所需要的延时。尽管晶体管含有的固有电容影响了其切换速度，但目前更重要的是集成电路中门与门的连接路径限制了它们的速度。可以用简单 *RC* 电路来对两个逻辑门之间的连接路径进行模拟(尽管随着集成电路特征尺寸不断变小，需要用更精确的模型来精确估算电路的性能)。例如，考虑一条长2 000 μm，宽2 μm的连接路径。在典型的硅集成电路中，这样的路径可以用一个0.5 pF电容与一个100 Ω电阻组成的电路来模拟，如图8.40所示。

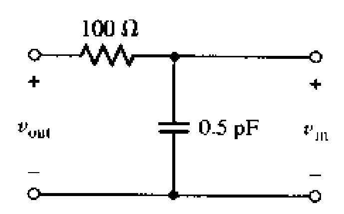


图8.40 集成电路门与门之间连接路径的电路模型

假定电压 v_{out} 表示输出电压，这个电压正从逻辑0态转到逻辑1态。电压 v_{in} 位于另一个门输入端，这里感兴趣的是 v_{in} 需要用多长时间才能达到与 v_{out} 相同的逻辑态。

假定互连路径模型中的0.5 pF电容初始时没有电荷[这就是说 $v_{in}(0)=0$]。计算出该路径的 *RC* 电路模型的时间常数为 $\tau=RC=50$ ps，假设 v_{out} 发生变化的时刻为 $t=0$。于是可以得到：

$$v_{in}(t)=Ae^{-t/\tau}+v_{out}(0)$$

令 $v_{in}(0)=0$，得到 $A=-v_{out}(0)$，所以：

$$v_{in}(t)=v_{out}(0)[1-e^{-t/\tau}]$$

分析这个方程，可以看到 v_{in} 将在 5τ 即250 ns后达到 $v_{out}(0)$。如果在该暂态过程结束之前 v_{out} 再次发生改变，那么电容没有足够的时间来充电。在这种情况下，v_{in} 将小于 $v_{out}(0)$。例如，假定 $v_{out}(0)$ 等于逻辑1的最低电平，那么这意味着 v_{in} 将不会随之变为逻辑1。如果 v_{out} 突然变为0 V(逻辑0)，这时电容将开始放电，这使得 v_{in} 进一步减小。因此，如果逻辑状态切换太快，将

不能够使信息从一个门传到另一个门。

因此，逻辑态的切换速度最快为$(5\tau)^{-1}$，它可以用最大工作频率表示出来：

$$f_{max}=\frac{1}{2\times(5\tau)}=2\ \text{GHz}$$

其中的因子 2 反映了充电和放电时间。如果希望集成电路在更高的频率上工作，以达到更高的运算速度，那么需要减小互连电容或者互连电阻，或者同时减小它们。

还需要指出的是，上面的讨论中忽略了一些细节。首先，假定了 v_{out} 在 $t=0$ 时刻"变化"，同时假定了 v_{out} 的上升时间为零。在实际中，它仅需达到 2 V 就等于逻辑 1，只是最后它会逐渐增长到 5 V。其次，正如第一段中所指出的，v_{in} 并不必要精确达到 v_{out} 才能表示相同的逻辑态。

8.10 小结与复习

- 对于含有电容和电感的电路，当将电源瞬时接入或者移出时，电路的响应总是由两部分组成，即自由响应和受迫响应。
- 自由响应（也称为暂态响应）的形式仅决定于电路中元件的参数和它们的连接方式。
- 受迫响应的形式反映了激励函数的形式，因此直流激励函数总是产生恒定的受迫响应。
- 对于可以简化为单个等效电感 L 和单个等效电阻 R 的电路，其自由响应为 $i(t)=I_0e^{-t/\tau}$，其中 $\tau=L/R$ 为电路的时间常数。
- 对于可以简化为单个等效电容 C 和单个等效电阻 R 的电路，其自由响应为 $v(t)=V_0e^{-t/\tau}$，其中 $\tau=RC$ 为电路的时间常数。
- 单位阶跃函数可以用来对开关打开和闭合进行建模，不过要注意电路的初始条件。
- 由直流电源激励产生的 *RL* 或 *RC* 电路的完全响应 $f(t)$ 具有如下形式：$f(0^+)=f(\infty)+A$ 和 $f(t)=f(\infty)+[f(0^+)-f(\infty)]e^{-t/\tau}$，即总的响应 = 终值 + (初值 - 终值)$e^{-t/\tau}$。

习题

1. 如图 8.41 所示电路，开关闭合很长时间后在 $t=0$ 时打开。(a)求 $t>0$ 的 $i_L(t)$；(b)计算 $i_L(10\ \text{ms})$；(c)如果 $i_L(t_1)=0.5i_L(0)$，求 t_1。
2. 图 8.42 中的开关闭合很长时间后在 $t=0$ 时打开。求(a)$t=0^-$；(b)$t=0^+$；(c)$t=0.3$ ms时的 i_L 和 i_x。

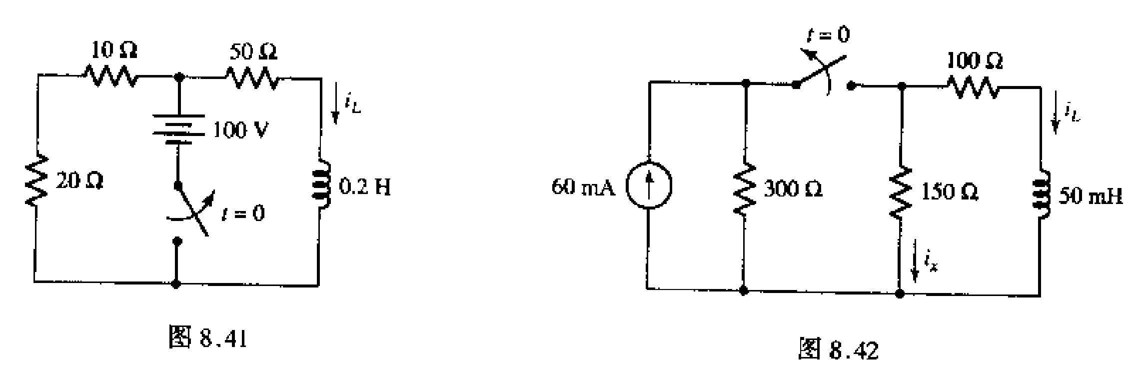


图 8.41　　图 8.42

3. 如图 8.43 所示电路,开关打开很长时间后在 $t=0$ 时闭合。计算 $t=5\ \mu s$ 时的(a)i_L;(b)i_{SW}。

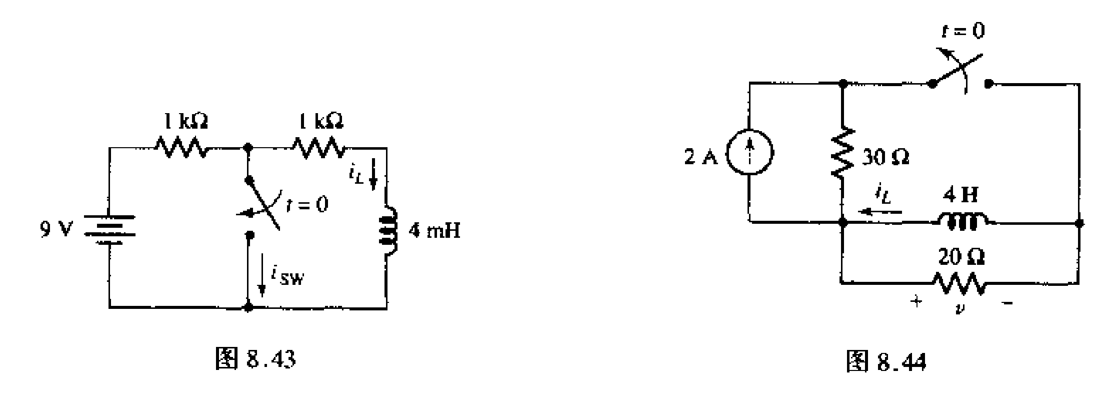


图 8.43 图 8.44

4. 如图 8.44 所示电路,开关闭合很长时间后在 $t=0$ 时打开。求开关打开瞬间的(a)i_L;(b)v。

5. 如图 8.45 所示电路,其中的开关为单刀双掷,在图中,它表示闭合一个电路的同时打开另一个电路。假定开关位于图中所示的位置已有很长时间,确定如下时刻的 v 和 i_L:(a)开关切换前的瞬间;(b)开关切换后的瞬间。

6. 如图 8.46 所示电路,开关在 $t=0$ 闭合前已断开很长时间。画出下列响应在时间区间 $-5<t<5\ \mu s$ 的曲线:(a)$i_L(t)$;(b)$i_x(t)$。

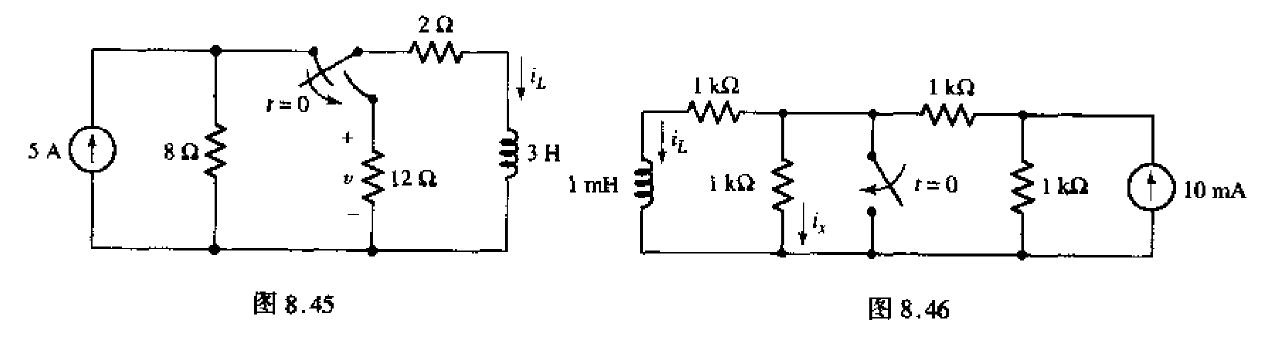


图 8.45 图 8.46

7. 图 8.4 画出了 i/I_0 随时间变化的曲线。(a)求 $i/I_0=0.1, 0.01$ 和 0.001 时 t/τ 的值;(b)如果在 t/τ 处作曲线的切线,它和 t/τ 轴在何处相交?

8. 参看图 8.47 所示的响应,求出电路的时间常数和流过电感的初始电流。

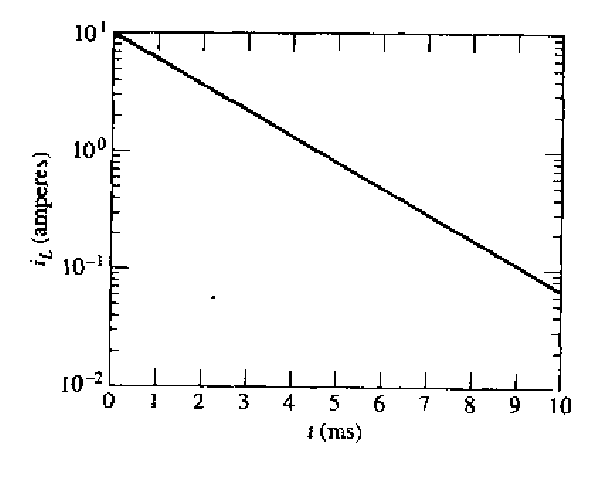


图 8.47

9. 简单 RL 电路中，10 mH 电感储存的初始能量为 15 mJ，对 $R = 1\ \text{k}\Omega$，$R = 10\ \text{k}\Omega$ 和 $R = 100\ \text{k}\Omega$，分别画出电阻电压的曲线，并用 Pspice 仿真来验证你的解答。

10. 图 8.1 所示电路中，设 $R = 1\ \text{M}\Omega$ 和 $L = 3.3\ \mu\text{H}$。(a)计算电路的时间常数；(b)如果 $t = 0$ 时电感的初始能量为 43 μJ，确定 $t = 5$ ps 时 i_L 的值；(c)用 PSpice 验证你的解答。

11. 一个数字信号通过一个电感为 125.7 μH 的松散绕制的线圈，如果要求暂态的持续时间小于 100 ns，确定接收设备最小允许的戴维南等效电阻。

12. 一个立体声收音机的电源中含有两个并联的 50 mF 大电容。当关掉电源时，你可以看到，表示电源打开的黄色 LED 指示灯经过几秒的时间才慢慢熄灭。对于电视也是如此，于是你决定用一个具有不同快门速度的焦距为 35 mm 的照相机，以及一些廉价的胶卷来做一个实验。当快门速度为 2 s，洗出的胶卷没有图像，当快门速度为 1 s，看到一个非常弱的图像，当快门速度为 150 ms，图像为采用最快的快门速度进行拍摄所得到的图像强度的 14%。估算该电路的戴维南等效阻抗。

13. (a)如图 8.48 所示电路，求 $v_C(t)$ 的表达式；(b)在何时 $v_C = 0.1v_C(0)$？

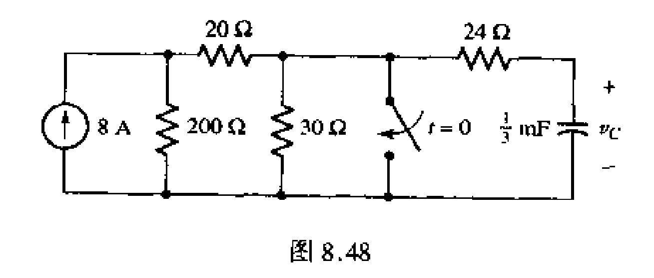


图 8.48

14. 一个 4 A 的电源，一个 20 Ω 电阻，以及一个 5 μF 电容相并联。在 $t = 0$，电源的幅度突然降为零(即变成一个 0 A 的电源)。(a)在何时电容电压降为其初始值的一半；(b)在何时电容储存的能量降到其初始值的一半？

15. 如图 8.49 所示电路，确定 $v_C(t)$ 和 $i_C(t)$，并在同一个图内画出这两条曲线，$-0.1 < t < 0.1$ s。

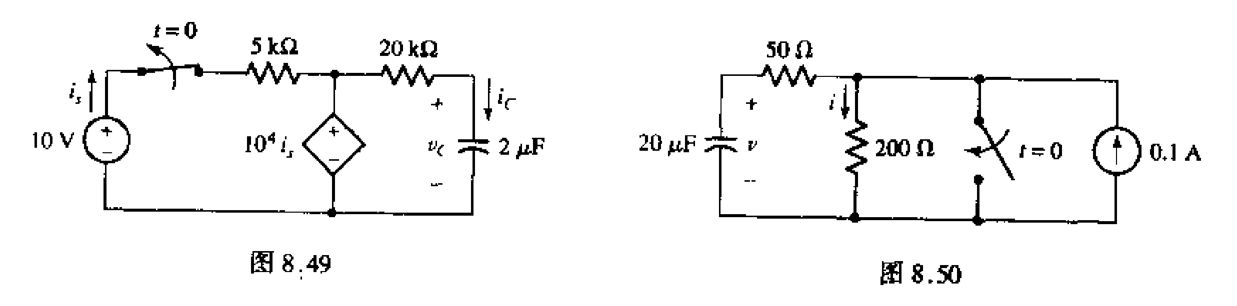


图 8.49　　　　图 8.50

16. 如图 8.50 所示电路，确定电流 i 和电压 v 在 $t = 0^+$，$t = 1.5$ ms 和 $t = 3.0$ ms 的值。

17. 一个 0.2 H 的电感与一个 100 Ω 的电阻并联，在 $t = 0$ 时电感电流为 4 A。(a)求 $t = 0.8$ ms 时 $i_L(t)$ 的值；(b)如果在 $t = 1$ ms 时将另一个 100 Ω 的电阻并联到电感两端，求 $t = 2$ ms 时 i_L 的值。

18. 一个 20 mH 的电感和一个 1 kΩ 的电阻并联，设 $t = 0$ 时回路电流的值为 40 mA。(a)在何时该电流为 10 mA? (b)在 $t = 10$ μs 时将一个多大的电阻串联接入电路中，使得 $t = 15$ μs 时电流为 10 mA?

PSpice 提示：PSpice 中有两种开关，Sw_tClose 在指定时刻闭合，Sw_tOpen 在指定时刻开路。

19. 如图 8.51 所示网络，初始值为 $i_1(0) = 20$ mA 和 $i_2(0) = 15$ mA。(a)确定 $v(0)$；(b)求出 $v(15\ \mu s)$的值；(c)在何时 $v(t) = 0.1v(0)$？

20. 如图 8.52 所示电路，求 R_1 和 R_2 的值，使得 $v_R(0^+) = 10$ V 和 $v_R(1\text{ms}) = 5$ V。

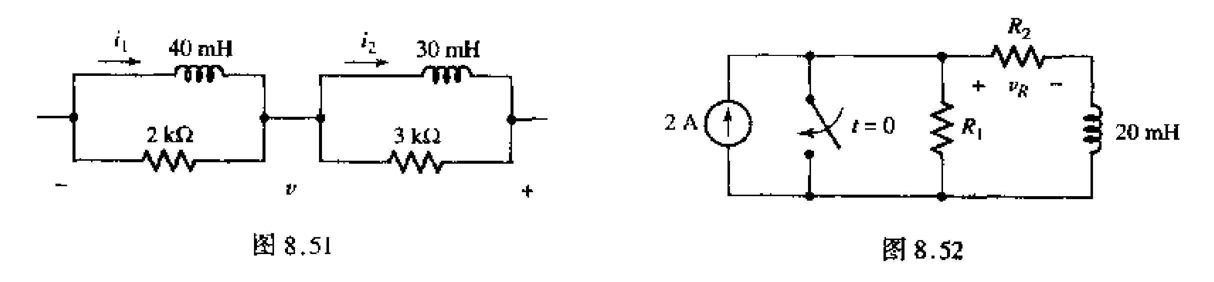


图 8.51　　　　图 8.52

21. 如图 8.53 所示电路，图中的开关在 $t = 0$ 闭合前已打开了很长时间。(a)求 $t > 0$ 时 $i_L(t)$的表达式；(b)画出 $-4 < t < 4$ ms 时 $v_x(t)$的曲线。

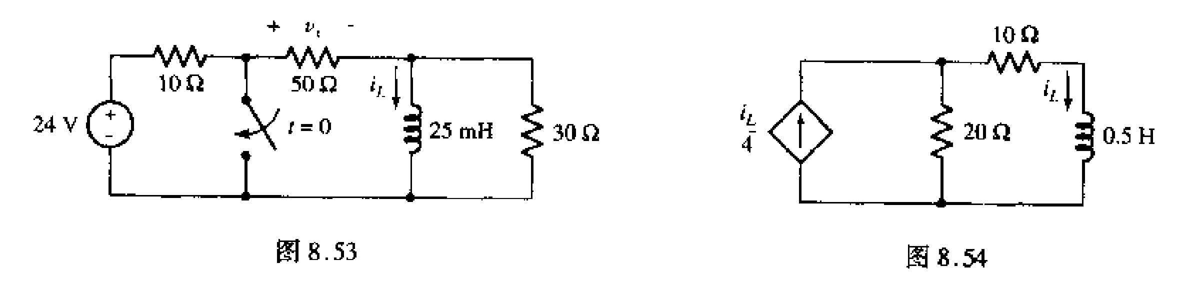


图 8.53　　　　图 8.54

22. 如图 8.54 所示电路，如果 $i_L(0) = 10$ A，求 $t > 0$ 时 $i_L(t)$的表达式。

23. 参考图 8.55 所示电路，求在 $t = -0.1, 0.03$ 和 0.1 s 时的 i_1，并画出 i_1 随 t 变化的曲线，其中，$-0.1 < t < 1$s。

24. 某电路由一个 0.5 H 电感，一个 10 Ω 电阻和一个 40 Ω 电阻串联而成，设 $t = 0$ 时电感电流为 4 A。(a)求 $i_L(15\text{ ms})$；(b)如果在 $t = 15$ ms 时 40 Ω 的电阻被短路，求 $i_L(30\text{ ms})$。

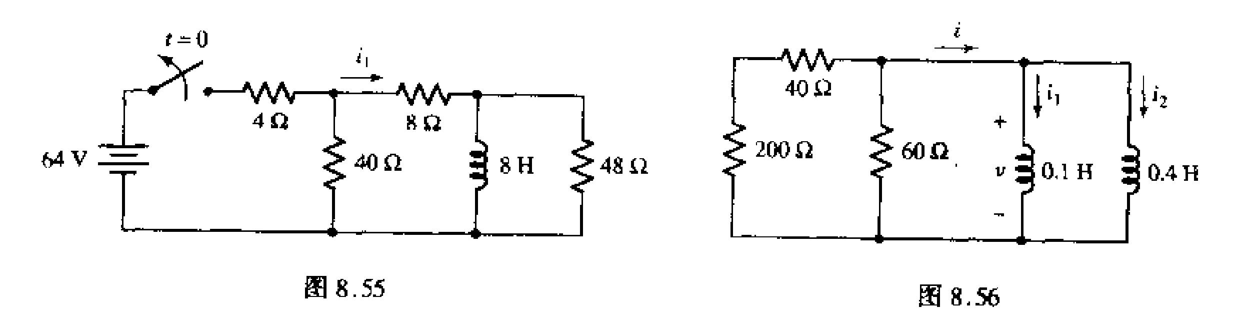


图 8.55　　　　图 8.56

25. 如图 8.56 所示电路，它含有两个并联的电感，于是在两个电感回路之间可能存在循环流动的电流。令 $i_1(0^-) = 10$ A 和 $i_2(0^-) = 20$ A。(a)求 $i_1(0^+)$，$i_2(0^+)$和 $i(0^+)$；(b)确定 $i(t)$的时间常数 τ；(c)求 $t > 0$ 的 $i(t)$；(d)求 $v(t)$；(e)从 $v(t)$求出 $i_1(t)$和 $i_2(t)$；(f)验证 $t = 0$ 时储存的能量等于 $t = 0$ 到 $t = \infty$ 之间阻性网络消耗的能量加上 t

$=\infty$时储存在电感的能量。

26. 如图 8.57 所示电路，假设它已工作了很长的时间。电路中的开关在早上 10 点整打开，求以下时刻 i_1 和 v_C 的值：(a)早上 9:59；(b)早上 10:05；(c)求 $t=1.2\tau$ 时的$i_1(t)$；(d)用 PSpice 验证你的答案。

27. 如图所示电路，假设它已工作了很长的时间，在 $t=0$ 时开关打开。求以下各量的值：(a)$i_s(0^-)$；(b)$i_x(0^-)$；(c)$i_x(0^+)$；(d)$i_s(0^+)$；(e)$i_x(0.4\ \text{s})$。

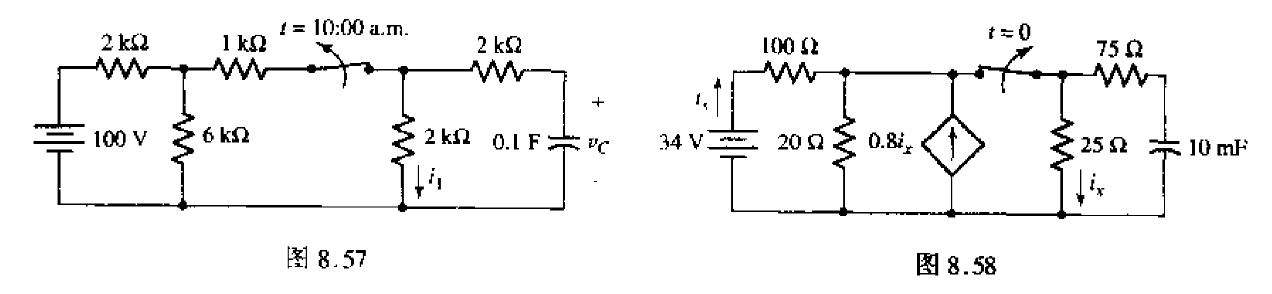


图 8.57　　图 8.58

28. 如图 8.59 所示电路，在 $t=0$ 之前开关已经闭合了很长的一段时间，在 $t=0$ 时将开关打开。(a)求 $t>0$ 时的 $v_C(t)$；(b)计算 $i_A(-100\ \mu\text{s})$和 $i_A(100\ \mu\text{s})$；(c)用 PSpice 验证你的答案。

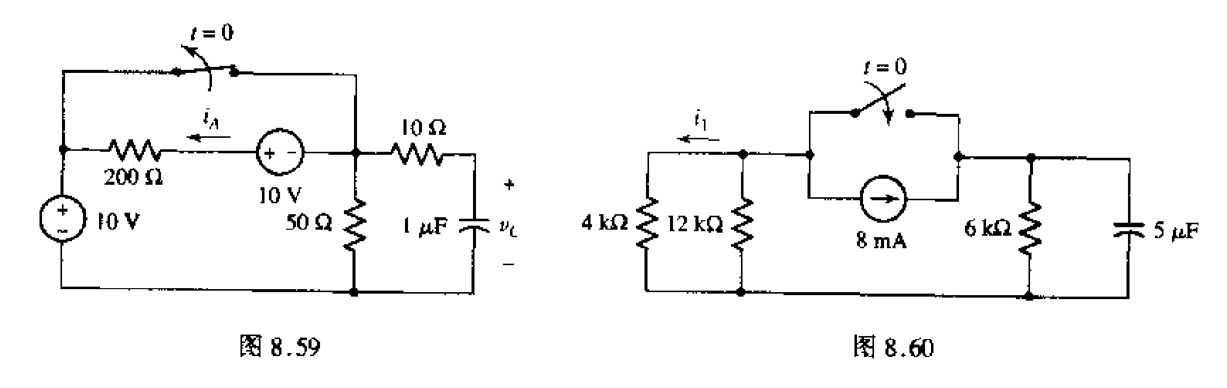


图 8.59　　图 8.60

29. 如图 8.60 所示电路，该电路已处在该状态很长的时间，在 $t=0$ 开关闭合；(a)求 $t<0$ 时的 $i_1(t)$；(b) 求 $t>0$ 时的 $i_1(t)$。

30. 图 8.61 所示电路已处在该状态很长的时间，在 $t=0$ 两个开关同时打开，如图所示。(a)求出 $t>0$ 时的 v_{out}的表达式；(b)求出 $t=0^+$，1 μs 和 5 μs 时的 v_{out}。

31. (a)假定图 8.62 所示的电路已处在该状态很长的时间，求在开关打开之后的 $v_C(t)$ 的表达式；(b)计算在 $t=3\ \mu\text{s}$ 的 $v_C(t)$；(c)用 PSpice 验证你的答案。

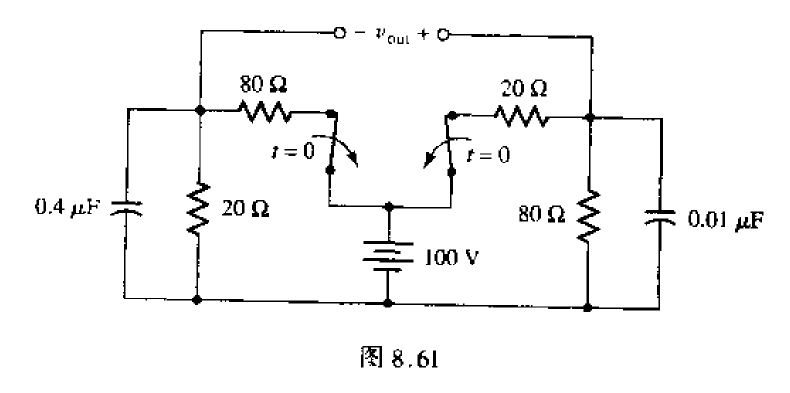


图 8.61

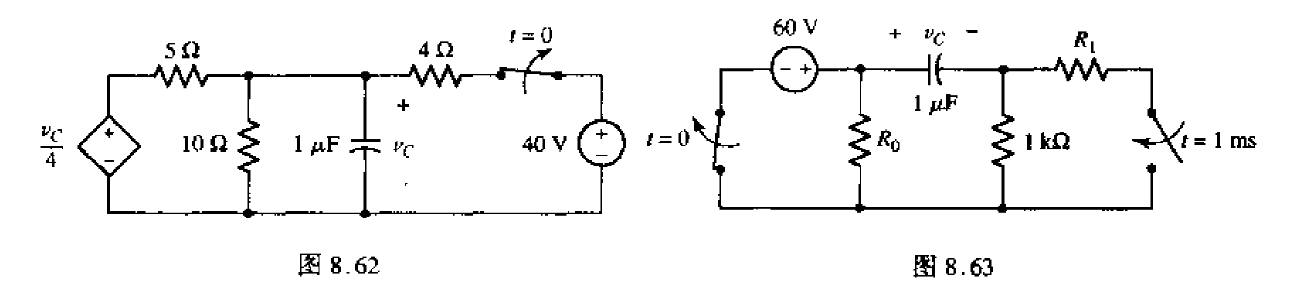


图 8.62 图 8.63

32. 如图 8.63 所示电路，确定 R_0 和 R_1 的值，使得 $t = 0.5$ ms 时 $v_C = 50$ V 和 $t = 2$ ms 时 $v_C = 25$ V。

33. 如图 8.64 所示电路，确定如下两个时间区间 $v_C(t)$ 的表达式：(a) $t < 0$；(b) $t > 0$。

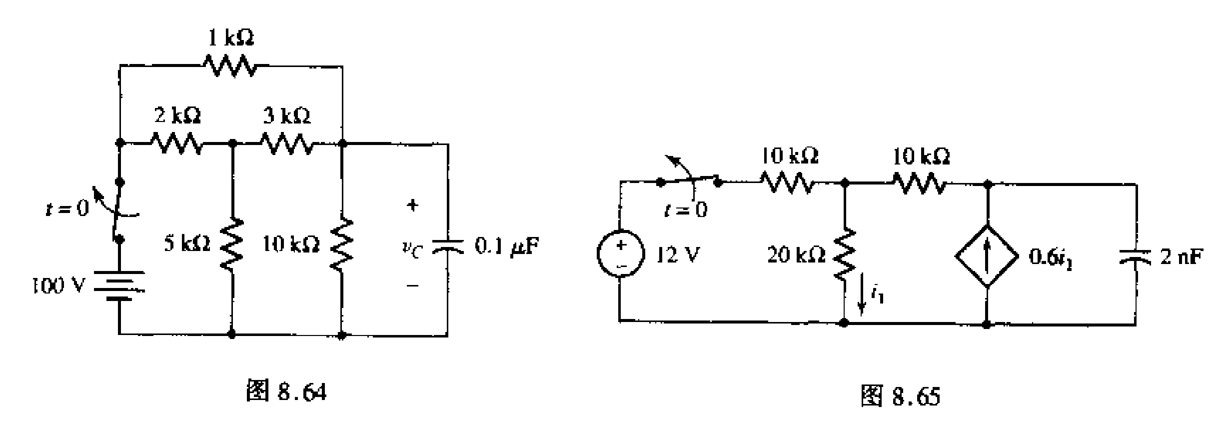


图 8.64 图 8.65

34. 如图 8.65 所示电路，求 $t < 0$ 和 $t > 0$ 时 $i_1(t)$ 的表达式。

35. 图 8.66 中的开关在处于 A 端很长时间后在 $t = 0$ 移到 B 端，这使得两个电容串接在一起，从而在两个电容两端产生大小相等方向相反的直流电压。(a) 求 $v_1(0^-)$，$v_2(0^-)$ 和 $v_R(0^-)$；(b) 求 $v_1(0^+)$，$v_2(0^+)$ 和 $v_R(0^+)$；(c) 求 $v_R(t)$ 的时间常数；(d) 求 $t > 0$ 时的 $v_R(t)$；(e) 求 $i(t)$；(f) 由 $i(t)$ 和初始条件求出 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$；(g) 验证 $t = \infty$ 时电容储存的能量加上 20 kΩ 电阻上消耗的能量等于 $t = 0$ 时储存在电容上的能量。

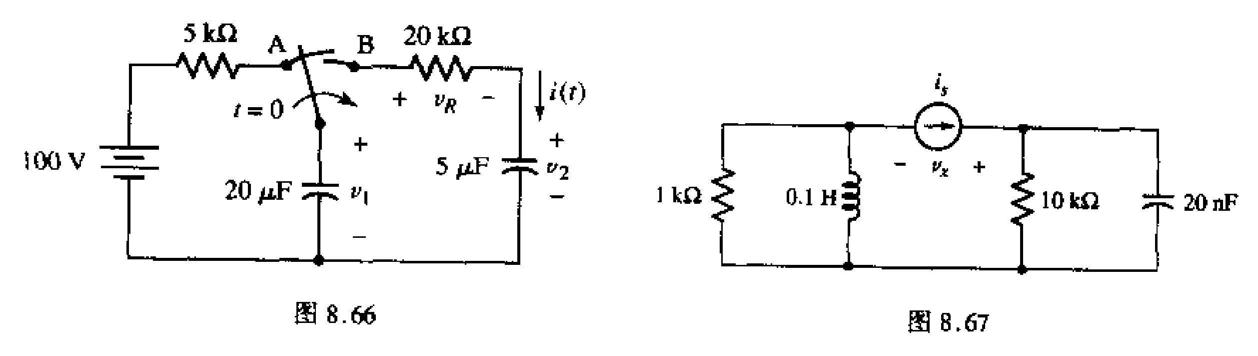


图 8.66 图 8.67

36. 如图 8.67 所示电路，$t < 0$ 时 i_s 的值为 1 mA，$t > 0$ 时为零，求下面时间区间内 $v_x(t)$ 的表达式：(a) $t < 0$；(b) $t > 0$。

37. 如图 8.68 所示电路，$t < 0$ 时 v_s 的值为 20 V，$t > 0$ 为零。求下面时间区间内 $i_x(t)$ 的表达式：(a) $t < 0$；(b) $t > 0$。

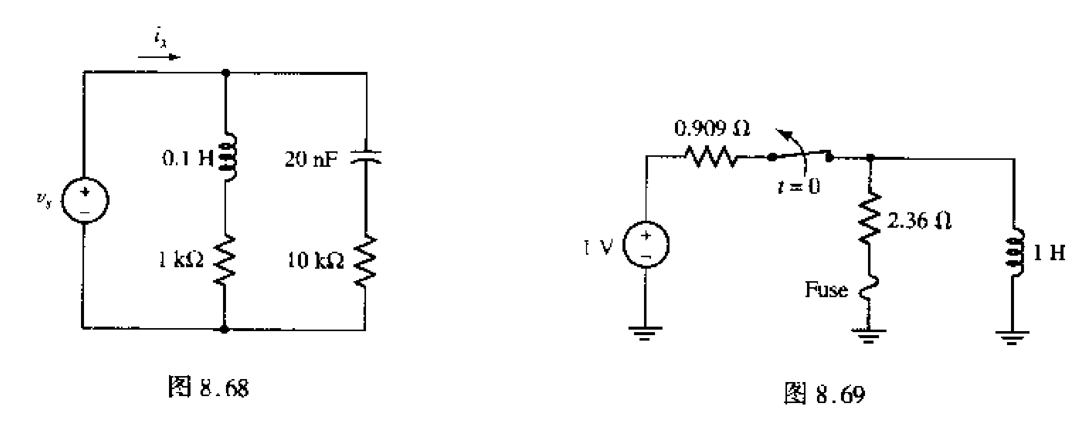


图 8.68　　图 8.69

38. 如图 8.69 所示电路，其中的开关已闭合很长时间　保险丝是一种特殊类型的电阻，当流过的电流超过 1 A 且持续时间超过 100 ms 时它将过热熔化(当然还有其他类型的保险丝)。保险丝的电阻为 3 mΩ。如果开关在 $t = 0$ 时闭合，那么保险丝会不会熔断？用 PSpice 验证你的结论。

39. 如图 8.70 所示电路，电源的值为 $v_A = 300u\ (t-1)$ V，$v_B = -120u\ (t+1)$ V，$i_C = 3u\ (-t)$ A。求 $t = -1.5, -0.5, 0.5$ 和 1.5 s 时 i_1 的值。

40. 如图 8.70 所示电路，电源的值为 $v_A = 60t\,u(t-1)$V，$v_B = 600(t+1)u(t)$V，$i_C = 6(t-1)u(t-1)$ A。(a) 求 $t = -1.5, -0.5, 0.5$ 和 1.5 s 时 i_1 的值；(b)画出 i_1 随 t 变化的曲线，其中 $-2.5 < t < 2.5$ s。

41. 求出 $t = 2$ 时下面各表达式的值：(a)$2u(1-t) - 3u(t-1) - 4u(t+1)$；(b)$[5 - u(t)][2 + u(3-t)][1 - u(1-t)]$；(c)$4e^{-u(3-t)}u^{(3-t)}$。

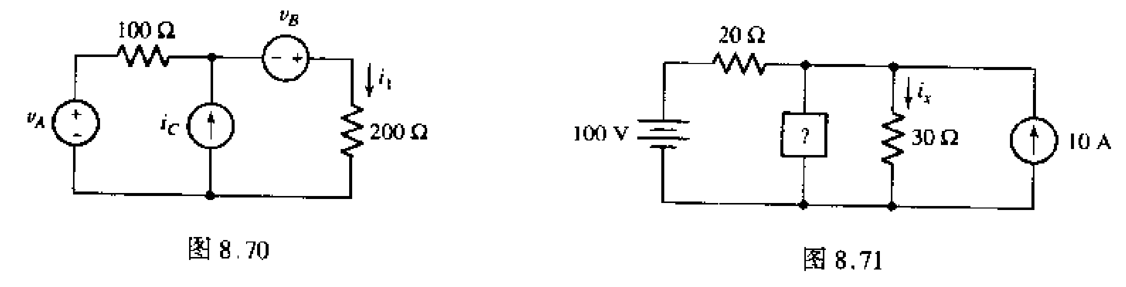


图 8.70　　图 8.71

42. 如图 8.71 所示电路，如果未知的支路包含：(a)一个常开开关和一个 60 V 的电池串联组合，开关在 $t = 0$ 时闭合，电池的正参考方向位于上端；(b)一个电压源，$60u(t)$ V，正参考方向位于上端。求出 $t < 0$ 和 $t > 0$ 时 i_x 的表达式。

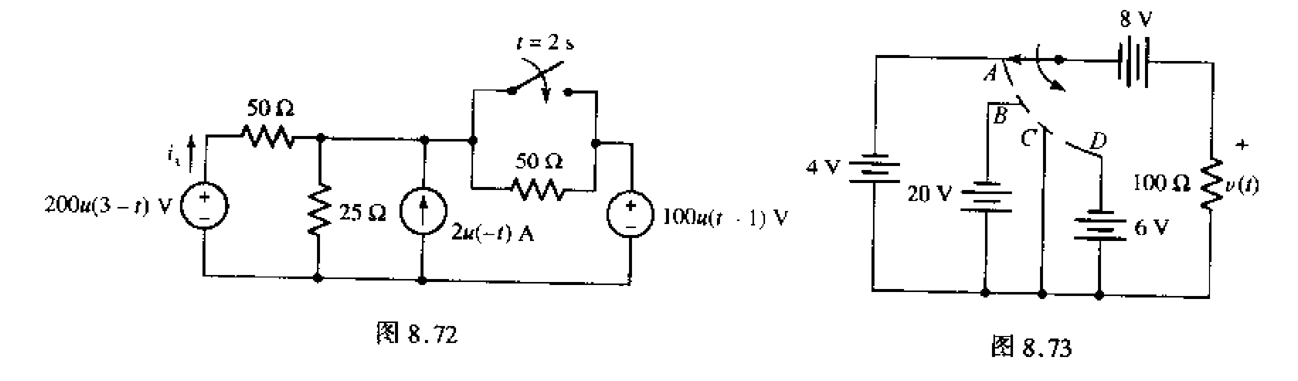


图 8.72　　图 8.73

43. 如图 8.72 所示电路,求从 $t = -0.5$ s 到 $t = 3.5$ s 区间 i_x 的表达式。

44. 如图 8.73 所示电路,开关在 $t < 0$ 时位于位置 A,在 $t = 0$ 切换到 B,然后在 $t = 4$ s 切换到 C,在 $t = 6$ s 切换到 D,然后保持不变。画出 $v(t)$随时间变化的曲线,并把它表示成阶跃激励函数的和的形式。

45. 在某未知元件上所加的电压波为 $7u(t) - 0.2u(t) + 8u(t-2) + 3$ V。(a)求出 $t = 1$ s 时该元件两端的电压;(b)如果流过该元件的电流为 $3.5u(t) - 0.1u(t) + 4u(t-2) + 1.5$ A,则这是一个什么类型的元件,其值为多大?

46. 参看图 8.74 所示电路。(a)求 $i_L(t)$;(b)利用 $i_L(t)$的表达式求 $v_L(t)$。

47. 如图 8.75 所示电路,求下列时刻 i_L 的值:(a) -0.5 s;(b)0.5 s;(c)1.5 s。

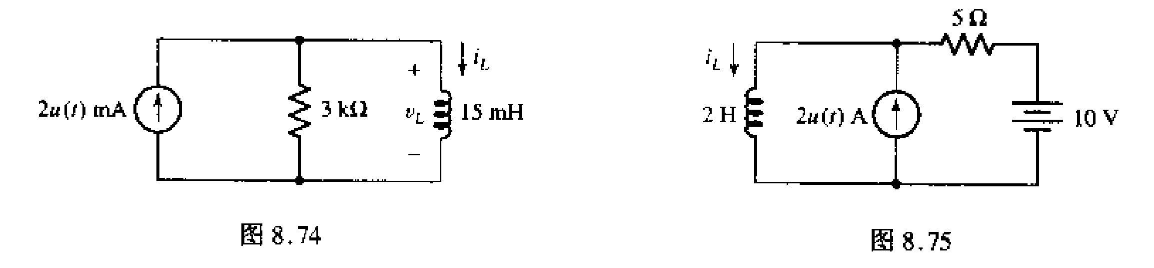


图 8.74　　　　图 8.75

48. 参看图 8.76 所示电路,如果 $i(t)$如图 8.77 所示,画出 $0 \leqslant t \leqslant t_4$ 时 $i_L(t)$的曲线。

(a)		(b)		(c)	
	$t_1 = 4$ ns		$t_1 = 150$ ns		$t_1 = 150$ ns
	$t_2 = 160$ ns		$t_2 = 300$ ns		$t_2 = 200$ ns
	$t_3 = 164$ ns		$t_3 = 450$ ns		$t_3 = 350$ ns
	$t_4 = 200$ ns		$t_4 = 500$ ns		$t_4 = 400$ ns

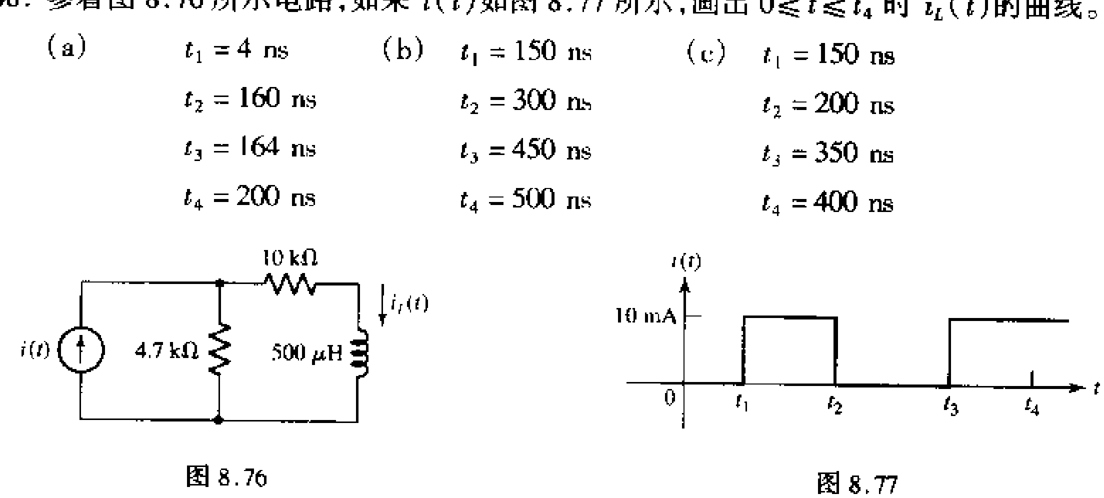


图 8.76　　　　图 8.77

49. 参看图 8.78 所示电路,求以下各量的表达式并画出草图:(a) $i_L(t)$;(b) $v_1(t)$。

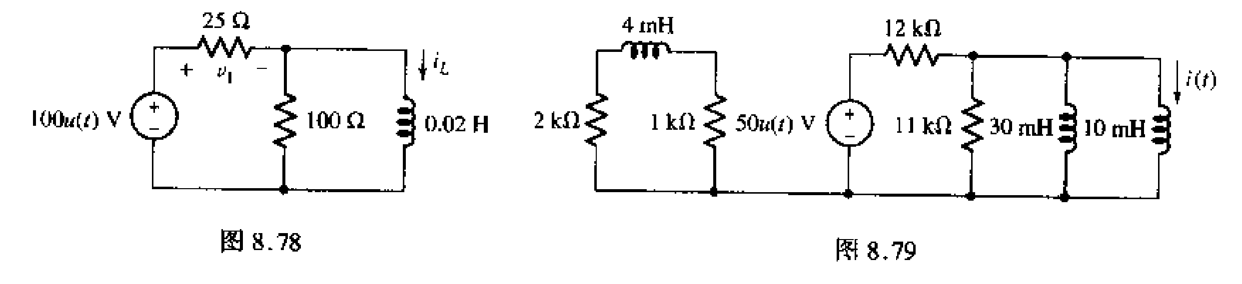


图 8.78　　　　图 8.79

50. 参看图 8.79 所示电路,(a)计算 2 kΩ 电阻在 $t = 1$ ms 时吸收的功率;(b)求出 $i(t)$在 3 μs的值;(c)确定流过 12 kΩ 电阻的峰值电流;(d)用 PSpice 验证你的答案。

51. 如图 8.80 所示电路,开关已闭合很长的时间。(a)求 $t < 0$ 时的 i_L;(b)当开关在 $t = 0$

打开后，求 $i_L(t)$ 的表达式。

52. 如图 8.81 所示电路，开关已打开很长的时间。(a)求 $t<0$ 时的 i_L；(b)当开关在 $t=0$ 闭合后，求 $i_L(t)$ 的表达式。

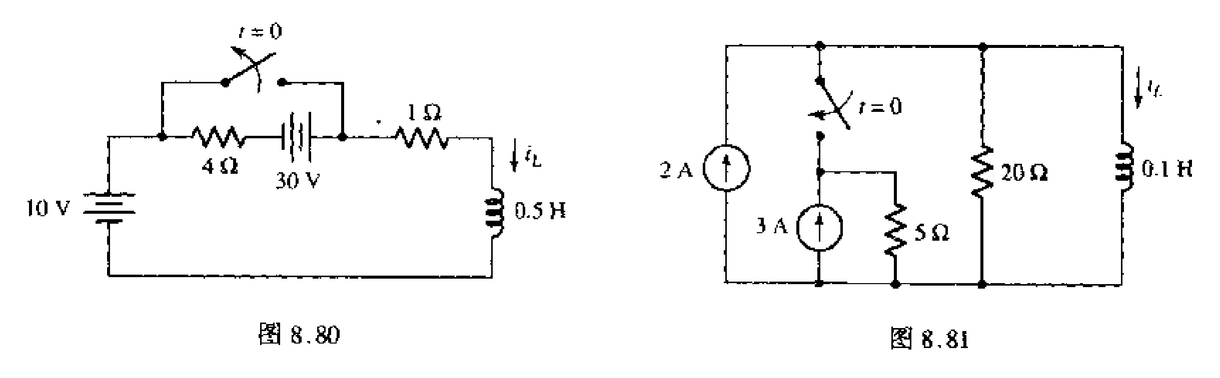


图 8.80　　图 8.81

53. 8.8 节的式(8.13)表示了电源作用于 RL 串联电路时的一般解，一般情况下 Q 为时间的函数，A 和 P 为常量。令 $R=125\ \Omega$，$L=5$ H，如果电压激励函数 $LQ(t)$ 为(a)10 V；(b)$10u(t)$ V；(c)$10+10u(t)$ V；(d)$10u(t)\cos 50t$ V，求 $t>0$ 时 $i(t)$ 的表达式。

54. 如图 8.82 所示电路，求下列时刻 i_L 和 v_1 的值：(a)0^-；(b)0^+；(c)∞；(d)0.2 ms。

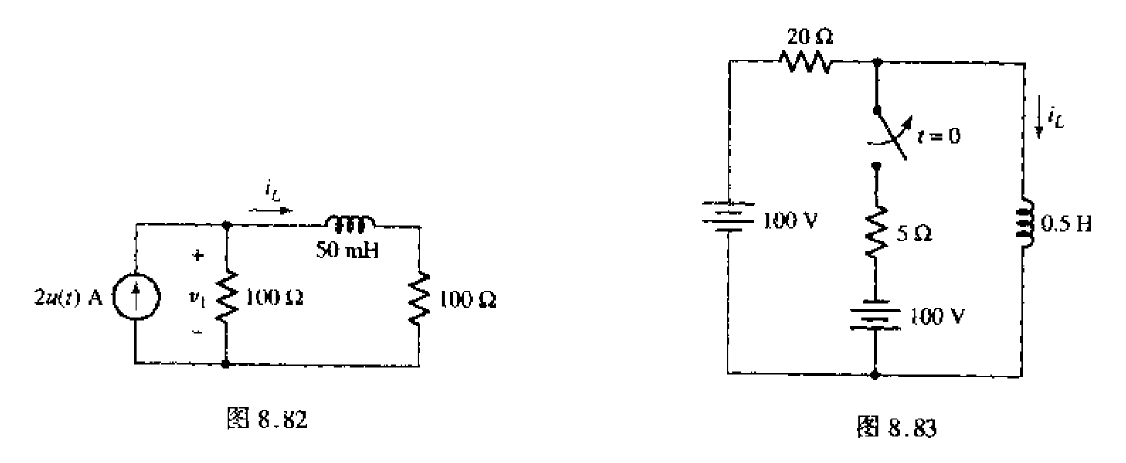


图 8.82　　图 8.83

55. 如图 8.83 所示电路，开关已闭合很长的时间。(a)求 $t<0$ 时 i_L 的表达式；(b)在开关打开后的瞬间，求 $i_L(0^+)$；(c)求 $i_L(\infty)$；(d)导出 $t>0$ 时 $i_L(t)$ 的表达式。

56. 如图 8.84 所示电路，求 i_L 的表达式。

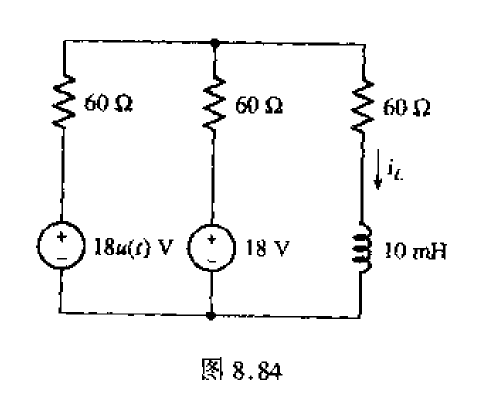


图 8.84

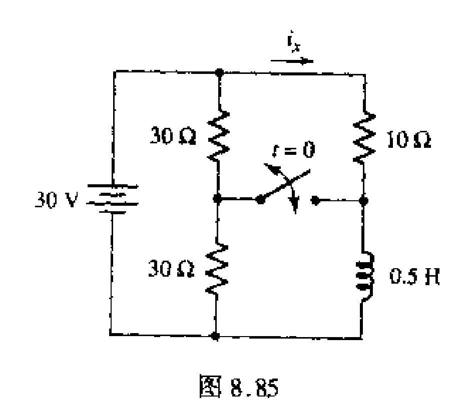


图 8.85

57. 如图 8.85 所示电路,假定开关已闭合很长的时间,然后在 $t=0$ 时打开。求下列时刻 i_x 的值:(a)0^-;(b)0^+;(c)40 ms。

58. 如图 8.85 所示电路,假定开关已打开很长的时间,然后在 $t=0$ 时闭合。求下列时刻 i_x 的值:(a)0^-;(b)0^+;(c)40 ms。

59. 如图 8.86 所示电路,求 $v_x(t)$ 的表达式。

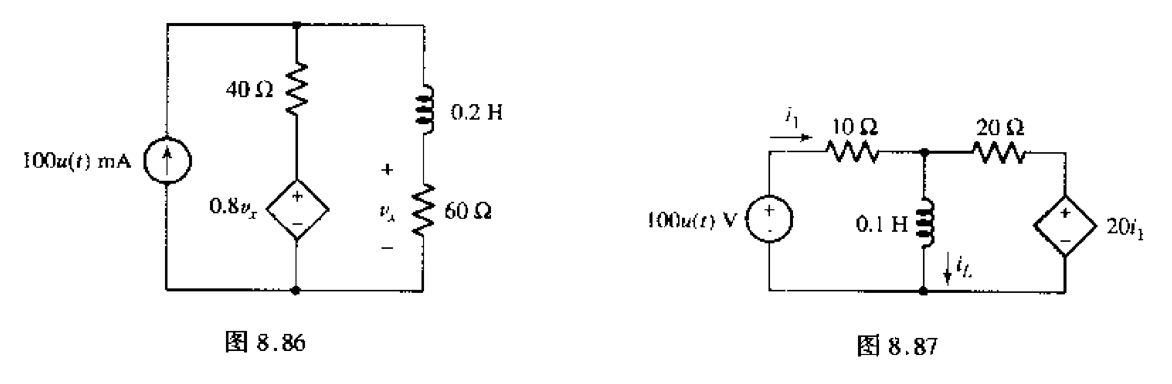


图 8.86　　图 8.87

60. 参看图 8.87 所示电路,求(a)$i_L(t)$;(b)$i_1(t)$。

61. (a)用 PSpice 中的脉冲波形对习题 40 中的电压波形 v_B 进行模拟,并利用 Probe 画出它。提示:将该电源接到一个电阻上;(b)用脉冲波形对习题 40 中的电流波形进行模拟,并利用 Probe 画出它。

62. (a)如图 8.88 所示电路,求出 $t=-2\mu s$ 和 $t=+2\mu s$ 时 v_C 的值;(b)用 PSpice 验证你的答案。

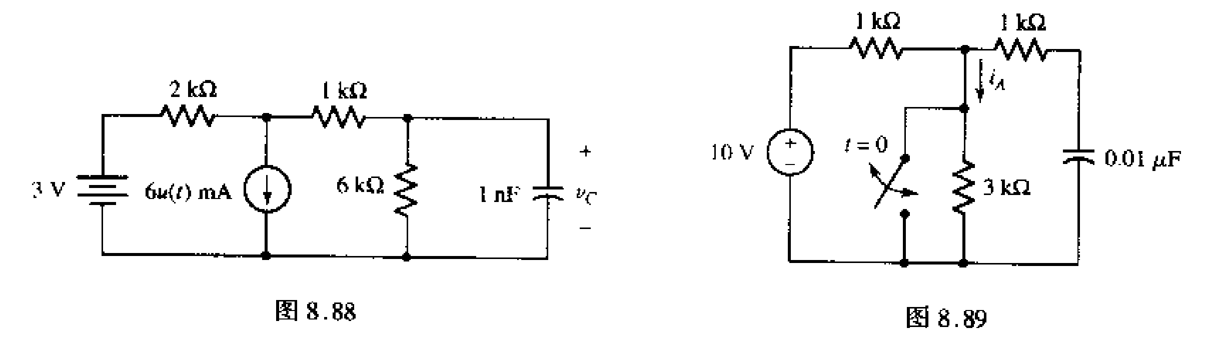


图 8.88　　图 8.89

63. 如图 8.89 所示电路,开关在打开很长时间后在 $t=0$ 闭合,求 i_A 的表达式。

64. 如图 8.89 所示电路,开关在闭合很长时间后在 $t=0$ 打开,求 i_A 的表达式。

65. 如图 8.90 所示电路,令 $v_s=-12u(-t)+24u(t)$ V,求出在时间区间 -5 ms $<t<5$ ms 下面各量的代数表达式并画出相应的曲线:(a)$v_C(t)$;(b)$i_{in}(t)$。

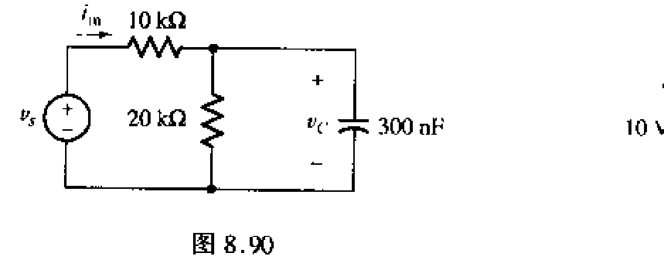


图 8.90

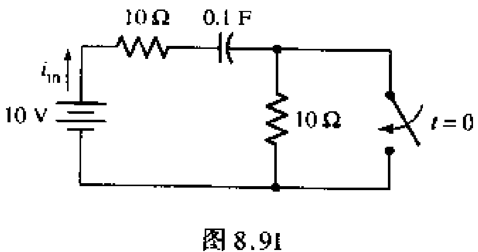


图 8.91

66. 如图 8.91 所示电路，开关已打开很长的时间，它突然在 $t = 0$ 闭合，求下列时刻 i_{in} 的值：(a) -1.5 s；(b) 1.5 s。

67. 如图 8.92 所示电路，求 $t = 0.4$ s 和 0.8 s 时 $v_C(t)$ 的值。

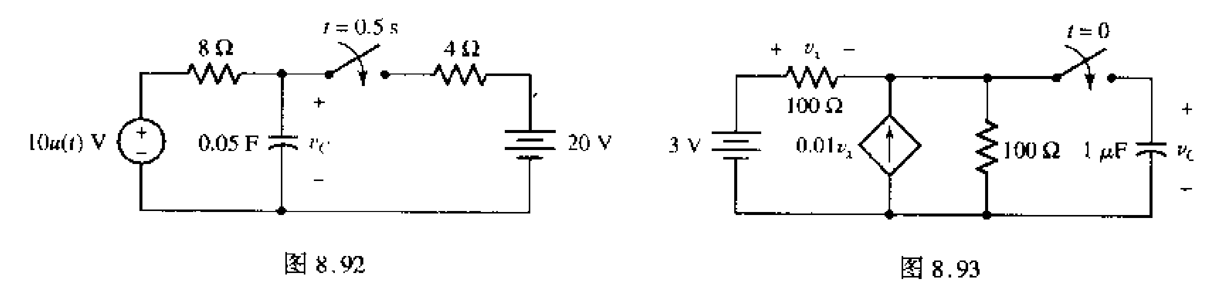


图 8.92　　　　图 8.93

68. 如图 8.93 所示电路，求 $t > 0$ 时 v_C 的表达式。

69. 如图 8.94 所示电路，求下列区间内 $v_R(t)$ 的表达式：(a) $t < 0$；(b) $t > 0$。现在假定开关已闭合很长的时间，并在 $t = 0$ 时打开，求下列区间内 $v_R(t)$ 的表达式：(c) $t < 0$；(d) $t > 0$。

70. 如图 8.95 所示电路，(a) 求 $v_C(t)$ 的表达式；(b) 画出 $-1 < t < 2$ s 时的 $v_C(t)$ 的曲线；并用 PSpice 验证你的解答。

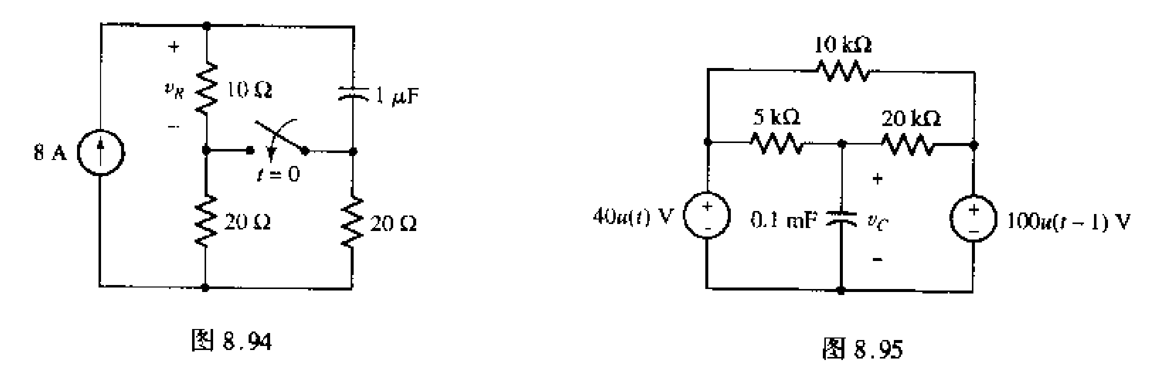


图 8.94　　　　图 8.95

71. 如图 8.96 所示电路，求 $t = 0$ 之后 $v_x = 0$ 第一次等于零的时刻。

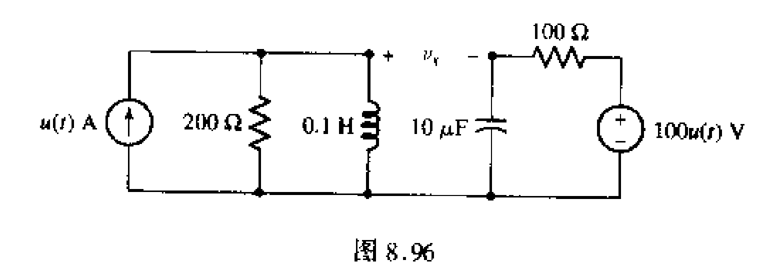


图 8.96

72. 如图 8.97 所示电路，开关位于位置 A 已有很长时间，在 $t = 0$ 将它切换到 B，然后在 $t = 1$ ms 切换回 A。求 R_1 和 R_2，使得 $v_C(1\text{ms}) = 8$ V 和 $v_C(2\text{ms}) = 1$ V。

73. 如图 8.98 所示电路，开关已闭合很长的时间，(a) 求 $t = 5.45$ ms 时的 v；(b) 求 4.7 kΩ 电阻在 $t = 1.7$ ms 所消耗的功率；(c) 求当开关打开后在 4.7 kΩ 电阻上转化为热量的总能量。

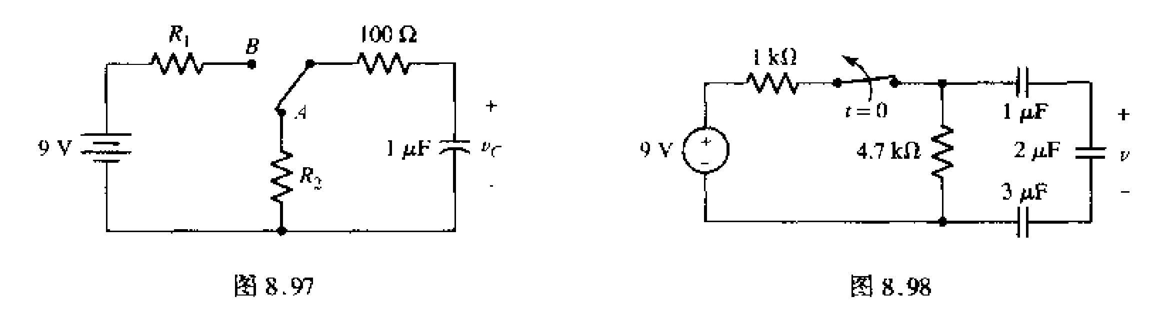


图 8.97　　　　图 8.98

74. 如图 8.99 所示电路，在 $t=0$ 时刻打开其中一个开关，而同时闭合另一个开关，并关闭 1 mA 的电源。画出在时间区间 $-1\ \text{ms}\leqslant t\leqslant 7\ \text{ms}$ 内 1 kΩ 电阻所吸收的功率。

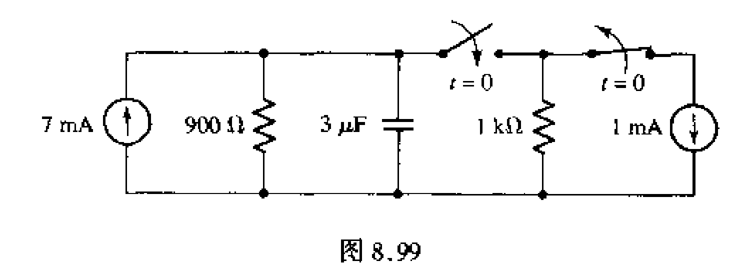


图 8.99

75. 如图 8.100 所示电路，假定运放为理想的，(a)求 $v_o(t)$ 的表达式；(b)用 PSpice 验证你的答案。提示：可以在 Probe 中的 Trace Expression 框中键入表达式来画出该函数的曲线。

76. 假定图 8.101 中的运放为理想的，求 $v_x(t)$ 的表达式。

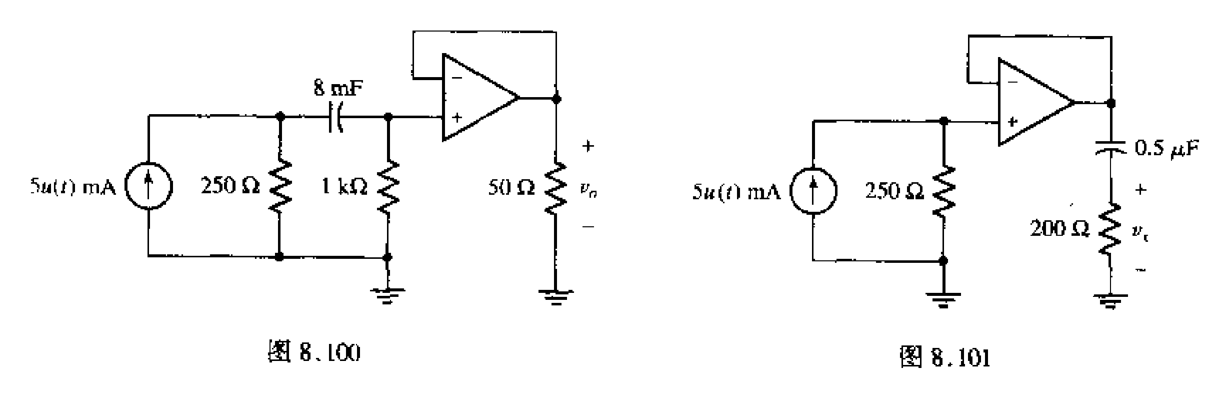


图 8.100　　　　图 8.101

77. (a)假定图 8.102 中的运放为理想的，并且 $v_C(0)=0$，求 $v_o(t)$ 的表达式；(b)用 PSpice 验证你的答案。提示：可以在 Probe 中的 Trace Expression 框中键入表达式来画出该函数的曲线。

78. (a)求出图 8.103 所示 *RL* 电路的 $i_L(0)$；(b)利用(a)中求出的初始值，用 PSpice 求出 $t=50$ ms时的 i_L。

79. 作为某安全系统的一部分而安装的运动检测装置显得对电力系统的电压波动过于敏感，解决的方法是在传感器和报警电路之间插入延时电路，这样就减少了虚警。假定该运动传感器的戴维南等效电路为 2.37 kΩ 的电阻与 1.5 V 电源的串联组合，并且假定报警电路的戴维南等效电阻为 1 MΩ。设计一个电路，将其插入到传感器和报警电路(报警电路要求传感器信号至少持续 1 秒)之间。运动传感器－报警电路按如下方

式工作：传感器持续给报警电路提供一个小电流，直到检测到运动，此时电流中断。

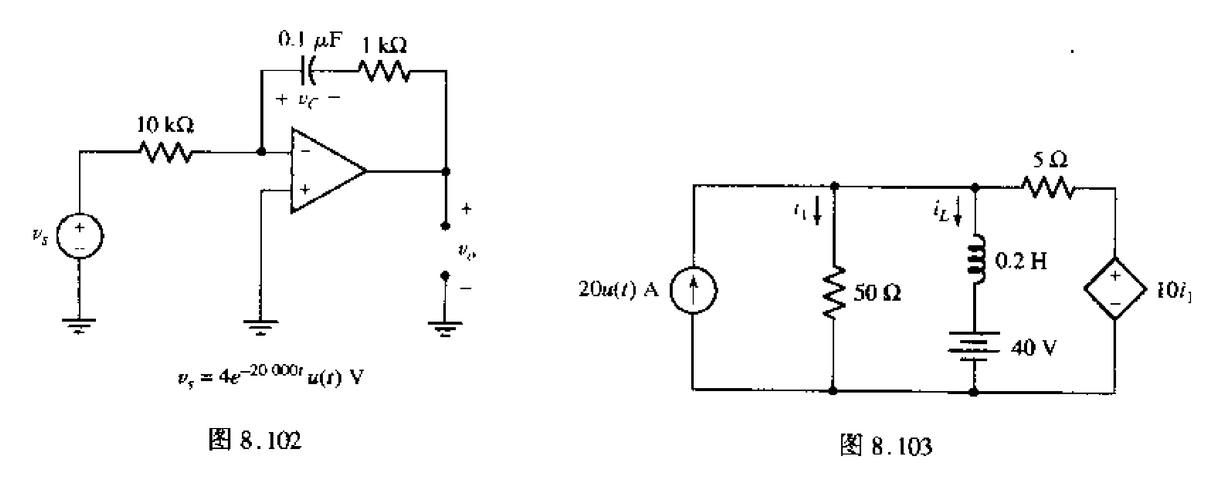


图 8.102　　　　图 8.103

80. 为房间的电灯设计一个电路，使得当开关断开后电灯还能够继续亮 5 秒钟，假定灯泡的功率为 40 W，采用 115 V 交流供电。

第9章　*RLC* 电路

本章要点：

- 确定描述串联和并联 *RLC* 电路特性的阻尼系数和谐振频率
- 理解串联和并联 *RLC* 电路的过阻尼、临界阻尼和欠阻尼响应
- 计算 *RLC* 电路的完全响应(等于自由响应加上受迫响应)
- 学习如何用运放电路来表示微分方程

9.1　引言

上一章的讨论限于仅带有电容或者仅带有电感(但不同时带有电容和电感)的电阻电路。在电路中同时存在电容和电感将至少构成二阶系统，需要用二阶线性微分方程或者两个联立的一阶线性微分方程来描述。阶数的增加使得需要求出两个(或更多个)待定常量，并且需要确定各个变量的初始条件。这种电路称为 *RLC* 电路，它们不仅在实际中很常见，而且可以作为其他系统的很好近似模型。例如，可以用 *RLC* 电路来建模汽车的悬挂减震系统，以及用来描述控制半导体晶体生长速度的控制器的工作特性，甚至可以用来描述飞机中对升降舵和副翼进行控制的响应。

9.2　无源并联 *RLC* 电路

首先来求系统的自由响应，和前面一样，这容易通过考察无源电路来得到。然后在电路中加入直流电源、开关或者阶跃电源，类似地，也与前面一样，可以将总的响应表示为自由响应与受迫响应之和的形式。

作为讨论的开始，下面来看由理想 R，L 和 C 并联组成的简单电路的自由响应。可以用这种理想元件的组合来作为很多实际通信网络中某些部分的模型，例如可以用它表示收音机中的电子放大器中的调谐部分，它使得放大器在一个窄频带内具有很高的电压放大倍数，而在这个窄带以外放大倍数几乎为零。这种频率选择性使得收音机只接收一个电台发送的信号而不接收其他电台的信号。*RLC* 电路还有许多其他应用，例如可以将并联 *RLC* 电路用于多路复用和谐波抑制滤波器中等。不过，即使只是很简略地介绍这些原理也需要掌握下面的术语：谐振、频率响应和阻抗，而在前面这些术语都还没有讨论过。因此，可以说，对并联 *RLC* 电路工作特性的理解对于后续的通信网络、滤波器设计以及其他很多应用的学习均具有非常重要的意义。

实际的电容与电感并联时，因为电容具有一定的电阻，所以这个并联网络的等效电路如图9.1所示，图中的电阻用来表示电容中的能量损耗。随着时间的推移，所有实际的电容，即使没有接到电路中，最终都将完全放电。对于实际电感，也可以通过增加一个与理想电感串联的理想电阻来表示其损耗，不过，这里仅限于讨论理想电感与非理想电容并联的情形。

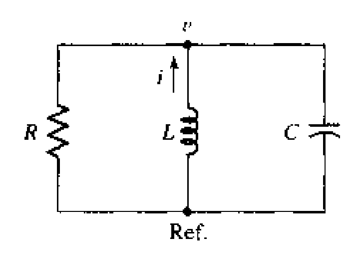


图 9.1 无源并联 *RLC* 电路

9.2.1 导出并联 *RLC* 电路的微分方程

在下面的讨论中，假定初始能量可能同时储存在电感和电容中，换句话说，电感电流和电容电压的初始值可能同时为非零值。参看图 9.1 所示电路，可以写出节点方程为：

$$\frac{v}{R}+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v dt' - i(t_0) + C\frac{dv}{dt} = 0 \tag{9.1}$$

注意到，方程中的减号和前面假定的 i 的方向有关。需要求出方程(9.1)在以下两个初始条件下的解：

$$i(0^+) = I_0 \tag{9.2}$$

和

$$v(0^+) = V_0 \tag{9.3}$$

方程(9.1)两边对时间求导，得到一个二阶齐次线性微分方程：

$$C\frac{d^2 v}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{L}v = 0 \tag{9.4}$$

它的解 $v(t)$即为所求的自由响应。

9.2.2 微分方程的求解

求解方程(9.4)有许多种不同的方法，不过我们将大多数的方法都留给微分方程的专门课程，这里只采用最快和最简单的方法来求解。例如，首先假定方程的一个解，然后根据直觉与经验选取出解的一个可能的形式。根据以前处理一阶方程的经验，可以尝试使用指数形式，因此，可以假定：

$$v = Ae^{st} \tag{9.5}$$

为使讨论尽可能一般化，允许 A 和 s 为复数。将公式(9.5)代入方程(9.4)，可以得到：

$$CAs^2e^{st}+\frac{1}{R}Ase^{st}+\frac{1}{L}Ae^{st} = 0$$

或

$$Ae^{st}\left(Cs^2+\frac{1}{R}s+\frac{1}{L}\right) = 0$$

要使该方程在任何时刻下均成立，这三项中必须至少有一项为零。如果令前面两项中的任一个为零，则必然恒有 $v(t)=0$，不满足所给的初始条件。因此，令第三个因式为零：

$$Cs^2+\frac{1}{R}s+\frac{1}{L} = 0 \tag{9.6}$$

在数学上称它为辅助方程或特征方程。如果方程的解满足它，那么所假定的解就是正确的。

方程(9.6)是二阶方程,它有两个根,分别设为 s_1 和 s_2:

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \tag{9.7}$$

和

$$s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \tag{9.8}$$

如果假定解中的 s 为上面两个中的一个,那么该解就是所给微分方程的解,于是就得到了微分方程的一个有效解。

在方程(9.5)中,以 s_1 替换 s,得到:

$$v_1 = A_1 e^{s_1 t}$$

类似地,有:

$$v_2 = A_2 e^{s_2 t}$$

前者满足以下的微分方程:

$$C\frac{d^2 v_1}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{L}v_1 = 0$$

后者满足:

$$C\frac{d^2 v_2}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{L}v_2 = 0$$

把两个方程加起来,合并同类项,得到:

$$C\frac{d^2(v_1 + v_2)}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{d(v_1 + v_2)}{dt} + \frac{1}{L}(v_1 + v_2) = 0$$

这表明,两个解的和也是方程的解,即解满足线性原理。于是,得到自由响应的一般形式为:

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \tag{9.9}$$

其中 s_1 和 s_2 由式(9.7)和式(9.8)给出,A_1 和 A_2 是两个任意常量,可以通过选取合适的值以满足给定的初始条件。

9.2.3 频域量的定义

如果需要画出 $v(t)$随时间变化的曲线,那么从式(9.9)给出的自由响应的形式出发并不能得到很多关于该曲线的特性。例如,很显然,A_1 和 A_2 的相对幅度对于确定响应曲线的形状很重要。另外,常量 s_1 和 s_2 可以为实数或者为共轭的复数,这取决于网络的 R,L 和 C 的值,这两种情况将产生完全不同的响应形式。因此,对式(9.9)中的 s_1 和 s_2 做必要的简化是有帮助的。

因为指数 $s_1 t$ 和 $s_2 t$ 为无量纲量,所以 s_1 和 s_2 的单位必然为"某个无量纲量每秒"。从式(9.7)和式(9.8)可以看出,$1/2RC$ 和 $1\sqrt{LC}$的单位均必然为 s^{-1}(即 1/s),这种类型的量称为频率。

定义一个新的量 ω_0:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{9.10}$$

后面又将其称为谐振频率。此外,称 $1/2RC$ 为奈培频率,或者指数阻尼系数,用符号 α 表示:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \tag{9.11}$$

称 α 为指数阻尼系数是因为它表示了自由响应衰减到其稳态值(通常为零)的快速程度。s(即 s_1 和 s_2)称为复频率,它是进行下一步讨论的基础。

需要指出,s_1,s_2 和 ω_0 仅仅是用于简化 RLC 电路描述引入的符号,它们并没有任何新的特性。举个例子说,说"α"要比说"$2RC$ 的倒数"简单容易。

将前面得到的结果集中到一起,得到并联 RLC 电路的自由响应为:

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \tag{9.9}$$

其中:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \tag{9.12}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \tag{9.13}$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \tag{9.11}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{9.10}$$

在控制系统中,通常称 α 对 ω_0 的比值为衰减率,并用符号 ζ 表示。

A_1 和 A_2 必须通过给定的初始条件求出。

前面的方程组所描述的响应不仅适用于电压 $v(t)$,也适用于流过三个元件中的任一个电流。当然,描述电流的常量 A_1 和 A_2 与描述 $v(t)$ 的常量不同。

现在已经看到,自由响应决定于 α 和 ω_0 相对大小。对于 s_1 和 s_2 公式中根号内的表达式,当 α 大于 ω_0 时为实数,当 α 小于 ω_0 时为纯虚数,当 α 等于 ω_0 时为零。在下面的三节中,将分别对这三种情形进行讨论。

练习

9.1 某并联 RLC 电路中电阻为 100 Ω,参数为 $\alpha = 1\,000\ \mathrm{s^{-1}}$ 和 $\omega_0 = 800$ rad/s,求:(a) C;(b) L;(c) s_1;(d) s_2。

答案:5 μF; 312.5 mH; $-400\ \mathrm{s^{-1}}$; $-1\,600\ \mathrm{s^{-1}}$

9.3 过阻尼并联 RLC 电路

比较式(9.10)和式(9.11)可知,如果 $LC > 4R^2C^2$,则 $\alpha > \omega_0$。在这种情形下,s_1 和 s_2 中的根号均为实数,于是 s_1 和 s_2 均为实数。并且,以下两个不等式成立:

$$\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < \alpha$$

$$\left(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\right) < \left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\right) < 0$$

将它们应用于式(9.12)和式(9.13),可以得到 s_1 和 s_2 均为负实数,因此响应 $v(t)$ 可以表示为两个衰减指数项的代数和,每一项随着时间的增长均趋于零。而且,因为 s_2 的绝对值大于 s_1,

所以含有 s_2 的项将衰减得更快，于是对于大的时间 t，可以写出极限情况下的表达式如下：

$$v(t) \to A_1 e^{s_1 t} \to 0, \quad 当\ t \to \infty$$

下一步需要利用初始条件确定待定常量 A_1 和 A_2。选取一个并联 *RLC* 电路，其参数值为 $R = 6\ \Omega$，$L = 7\ \text{H}$，为方便计算，取 $C = \frac{1}{42}\ \text{F}$。设电容两端的初始电压为 $v(0) = 0$，电感初始电流为 $i(0) = 10\ \text{A}$。其中 v 和 i 如图 9.2 所示。

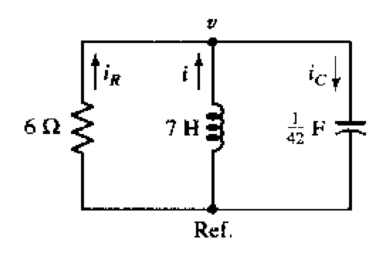


图 9.2 并联 *RLC* 电路的一个具体数值例子，电路为过阻尼

容易求出下面的各参数的值：

$$\alpha = 3.5, \quad \omega_0 = \sqrt{6}$$
$$s_1 = -1, \quad s_2 = -6, \qquad (单位均为\ \text{s}^{-1})$$

然后可以直接写出自由响应的一般形式：

$$v(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-6t} \tag{9.14}$$

9.3.1 确定 A_1 和 A_2 的值

现在只需要确定两个常量 A_1 和 A_2 即可。如果知道响应 $v(t)$ 在两个不同时刻的值，那么将这两个值代入式(9.14)，就可以求出 A_1 和 A_2。但是，现在只知道 $v(t)$ 在一个时刻的值：

$$v(0) = 0$$

因此有：

$$0 = A_1 + A_2 \tag{9.15}$$

通过对式(9.14)中的 $v(t)$ 对时间求导，可以得到将 A_1 和 A_2 联系起来的第二个方程，而利用另一个初始条件 $i(0) = 10\ \text{A}$ 可确定导数 dv/dt 的初始值。最后，令这两个结果相等，就得到了所需的方程。式(9.14)两边对 t 求导，有：

$$\frac{dv}{dt} = -A_1 e^{-t} - 6A_2 e^{-6t}$$

并计算出导数在 $t = 0$ 时的值：

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = -A_1 - 6A_2$$

于是得到了 A_1 和 A_2 的第二个方程，但是现在还不知道导数的初始值，所以并没有真正得到关于两个未知量的两个微分方程。表达式 dv/dt 提示我们考虑电容电流，因为：

$$i_C = C\frac{dv}{dt}$$

又基尔霍夫电流定律在任何时刻均成立，因为它是基于电荷守恒的。于是，对于时刻 0，有：

$$-i_C(0)+i(0)+i_R(0)=0$$

代入前面得到的电容电流的表达式，并除以 C，有：

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0}=\frac{i_C(0)}{C}=\frac{i(0)+i_R(0)}{C}=\frac{i(0)}{C}=420\ \text{V/s}$$

上式中用到了 $i_R(0)=0$，这是因为电阻两端的初始电压为零，所以其初始电流也为零。于是得到了第二个方程：

$$420=-A_1-6A_2 \tag{9.16}$$

联立方程(9.15)和方程(9.16)，可以求出两个幅度分别为 $A_1=84$ 和 $A_2=-84$，因此电路的自由响应的最终数值解为：

$$v(t)=84(e^{-t}-e^{-6t})\ \text{V} \tag{9.17}$$

在对 RLC 电路的讨论中，需要注意的是，完全确定响应总是需要两个初始条件。往往很容易得到其中的一个，因为根据电压或者电流在 $t=0$ 处的值即可得到。在寻找第二个方程时通常要麻烦一些，因为尽管在讨论中同时已知初始电流和初始电压，但其中的一个需要通过对所假定的解求导来间接地使用。

例题 9.1　如图 9.3(a)所示电路，求 $t=0$ 之后 $v_C(t)$ 的表达式

- 弄清问题的目标：

开关在 $t=0$ 时刻闭合，移去了电路中惟一的独立电源。由此可以预见电容电压在 $t>0$ 后将开始下降，这里需要找出一个合适的表达式来描述这个衰减过程。

- 收集已知信息：

重新画出 $t>0$ 时的电容如图 9.3(b)所示，已知 $L=5$ mH，$R=200\ \Omega$ 和 $C=20$ nF。

- 选择最适合问题的已有方法：

注意到，对于 $t>0$，要求解的是简单并联 RLC 电路，所以前面讨论过的分析过程均适用。

- 建立适当的方程组：

首先来计算各参数 α, ω_0, s_1 和 s_2 的值。考虑图 9.3(b)所示的电路，图中已标出了各元件值。因此，$\alpha=1/2RC=125\ 000\ \text{s}^{-1}$，$\omega_0=1/\sqrt{LC}=100\ 000$ rad/s 和 $s_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$，得到 $s_1=-50\ 000\ \text{s}^{-1}$和 $s_2=-200\ 000\ \text{s}^{-1}$。因此解的形式为：

$$v_C(t)=A_1e^{-50\,000t}+A_2e^{-200\,000t}$$

- 确定是否还需其他信息：

还需要知道两个初始条件：$v_C(0^+)$和 $dv_C/dt|_{t=0^+}$。求解初始值总是从分析不连续性出现之前各储能元件的状态开始。在切换时间间隔 $0^-<t<0^+$ 内，电感电流和电容电压必须保持不变。为清晰起见，画出了 $t=0^-$ 和 $t=0^+$ 时刻的电路，分别如图 9.3(c)和图 9.3(d)所示。第一个图用来求 $i_L(0^-)$和 $v_C(0^-)$的值，而第二个图表示这两个初始值代表两个独立电源。

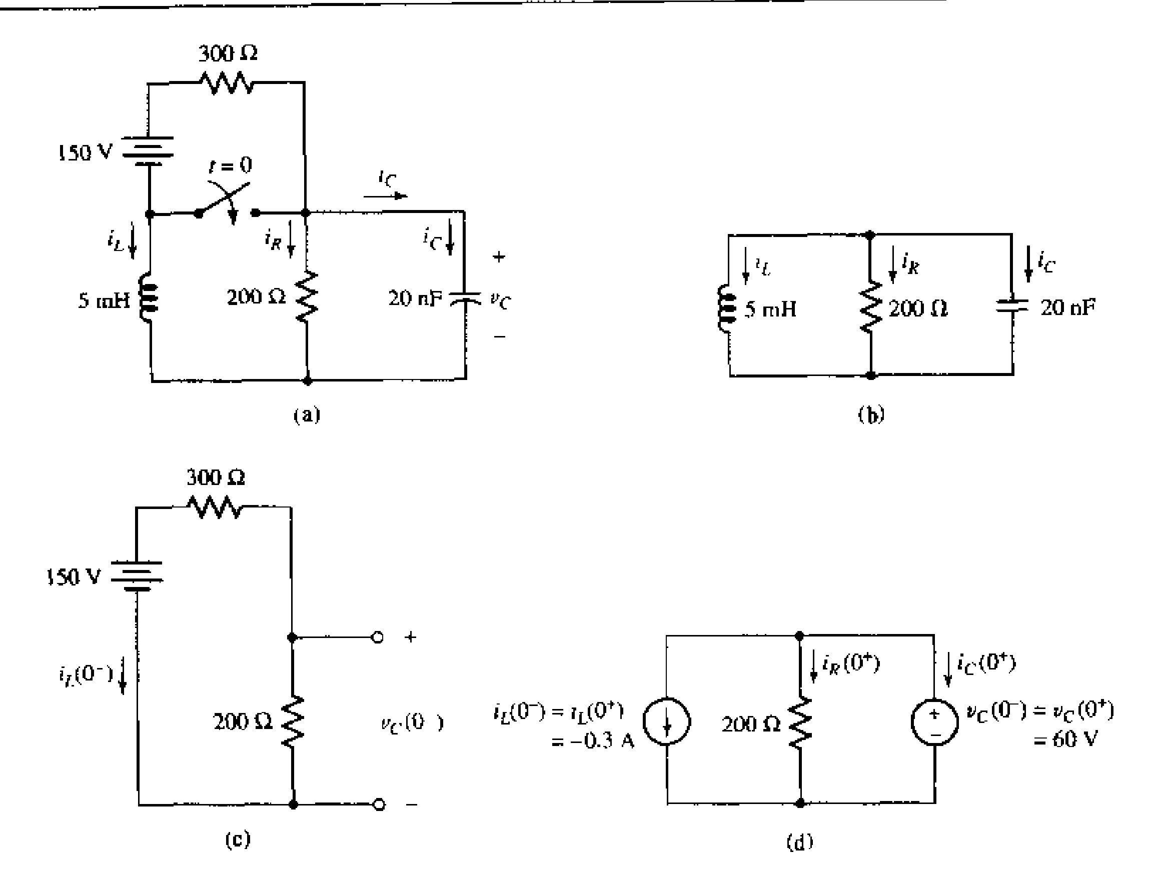


图 9.3 (a)例题 9.1 中要分析的电路;(b)$t>0$ 时的电路,这时 150 V 电源和300 Ω电阻已经被短路;(c)$t=0^-$ 时的电路,利用它可以求出$i_L(0^-)=-0.3$ A和$v_C(0^-)=60$ V;(d)$t=0^+$ 时的等效电路

根据图 9.3(c),可以看到 $i_L(0^-)=-150/(200+300)=-0.3$ A,而 $v_C(0^-)=200\times(0.3)=60$ V。然后将这两个值在 $t=0^+$ 时刻的电路图 9.3(d)中标出,这是因为它们不能在零时刻间隔内改变。需要指出,从 $t=0^-$ 到 $t=0^+$ 时开关闭合相当于移去了 300 Ω 电阻,就不需要再去考虑这个电阻了。图中还标出了其他电流值,例如 $i_R(0^+)$和 $i_C(0^+)$,对于这些值,变化多快并没有限制。

因为已经知道 $v_C(0^+)=v_C(0^-)=60$ V,这时只需要求出 $dv_C/dt|_{t=0^+}$ 即可。很容易将该值与电容电流联系起来,从而:

$$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0^+}=\frac{1}{C}i_C(0^+)=\frac{1}{C}[-i_L(0^+)-i_R(0^+)]$$

或

$$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0^+}=\frac{10^9}{20}\times\left(0.3-\frac{60}{200}\right)=0$$

● 试解:

将 i_C 和 dv_C/dt 的初始值代入 $v_C(t)$的表达式中,有:

$$v_C(0^+)=60=A_1+A_2$$

和

$$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0^+}=0=-50\,000A_1-200\,000A_2$$

因此，$A_1 = -4A_2$，所以得到 $A_1 = 80$ 和 $A_2 = -20$。这个问题的解为：

$$v_C(t) = 80e^{-50\,000t} - 20e^{-200\,000t}\ \text{V}, \quad t > 0$$

● 证实所得解是否合理和满足要求：

当然，可以利用 PSpice 的暂态分析来验证所得到的解，不过也可以通过计算出电容电压在 $t=0$ 时的值来验证。根据前面的分析可知 $v_C(0)=60$ V，而根据上面得到的解，可以计算出这个值为 80－20＝60 V，两者相同。这时我们就有信心认为，至少得到的数学结果是正确的。

练习

9.2　图 9.4 中的开关已打开很长的时间后在 $t=0$ 闭合，求(a) $i_L(0^-)$；(b) $v_C(0^-)$；(c) $i_R(0^+)$；(d) $i_C(0^+)$；(e) $v_C(0.2)$。

答案： 1 A；48 V；2 A；－3 A；－17.54 V

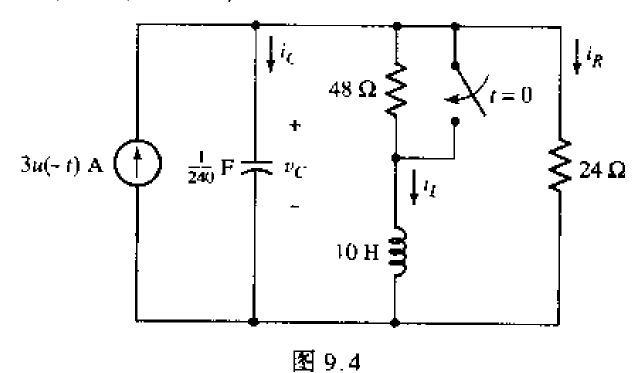


图 9.4

9.3.2　过阻尼响应的响应曲线

现在回到式(9.17)，看看还可以从中得到什么信息。从式(9.17)可以看到，第一个指数项相当于具有时间常数 1 s，另一个指数项相当于具有时间常数 1/6 s。两者的幅度相同，但后者衰减得更快些。还可以看到，$v(t)$始终为非负，但随着时间的增加，它的每一项均趋于零，自由响应最终将会消失，正如它所应该的那样。由此得到，响应曲线在 $t=0$ 和 $t=\infty$ 处均为零，并且始终为非负。因为它不恒为零，所以必然至少有一个最大值，可以通过对响应求导数来求出这个最大值：

$$\frac{dv}{dt} = 84 \times (-e^{-t} + 6e^{-6t})$$

令上面的导数为零可以求出 t_m，在该时刻电压响应取最大值：

$$0 = -e^{-t_m} + 6e^{-6t_m}$$

于是：

$$e^{5t_m} = 6$$

得到：

$$t_m = 0.358\ \text{s}$$

和

$$v(t_m) = 48.9\ \text{V}$$

画响应曲线的一种好方法是，首先画出两个指数项 $84e^{-t}$ 和 $84e^{-6t}$，然后通过求它们的差来得

到,如图 9.5 所示。两个指数项用较浅的实线画出,它们的差,即总响应 $v(t)$ 用较深的黑线画出。该曲线验证了前面得到的结论,即对非常大的 t,函数 $v(t)$ 的特性主要表现为 $84e^{-t}$,即包含 s_1 和 s_2 中幅度较小的的指数项。

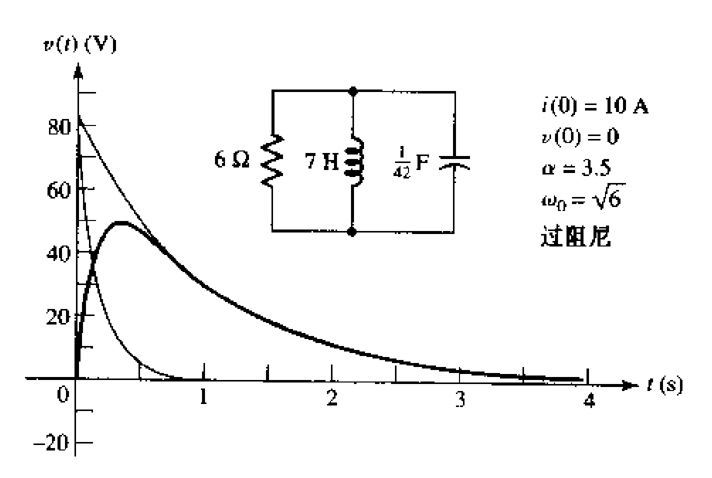


图 9.5 图 9.2 所示网络的响应 $v(t)=84(e^{-t}-e^{-6t})$

经常需要考虑的一个问题是,响应中的暂态部分究竟需要实际多长时间才消失(或衰减掉)。事实上,大多数情况下希望暂态响应越快趋于零越好,即下降时间(达到稳态)t_s 越小越好。当然,从理论上来说 t_s 为无限长,因为 $v(t)$ 永远不会在有限的时间里下降到零。不过,当 $v(t)$ 的幅度下降到小于其绝对值最大值 $|v_m|$ 的 1% 就可以近似忽略这时的响应,而达到这个状态所需的时间就定义为下降时间。在本例中,因为 $|v_m|=v_m=48.9$ V,所以下降时间定义为响应幅度下降到 0.489 V 的所需要的时间。将 $v(t)=0.489$ V 代入式(9.17)中,并忽略第二个指数项(因为在这里已可以忽略该项),求出下降时间为 5.15 s。

与下面两节中将要得到的响应相比,这时的下降时间比较大,即衰减时间非常长,这时的响应称为过阻尼响应,事实上,将 $\alpha>\omega_0$ 的情况称为过阻尼情形。下面来看当 α 减小时将会产生什么情况。

9.4 临界阻尼

处于过阻尼情形的标志为:

$$\alpha>\omega_0$$

或者

$$LC>4R^2C^2$$

这使得 s_1 和 s_2 均为负实数,这时响应为两个负指数的代数和。

现在调整参数的值使 α 等于 ω_0,这是一种很特殊的情形,称为临界阻尼。如果希望在现实中构造出临界阻尼的 RLC 的电路,那么这将是一个不可能完成的任务,因为在实际中永远不可能使 α 精确地等于 ω_0,所以这样做的结果将是得到过阻尼电路或者是下一节中将要讨论的欠阻尼电路。不过为了完整起见,这里仍然将讨论临界阻尼电路,因为它显示了从过阻尼到欠阻尼的过渡过程。

说“不可能”是相当强的语气，这里这么说是因为实际中，很难使元件的实际值在1%范围以内接近其标称值，因此得到精确等于 $4R^2C$ 的 L 只有理论上的可能性。即使为了找到正确的参数而愿意测量大量的元件，也不太可能实现。

当如下条件成立时，称电路达到临界阻尼：

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \omega_0\\ LC &= 4R^2C^2\\ L &= 4R^2C\end{aligned}\right\}\text{临界阻尼}$$

在9.2节中讨论过的数值例子中，可以通过改变三个元件中的任何一个的数值来达到临界阻尼，这里采用增大 R 的值直至电路达到临界阻尼的方法。这时 ω_0 的值不改变，得到所需 R 的大小为 $7\sqrt{6}/2\ \Omega$，L 保持为 7 H，C 保持为$\frac{1}{42}$ F，于是得到：

$$\alpha = \omega_0 = \sqrt{6}\ \text{s}^{-1}$$

$$s_1 = s_2 = -\sqrt{6}\ \text{s}^{-1}$$

9.4.1 临界阻尼的响应形式

同样，假定响应可以表示为两个指数的和：

$$v(t) \stackrel{?}{=} A_1 e^{-\sqrt{6}t} + A_2 e^{-\sqrt{6}t}$$

它可以写成：

$$v(t) \stackrel{?}{=} A_3 e^{-\sqrt{6}t}$$

这时，有人会发觉无法继续，因为所得到的响应只包含一个任意常量，而这里却有两个初始条件，即 $v(0)=0$ 和 $i(0)=10$ A。这时，必须给这个惟一的常量 A_3 选取合适的值，使得两个条件同时满足。如果取 $A_3=0$，那么 $v(0)=0$，满足初始电容电压，虽然 $t=0^+$ 时电容并没有存储能量，但在电感上却有350 J的初始能量。这个能量将产生一个暂态电路，从电感流出，这使得三个元件两端的电压上升到一个非零值，这与前面的假定相矛盾。以上的数学推导和电路分析过程均很严密，因此如果以上的推导并没有错误却造成了现在的困境，那必然是因为从一个并不正确的假定开始，而前面只做了一个假定，即假定微分方程可以通过假定为上面形式的解而求解。现在看来，对于临界阻尼这种特殊情形，这个假定并不正确。当 $\alpha=\omega_0$ 时，微分方程(9.4)变为：

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\alpha\frac{dv}{dt} + \alpha^2 v = 0$$

求解这个微分方程并不困难，只是在这里并不准备进行具体讨论，因为在任何一本微分方程教科书中都可以找到这种类型的方程。方程的解为：

$$v = e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2) \tag{9.18}$$

需要指出，解仍然表示为两项的和；一项仍为熟悉的负指数形式，另一项则为 t 乘以一个负指数的形式。还需要指出，这个解包含了两个常量，这符合前面我们对解的要求。

9.4.2 确定 A_1 和 A_2 的值

现在来完成上面的数值例子。将已知的 α 代入式(9.18)，得到：

$$v = A_1 te^{-\sqrt{6}t} + A_2 e^{-\sqrt{6}t}$$

首先，利用 $v(t)$ 本身的初始条件 $v(0)=0$ 来确定 A_1 和 A_2 的值，得到 $A_2=0$。得到这个这么简单的结果是因为已选取了响应 $v(t)$ 的初始值为零，而对于一般情形，通常需要联立求解两个方程来解出 A_1 和 A_2。与阻尼情形一样，第二个初始条件必须在导数 dv/dt 中使用。因此，下面对 v 进行求导，并记住已得到了 $A_2=0$，这时有：

$$\frac{dv}{dt} = A_1 t(-\sqrt{6})e^{-\sqrt{6}t} + A_1 e^{-\sqrt{6}t}$$

求出导数在 $t=0$ 时的值：

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = A_1$$

将导数用初始电容电流表示出来：

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{i_R(0)}{C} + \frac{i(0)}{C}$$

其中 i_C，i_R 和 i 的参考方向定义如图 9.2 所示，从而：

$$A_1 = 420\ \text{V}$$

于是得到响应为：

$$v(t) = 420te^{-2.45t}\ \text{V} \tag{9.19}$$

9.4.3 临界阻尼的响应曲线

与前面类似，在具体画出响应曲线之前，先通过定性分析确定它的形状。已知响应的初始条件为零，并且满足式(9.19)。根据式(9.19)不能直接看出响应随着 t 的增大将趋于零，因为 $te^{-2.45t}$ 是一个不确定的形式。不过很容易利用罗比塔(L'Hôspital)法则来看到这一点：

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 420\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{2.45t}} = 420\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2.45e^{2.45t}} = 0$$

我们再次得到这样的响应，即在起始和终止时刻响应为零，而在任何其他时刻响应取正值。在 t_m 时刻达到最大值 v_m，对于本例：

$$t_m = 0.408\ \text{s} \quad 和 \quad v_m = 63.1\ \text{V}$$

这个最大值要比前面阻尼情形得到的最大值大一些，这是因为电阻越大时，其损耗越小。同样地，达到最大响应所需要的时间也比过阻尼情形大一些。对于下降时间，可以通过求解下面的方程得到：

$$\frac{v_m}{100} = 420t_s e^{-2.45t_s}$$

求得 t_s 为(可以通过反复尝试或者利用计算器的 SOLVE 程序求出)：

$$t_s = 3.12\ \text{s}$$

它比过阻尼情形(5.15 s)要小得多，事实上，可以证明，在 L 和 C 给定的情况下，选取 R 值使得电路达到临界阻尼时，其下降时间比选取任何其他更小的 R 值使电路过阻尼时的下降时间都要小。不过，将电阻再增大一些还可以得到更好(即更小)的下降时间。轻微欠阻尼的响应将在它消失之前与时间轴相交，从而得到最短的下降时间

临界阻尼的响应曲线如图 9.6 所示，参看图 9.10，可以将它与过阻尼(以及欠阻尼)情形做比较。

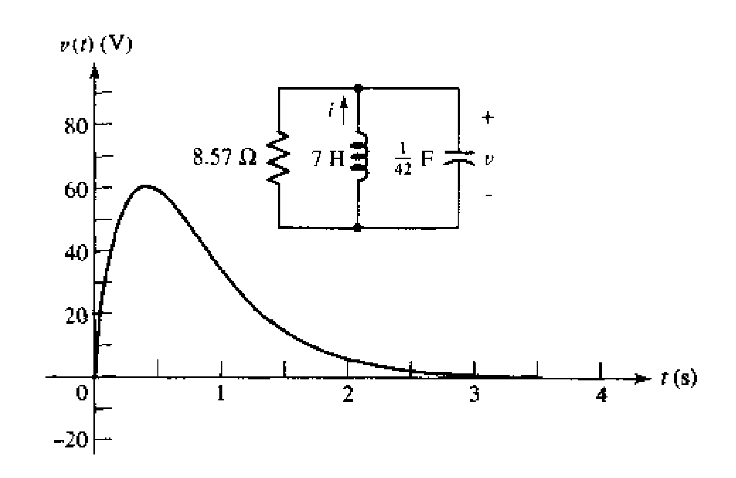


图 9.6 通过改变图 9.2 所示网络中的电阻 R 得到的临界阻尼响应，$v(t)=420te^{-2.45t}$

练习

9.3 (a)如图 9.7 所示电路，选取 R_1 的值使得 $t=0$ 之后的响应为临界阻尼；(b)选取 R_2 的值使得 $v(0)=100$ V；(c)求出 $t=1$ ms 时的 $v(t)$。

答案：1 kΩ；250 Ω；-212 V

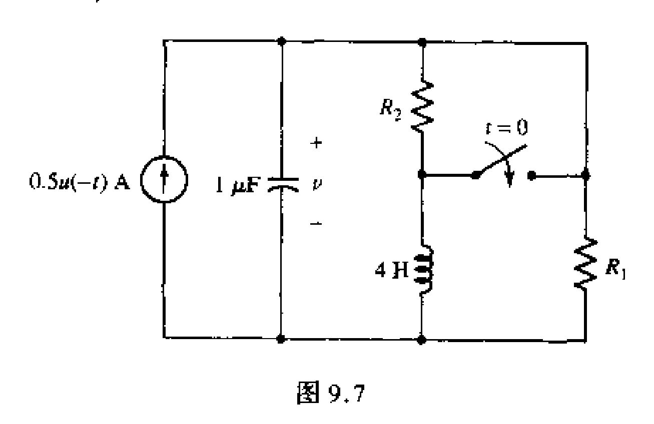


图 9.7

9.5 欠阻尼并联 RLC 电路

继续增大 R 的值，将得到欠阻尼的情形。这时，阻尼系数减小而 ω_0 保持不变，α^2 将比 ω_0^2 小，s_1 和 s_2 公式中的根号下面的表达式将为负数，这使得此时的响应呈现出和以前有很大不同的特性，不过这时并不需要回到基本微分方程。利用复数，可以将指数形式的响应表示为衰减的正弦响应。需要指出，实际的响应均由实量组成，这里的复量只用于推导①。

9.5.1 欠阻尼响应的形式

首先从指数形式出发，设：

$$v(t)=A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}$$

① 关于复数的复习，请参看附录 E。

其中：

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

然后令：

$$\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-1}\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

其中 $j = \sqrt{-1}$。

在电子工程中，使用"j"来替换"i"来表示$\sqrt{-1}$，以避免与电流相混淆。

在得到了一个新的平方根，它在欠阻尼情形下是实量，称为本征谐振频率 ω_d：

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

现在响应可以写成：

$$v(t) = e^{-\alpha t}(A_1 e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-j\omega_d t})$$

或者写成下面等效的形式：

$$v(t) = e^{-\alpha t}\left\{(A_1 + A_2)\left[\frac{e^{j\omega_d t} + e^{-j\omega_d t}}{2}\right] + j(A_1 - A_2)\left[\frac{e^{j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t}}{j2}\right]\right\}$$

利用附录 E 中的有关等式，则上式中第一个方括号内的表达式与 $\cos\omega_d t$ 相等，而第二个方括号内的表达式等于 $\sin\omega_d t$，因此：

$$v(t) = e^{-\alpha t}[(A_1 + A_2)\cos\omega_d t + j(A_1 - A_2)\sin\omega_d t]$$

然后用一个新符号来表示各项前面的系数，有：

$$v(t) = e^{-\alpha t}(B_1\cos\omega_d t + B_2\sin\omega_d t) \tag{9.20}$$

最初的表达式看起来包含复量，而现在看起来却只含有纯实的量，让人感到有些奇怪，不过要记住，我们一开始就允许 A_1 和 A_2，以及 s_1 和 s_2 为复数。不管怎样，如果处理的是欠阻尼情形，现在已经得到了与复数无关的表达式，就不必再去考虑复数了。因为 α，ω_d 和 t 均为实量，所以 $v(t)$ 也必然是一个实量（它可以显示在示波器和电压计上，或者画在图纸上）。式(9.20)就是所求的欠阻尼响应的函数形式，可以通过将它直接代入原来的微分方程来验证它的正确性（这项工作就留给那些心存怀疑的读者）。同样地，必须恰当地选取两个实常量 B_1 和 B_2，以满足所给的初始条件。

在前面的例子中，将电阻从 $7\sqrt{6}/2\ \Omega$（即 8.57 Ω）增大到 10.5 Ω，而 L 和 C 保持不变，于是：

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 2\ \text{s}^{-1}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{6}\ \text{s}^{-1}$$

以及：

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{2}\ \text{rad/s}$$

除了尚未确定的任意常量外，响应形式为已知，即：

$$v(t) = e^{-2t}(B_1\cos\sqrt{2}t + B_2\sin\sqrt{2}t)$$

9.5.2 确定 B_1 和 B_2 的值

确定这两个常量的过程与前面类似。如果假定 $v(0) = 0$ 和 $i(0) = 10$，那么 B_1 必然为零，

因此：

$$v(t)=B_2e^{-2t}\sin\sqrt{2}t$$

求导得到：

$$\frac{dv}{dt}=\sqrt{2}B_2e^{-2t}\cos\sqrt{2}t-2B_2e^{-2t}\sin\sqrt{2}t$$

在 $t=0$ 处的值为：

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0}=\sqrt{2}B_2=\frac{i_C(0)}{C}=420$$

其中 i_C 定义如图 9.2 所示。因此：

$$v(t)=210\sqrt{2}e^{-2t}\sin\sqrt{2}t$$

9.5.3 欠阻尼的响应曲线

和以前一样，注意到响应函数的初始值为零，因为前面已经假定了初始电压条件。响应函数的终值也为零，因为对于大的时间 t，指数项将趋于零。在 t 从零增大到某个小的正值时，$v(t)$将按 $210\sqrt{2}\ \sin\sqrt{2}t$ 变化，因为此时指数项仍近似为 1。但在某个时刻 t_m，指数项开始比 $\sqrt{2}t$ 衰减得快得多，于是 $v(t)$在达到某个最大值 v_m 后开始减小。需要指出的是，t_m 并不是 $\sqrt{2}t$达到最大值时的 t，不过必然在 $\sqrt{2}t$ 之前达到最大值。

当 $t=\pi/\sqrt{2}$时，$v(t)$为零，于是在时间区间 $\pi/\sqrt{2}<t<\sqrt{2}\pi$ 内响应为负，到 $t=\sqrt{2}\pi$ 再一次为零。因此 $v(t)$是一个随时间振荡的函数，在无限多个时间 $t=n\pi/\sqrt{2}$处与时间轴相交，其中 n 为正整数。不过，在本例中，电路的响应只是轻微欠阻尼，指数项使得该函数快速地衰减，使得在该图中并不能看到大多数的交点。

随着 α 的减小，振荡的特性将变得明显和突出。如果 α 为零，对应于无限大的电阻，这时的 $v(t)$为一个不衰减(即无阻尼)的正弦波。这时，不存在 $v(t)$下降并保持在它的最大值的 1% 以下的时刻，所以下降时间为无限大。不过在实际中振荡过程不可能永远持续；这里得到无阻尼正弦波是因为假定了电路中具有一个初始能量，但并没有给出任何消耗该能量的方式，于是能量从最初位于电感转到电容，然后又回到电感，如此反复，直至永恒。

9.5.4 有限电阻的作用

一个阻值有限的电阻 R 在并联 RLC 电路中充当能量的某种转移媒介，每当能量从 L 转移到 C 或者从 C 转移到 L 时，电阻就会消耗一部分能量，不久，它就消耗完了所有的能量，这时 L 和 C 上均没有任何能量，也没有电压和电流。不过，实际的并联 RLC 电路可以将 R 取得足够大，使得本征无阻尼振荡可以持续几年而无需额外补充能量。

回到前面的那个数值例子。对 $v(t)$求导，可以得到其第一个极大值为：

$$v_{m1}=71.8\ \text{V},\quad 且\quad t_{m1}=0.435\ \text{s}$$

之后的极小值为：

$$v_{m2}=-0.845\ \text{V},\quad 且\quad t_{m2}=2.66\ \text{s}$$

以此类推，画出响应曲线如图 9.8 所示。图 9.9 中用 MATLAB 画出了几种欠阻尼电路的响应曲线。

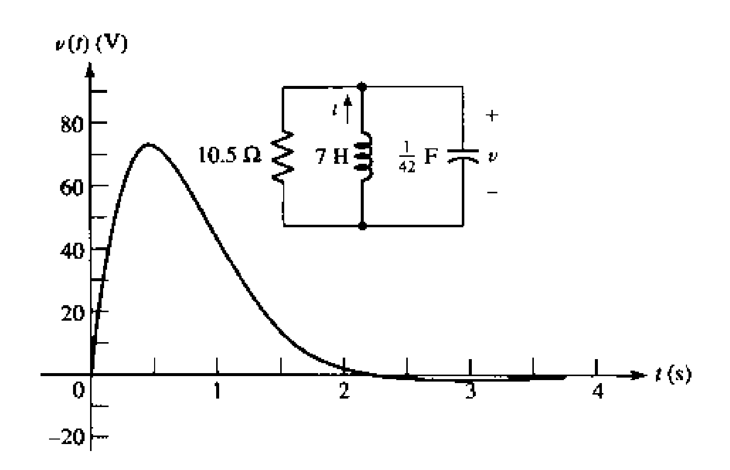


图 9.8 图 9.2 所示电路中 R 增大产生的欠阻尼响应，$v(t)=210\sqrt{2}e^{-2t}\sin\sqrt{2}t$

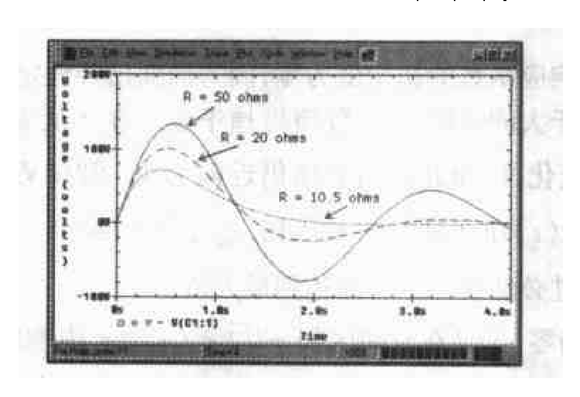


图 9.9 对于三个不同的电阻值，对该网络进行仿真得到的欠阻尼电压响应。从图中可看出，随着 R 的增大，振荡的特性越明显

可以通过反复尝试来求得下降时间为 2.92 s，它比临界阻尼时要稍小。注意到 t_s 比 t_{m2} 要大，这是因为 v_{m2} 的幅度要比 v_{m1} 幅度的 1% 要大。以上表明，稍微减小 R 可以减小负峰的幅度，并可以使得 t_s 小于 t_{m2}。

该网络的过阻尼、临界阻尼和欠阻尼响应的 PSpice 仿真结果如图 9.10 所示，将它们画在一起是为了便于比较。比较这三条曲线可以验证下面的一般结论：

- 当通过增加并联电阻来改变阻尼时，响应的最大幅度将增大，阻尼将减小。
- 当处于欠阻尼时，响应开始振荡，响应为轻微欠阻尼时可以得到最小的下降时间。

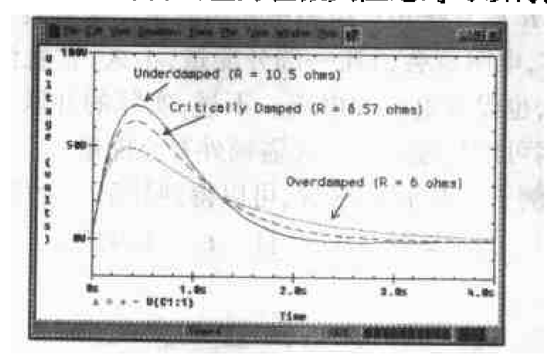


图 9.10 对例题中的网络进行仿真得到的过阻尼、临界阻尼和欠阻尼电压响应，通过改变并联电阻而得到

例题 9.2　如图 9.11(a)所示电路,求 $i_L(t)$,并画出其波形

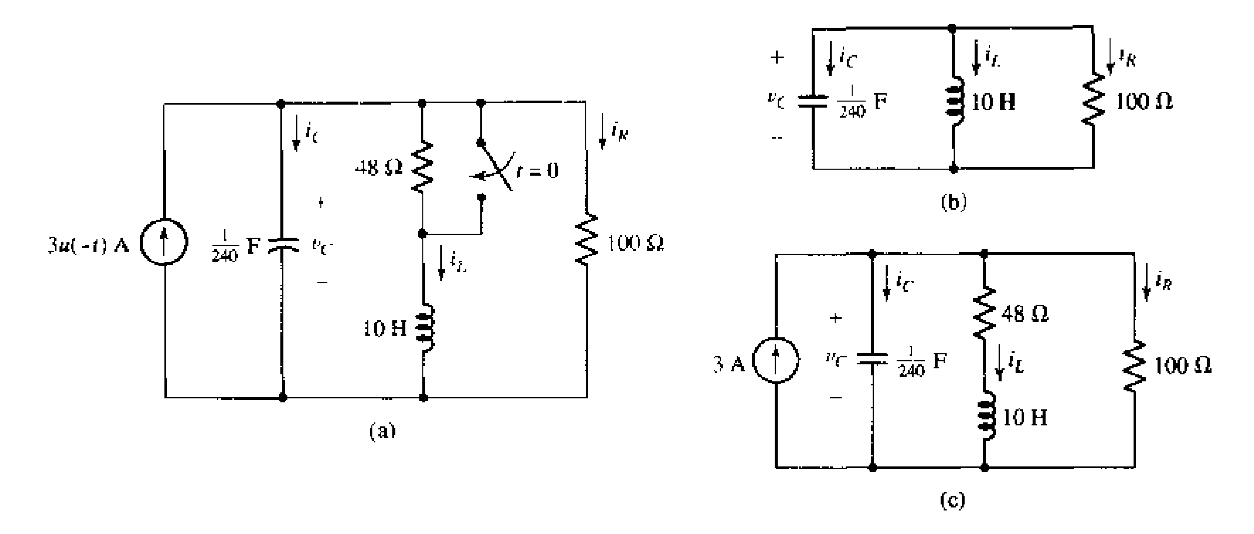


图 9.11　(a)求并联 RLC 电路的 $i_L(t)$;(b)$t \geq 0$ 时的电路;(c)为了确定初始条件画出的电路

在 $t=0$ 时,不仅 3 A 电流源可以移去,而且48 Ω电阻由于开关的闭合被短路也可以移去,此时的电路成为简单并联 RLC 电路,如图 9.11(b)所示。

下一步来计算 α 和 ω_0,判断电路是过阻尼、临界阻尼还是欠阻尼。求出 $\alpha=1.2\ \mathrm{s}^{-1}$,$\omega_0=4.899$ rad/s,因为 $\alpha<\omega_0$,所以电路为欠阻尼电路,于是可以假定响应形式为:

$$i_l(t)=e^{-\alpha t}[B_1\cos\omega_d t+B_2\sin\omega_d t] \tag{9.21}$$

其中 $\omega_d=\sqrt{\omega_o^2-\alpha^2}=4.750$。然后只需运用初始条件确定出未知常量 B_1 和 B_2 即可。

$t<0$ 时电路画出如图 9.11(c)所示,和以前一样,总是假定电路中暂态响应已经消失了很长时间,在这种情形下,对于直流,电感相当于短路,电容相当于开路。于是 $v_C(0^-)$为 48 Ω电阻和 100 Ω 电阻并联组合两端的电压,因此 $v_C(0^-)=97.30$ V。电流 $i_L(0^-)$可根据分流原理求得为 2.027 A。

在第 7 章已经讨论过,流过电感的电流和电容两端的电压不能发生突变,因此可以得到 $i_L(0^+)=2.027$ A 和 $v_C(0^+)=97.30$ V。不过,对于电感电压、电容电流、电阻电压或者电阻电流则没有这个限制。

将得到的 $i_L(0^+)$的值代入方程(9.21)得到 $B_1=2.027$ A。响应表达式中的一个常量通常很容易用这种方式求出,但是,对于另一个常量,通常需要通过对响应求导来确定。

已知:

$$v_L(t)=L\frac{di_l}{dt}$$

代入 $i_L(t)$,求导得:

$$v_L(t)=Le^{-\alpha t}[-B_1\omega_d\sin\omega_d t+B_2\omega_d\cos\omega_d t]$$
$$+L(-\alpha)e^{-\alpha t}[B_1\cos\omega_d t+B_2\sin\omega_d t]$$

在 $t=0^+$ 处,表达式化简为:

$$v_L(0^+)=L[B_2\omega_d]-\alpha LB_1$$

这时需要求出电感两端的电压。参看图 9.11(b)所示电路，注意到 $v_L(0^+)=v_C(0^+)$，而已经求出 $v_C(0^+)$为 97.3 V，于是求出 $B_2=2.561$，方程的解为：

$$i_L(t)=e^{-1.2t}[2.027\cos 4.75t+2.561\sin 4.75t]\ \text{A}$$

画出如图 9.12 所示。

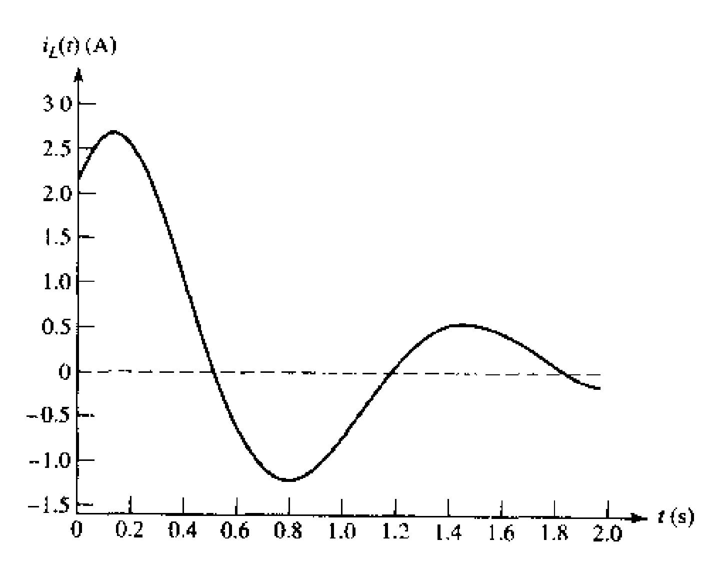


图 9.12 $i_L(t)$的曲线，具有明显的欠阻尼响应特征

练习

9.4 如图 9.13 所示电路，图中的开关已闭合在左边很长的时间，在 $t=0$ 时刻开关掷向右边，求(a)$t=0^+$ 时的 dv/dt；(b)$t=1$ ms 时的 v；(c)使 $v=0$ 的大于零的首个 t_0 的值。

答案：−1 400 V/s；0.695 V；1.609 ms

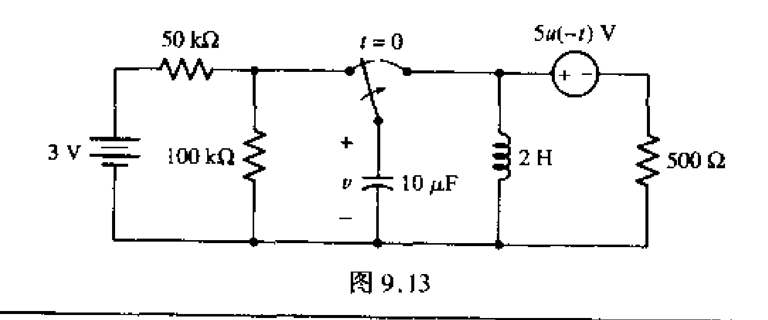


图 9.13

计算机辅助分析

PSpice 中的 Probe 有一个很有用的特性，就是能够对仿真得到的电压和电流进行数学运算。在本例中，将利用这个特性来显示并联 *RLC* 电路中能量从电容到电感的转移过程。这里，假定电容初始储存的能量为 1.25 μJ，电感初始储存的能量为零。

选取电容为 100 nF，电感为 7 μH，这时立刻可以计算出 $\omega_0=1.195\times10^6\ \text{s}^{-1}$。为了能考虑过阻尼、临界阻尼和欠阻尼的情况，需要分别选取合适的并联电阻值，使得 $\alpha>\omega_0$(过阻尼)，$\alpha=\omega_0$(临界阻尼)，和 $\alpha<\omega_0$(欠阻尼)。根据前面的讨论可知，对于并联电路 $\alpha=(2RC)^{-1}$。选取 $R=$

4.1833 Ω,使得电路接近于临界阻尼情况,在实际中,要使得 α 精确等于 ω_0 是不可能的。如果增大电阻,则储存在其他两个元件的能量将损耗得更慢,这样将得到欠阻尼响应,这里选取 $R = 100$ Ω 以使得电路处于深度欠阻尼。再选取 $R = 1$ Ω(一个非常小的电阻)以得到过阻尼响应。

选取好电阻后,下面准备分别进行三次仿真,在这三次仿真中分别取上面选定的电阻值。因为电容初始储存的1.25 μJ 能量相当于初始电容电压为5 V,可以根据这点来设定电容的初始条件。

启动 Probe 后,选取 Trace 菜单下的 Add。希望画出储存在电感和电容上的能量随时间变化的曲线。对于电容,$w = \frac{1}{2}Cv^2$,所以单击 Trace Expression 窗口,键入"0.5 * 100E-9 * "(不包括引号),然后单击 V(C1:1),返回到 Trace expression 窗口,键入" * ",再次单击 V(C1:1),选择 Ok 按钮。重复以上的步骤,用7E-6替换100E-9,然后单击 I(L1:1),以得到储存在电感上的能量。

图9.14分别给出了三次仿真的 Probe 输出曲线。在图9.14(a)中可以看到,电路中的能量持续在电容和电感之间来回转移,直到它最终完全被电阻消耗。将电阻减小到4.183 3 mΩ 将得到临界阻尼电路,相应的能量曲线如图9.14(b)所示,从该图可以看到,这时欠阻尼情形的振荡特性已不存在,相反地,可以看到转移到电感的能量大约在0.8 μs 达到峰值,然后下降到零。过阻尼响应曲线如图9.14(c)所示,从中可以看到,过阻尼响应情形下能量损耗得更快,只有很小的能量转移到电感,因为这时大多数能量在电阻上消耗了。

9.6 无源串联 *RLC* 电路

下面来求由理想电阻、理想电感和理想电容串联组成的理想电路模型的自由响应。理想电阻可以代表实际 *LC* 或 *RLC* 电路具有的实际电阻,它可以表示电感中的欧姆损耗与铁磁损耗,也可以表示所有其他损耗能量的器件。

串联 *RLC* 电路是并联 *RLC* 电路的对偶,仅从这点出发就使得对它的分析变得很简单。图9.15(a)画出了串联 *RLC* 电路,该电路的基本积分微分方程为:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt' - v_C(t_0) = 0$$

可以将它与并联 *RLC* 电路的方程比较,将并联 *RLC* 电路重新画出,如图9.15(b)所示。

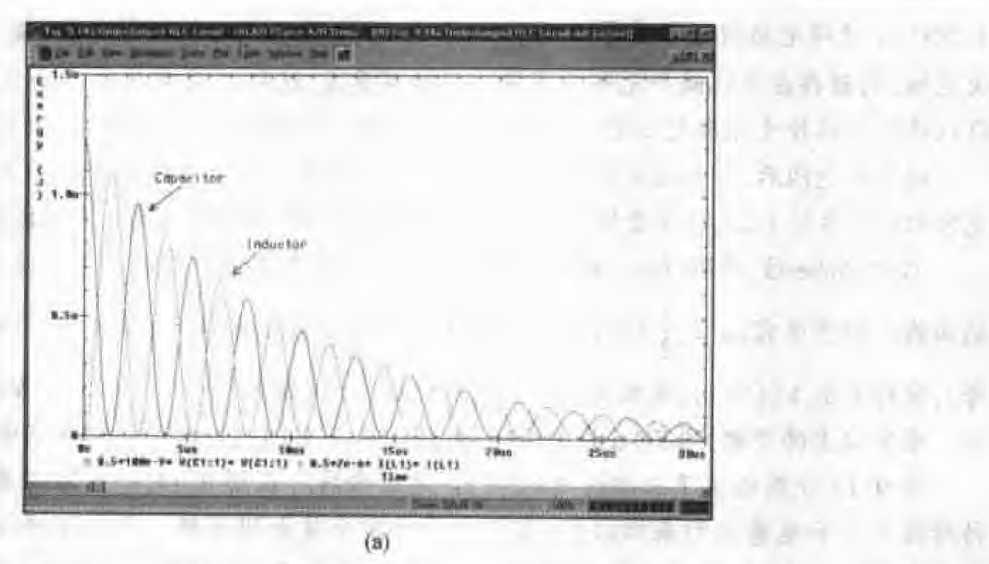
$$C\frac{dv}{dt} + \frac{1}{R}v + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt' - i_L(t_0) = 0$$

对方程两边求导,得到的两个方程仍然为对偶:

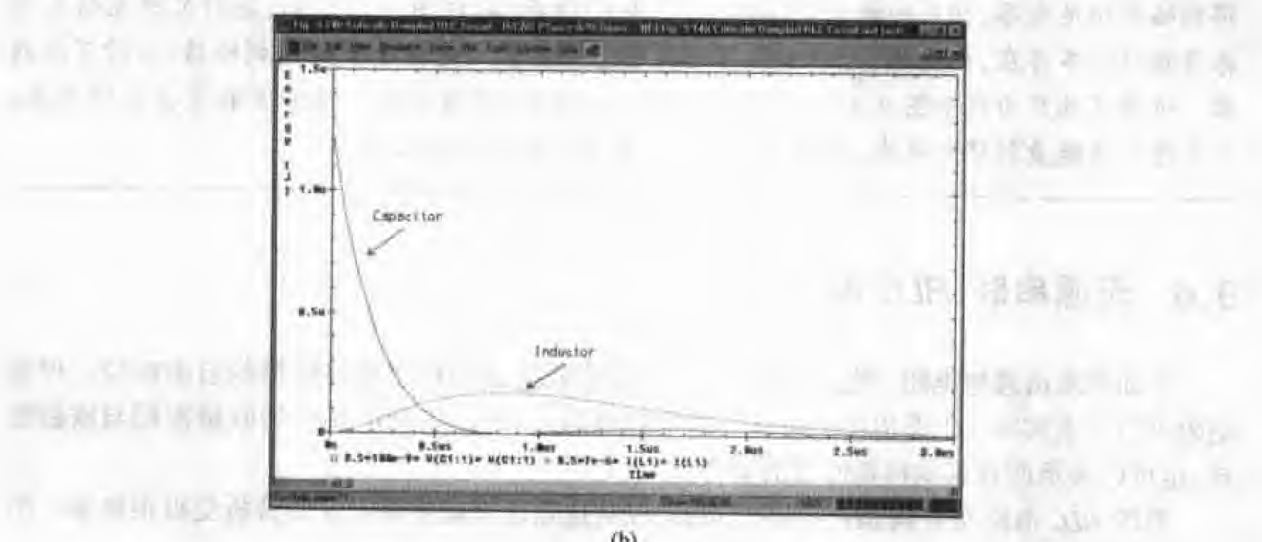
$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0 \tag{9.22}$$

$$C\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}v = 0 \tag{9.23}$$

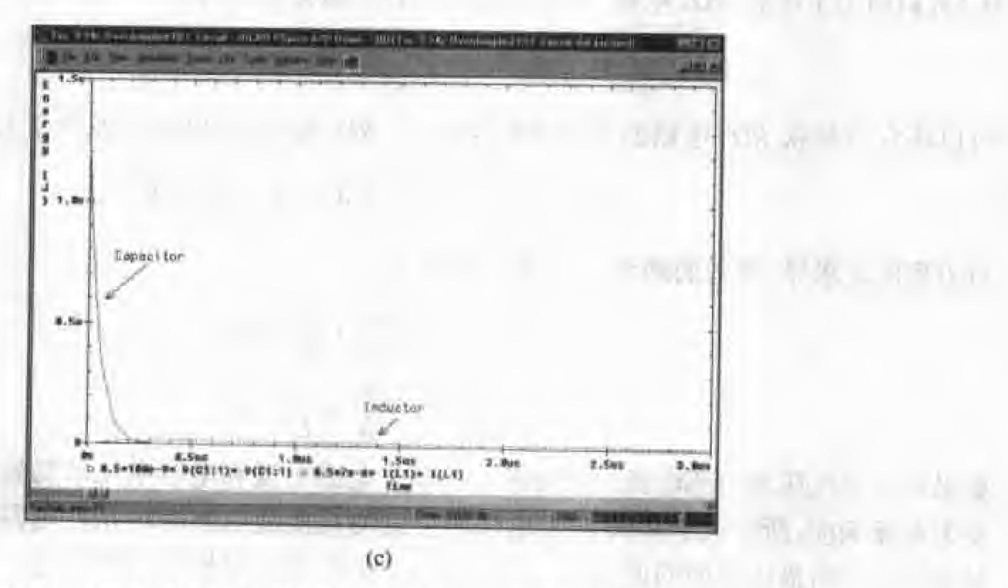
如果将电容电压和电感电流的初始条件等效于电感电流和电容电压的初始条件,将电压响应变为电流响应,所有关于并联 *RLC* 电路的结论均直接适用于串联 *RLC* 电路。因此,可以采用对偶语言重新描述前面的四节,从而得到关于串联 *RLC* 电路的完整描述。不过,在上面的几段叙述之后,再这么去做就显得有些可笑,因为并没有必要这么做。



(a)



(b)



(c)

图 9.14 (a) $R = 100\ \Omega$; (b) $R = 4.183\ 3\ \Omega$; (c) $R = 1\ \Omega$ 时并联 *RLC* 电路中的能量转移

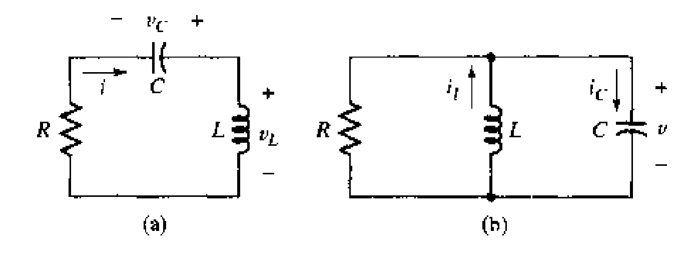


图9.15 (a)串联 RLC 电路是(b)并联 RLC 电路的对偶;当然,两个电路中的各元件数值并不相同

9.6.1 串联电路响应的简要总结

这里,对串联电路响应做一个总结。以图9.15(a)所示电路为例,过阻尼响应为:

$$i(t)=A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}$$

其中:

$$s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$

因此:

$$\alpha=\frac{R}{2L}$$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

临界阻尼响应的形式为:

$$i(t)=e^{-\alpha t}(A_1t+A_2)$$

欠阻尼响应的形式为:

$$i(t)=e^{-\alpha t}(B_1\cos\omega_dt+B_2\sin\omega_dt)$$

其中:

$$\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$$

很明显,如果使用参数 α,ω_0 和 ω_d 来表示响应的形式,那么对偶情形下响应的数学形式完全相同。无论在串联还是并联电路中,增大 α 的值而保持 ω_0 不变,电路将趋于过阻尼响应。这里只需要指出的是,在计算 α 时,对于并联电路它为 $1/2RC$,而对于串联电路它为 $R/(2L)$。因此,增大 α 可以通过增大串联电路中的电阻或者减小并联电路中的电阻而达到。总结如下:

$$\alpha=\frac{1}{2RC}\qquad\qquad\alpha=\frac{R}{2L}$$
$$(并联)\qquad\qquad(串联)$$

例题 9.3 给定电路如图9.15(a)所示,其中 L = 1 H, $R=2\ \text{k}\Omega$, $C=\frac{1}{401}\ \mu\text{F}$, $i(0)=2$ mA 和 $v_C(0)=2$ V,求出并画出 $i(t)$

首先计算出 $\alpha=R/2L=1\ 000\ \text{s}^{-1}$, $\omega_0=1/\sqrt{LC}=20\ 025$ rad/s,说明这是一个欠阻尼响应,于是计算出 ω_d 的值,为 20 000 rad/s。除了两个任意常量尚未求出外,响应的形式为已知,即:

$$i(t)=e^{-1\,000t}(B_1\cos 20\,000t+B_2\sin 20\,000t)$$

因为已知 $i(0)=2$ mA，于是将该值代入上面得到的 $i(t)$ 的表达式有：

$$B_1=0.002\ \text{A}$$

于是：

$$i(t)=e^{-1\,000t}(0.002\cos 20\,000t+B_2\sin 20\,000t)\ \text{A}$$

剩下的初始条件必须应用于导数表达式中，所以对响应求导，有：

$$\frac{di}{dt}=e^{-1\,000t}(-40\sin 20\,000t+20\,000B_2\cos 20\,000t$$
$$-2\cos 20\,000t-1\,000B_2\sin 20\,000t)$$

和

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0}=20\,000B_2-2=\frac{v_L(0)}{L}=\frac{v_C(0)-Ri(0)}{L}$$
$$=\frac{2-2\,000\times(0.002)}{1}=-2\ \text{A/s}$$

所以：

$$B_2=0$$

于是，所求的响应为：

$$i(t)=2e^{-1\,000t}\cos 20\,000t\ \text{mA}$$

画出响应曲线的好的方法是先画出两个指数包络 $2e^{-1\,000t}$ 和 $-2e^{-1\,000t}$，如图 9.16 中的虚线所示。正弦波的 1/4 周期点的位置为 $20\,000t=0,\pi/2,\pi$ 等，即 $t=0.078\,54k$ ms，$k=0,1,2,\cdots$，把这些点标注在时间轴上，这样容易快速地画出该振荡曲线。

下降时间可以根据曲线的上半包络来确定，这就是说，令 $2e^{-1\,000t_s}$ mA 等于它的最大值 2 A 的 1%，即 $e^{-1\,000t_s}=0.01$，于是得到近似的 $t_s=461\ \mu$s。通常采用这种方法来求出下降时间。

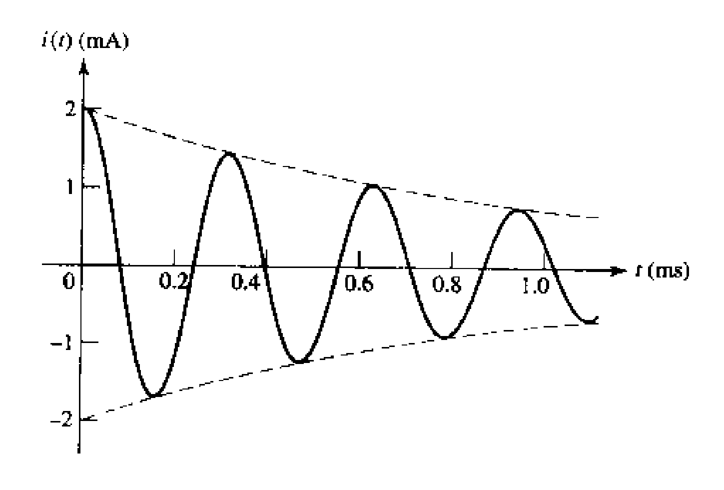


图 9.16　欠阻尼串联 RLC 电路的电流响应曲线，其中 $\alpha=1\,000\ \text{s}^{-1}$，$\omega_0=20\,000\ \text{s}^{-1}$，$i(0)=2$ mA 和 $v_C(0)=2$ V。可以通过首先画出曲线的包络来简化曲线的绘制

练习

9.5　参看图 9.17 所示电路，求(a) α;(b) ω_0;(c) $i(0^+)$;(d) $di/dt|_{t=0^+}$;(e) $i(12\text{ ms})$。

答案：100 s^{-1}; 224 rad/s; 1 A; 0; −0.120 4 A

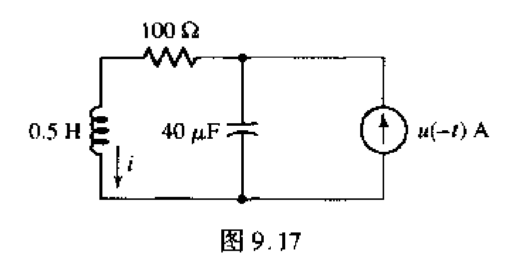


图 9.17

9.7　RLC 电路的完全响应

下面来考虑这样的 RLC 电路，直流电源接入这种电路后产生的受迫响应并不随着时间变为无限大而消失。可以采用与 RL 或者 RC 电路分析中的类似步骤来得到一般解，即：受迫响应可以根据直流电源很快地确定，自由响应则为含有几个待定常量的函数表达式。将完全响应写成受迫响应和自由响应的和，然后确定初始条件，将它们代入完全响应就得到各待定常量。这个过程中，最后一个步骤通常要困难一些。因此，对于包含直流电源的电路，尽管其初始条件的确定与前面已经讨论过的无源电路的初始条件的确定并没有根本区别，但是在下面的例子中，还是特别强调了初始条件的确定过程。

大多数情况下，在确定和运用初始条件时之所以感到困惑，是因为没有一套严格的规则可以遵循。因为通常情况下，对每个特定的问题进行分析时，都会发觉这个问题或多或少包含一些独特的地方，这也是通常产生困难的所在。

9.7.1　容易求解的部分

二阶系统的完全响应(不失一般性，假定为电压响应)由受迫响应(对于直流激励，它为常量)：

$$v_f(t) = V_f$$

和自由响应：

$$v_n(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

组成，因此：

$$v(t) = V_f + Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

假定 s_1，s_2 和 V_f 均已根据电路和给定的激励函数求出，还需要求出 A 和 B。最后一个方程给出了 A，B，v 和 t 的函数依赖关系，代入已知的 $t=0^+$ 时 v 的值，就得到了一个关于 A 和 B 的方程：$v(0^+) = V_f + A + B$，这就是完全响应中容易得出的部分。

9.7.2　其余的部分

不过，还需要知道另一个关于 A 和 B 的方程，这通常可以通过对响应求导数而得到：

$$\frac{dv}{dt} = 0 + s_1 Ae^{s_1 t} + s_2 Be^{s_2 t}$$

代入已知的 $t=0^+$ 时 dv/dt 的值，就得到了另一个关于 A 和 B 的方程，于是可以联立求解出 A 和 B 这两个常量。

剩下的问题就是确定 $t=0^+$ 时 v 和 dv/dt 的值。假定 v 为某个电容电压 v_C，因为 $i_C = C\,dv_C/dt$，可以看到，dv/dt 的初始值与某个电容电流的初始值有关。所以，如果可以求出这个初始电容电流值，就相当于得到了 dv/dt 的值。$v(0^+)$通常很容易得到，但求解 dv/dt 的初始值往往困难一些。如果选取电感电流为响应，那么类似地，di_L/dt 的初始值将和某个电感电压的初始值有关，对于除电容电压和电感电流之外的其他量，可以通过将它们的初始值和它们微分的初始值用相应的 v_C 和 i_L 表示出来而得到。

为了说明以上过程，下面将对图 9.18 所示电路进行详细分析，并求出所有有关的量。需要注意的是，为简化计算，再次使用了并不实际的大电容。

例题 9.4 图 9.18(a)所示电路含有 3 个无源元件，并分别定义了一个电压和一个电流。分别求出 $t=0^-$ 和 $t=0^+$ 时这 6 个量的值

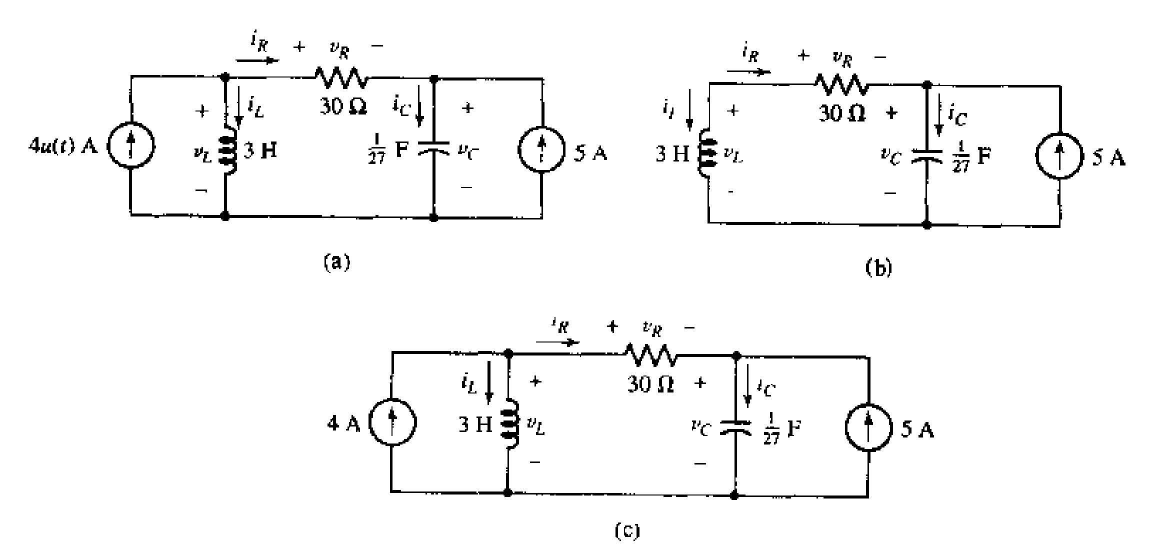


图 9.18 一个 *RLC* 电路，用它来说明确定初始条件的过程

本题的目标是求出 $t=0^-$ 和 $t=0^+$ 时各电流和电压值，求出这些值后，就容易求出各导数的初始值了。首先，采用简单的循序渐进的方法来求解本题。

如图 9.18(b)所示，在 $t=0^-$ 时只有右边的电流源起作用。假定电路已处于现有状态很长的时间，并且所有的电流和电压均为常量。流过电感的电流为直流，于是电感两端的电压必然为零：

$$v_L(0^-)=0$$

电容两端为直流电压($-v_R$)，这要求流过电容的电流为零：

$$i_C(0^-)=0$$

对右边的节点应用基尔霍夫电流定律，得到：

$$i_R(0^-)=-5\text{ A}$$

同时可以得到：

$$v_R(0^-)=-150\text{ V}$$

然后，沿左边的网孔应用基尔霍夫电压定律，得到：

$$v_L(0^-) = 150\ \text{V}$$

应用 KCL，得到电感电流为：

$$i_L(0^-) = 5\ \text{A}$$

很显然，因为没有暂态过程，所以在 $t=0^-$ 处所有的导数（虽然这里对它们并不感兴趣）均为零。

现在，将时间增大一点。在 $t=0^-$ 到 $t=0^+$ 的时间间隔内，左边的电流源开始起作用，于是在 $t=0^-$ 的某些电压和电流值将发生突变，此时的电路如图 9.18(c) 所示。不过，首先来考虑那些不能发生突变的量，即电感电流和电容电压。这两个量在切换时间间隔内必须保持不变，因此：

$$i_L(0^+) = 5\ \text{A} \quad 和 \quad v_C(0^+) = 150\ \text{V}$$

因为已知左边节点的两个电流，于是可以求出：

$$i_R(0^+) = -1\ \text{A} \quad 和 \quad v_R(0^+) = -30\ \text{V}$$

所以：

$$i_C(0^+) = 4\ \text{A} \quad 和 \quad v_L(0^+) = 120\ \text{V}$$

这样，就得到了 $t=0^-$ 时的 6 个初始值以及 $t=0^+$ 时的 6 个初始值。可以看到，在最后的 6 个初始值中，只有电容电压和电感电流与 $t=0^-$ 时的值相比没有改变。

还可以用稍微不同的另一种方法来求出这些在 $t=0^-$ 和 $t=0^+$ 的电流电压值。在开关切换之前，电路中只存在直流电流和直流电压。于是，可以将电感替换成短路线，将电容替换成开路。按这种方式重新画出图 9.18 所示的电路，得到图 9.19(a)。在这个电路中，只有右边的电流源起作用，且这个 5 A 的电流流过电阻和电感。于是有 $i_R(0^-) = -5\ \text{A}$，$v_R(0^-) = -150\ \text{V}$ 和 $i_L(0^-) = 5\ \text{A}$，$v_L(0^-) = 0$ 以及 $i_C(0^-) = 0$，$v_C(0^-) = 150\ \text{V}$，和前面得到的结果一致。

现在来画一个等效电路，并用它来确定 $t=0^+$ 时有关的电压和电流值。因为每个电容电压和每个电感电流在切换瞬时必须保持不变，所以可以通过将每个电感替换成电流源，将每个电容替换成电压源来使这个条件得到满足，在不连续处，用这些电源来维持电容电压和电感电流不变。于是，得到等效电路如图 9.19(b) 所示。需要指出的是，图 9.19(b) 所示的电路仅在 $t=0^-$ 到 $t=0^+$ 的时间间隔内有效。

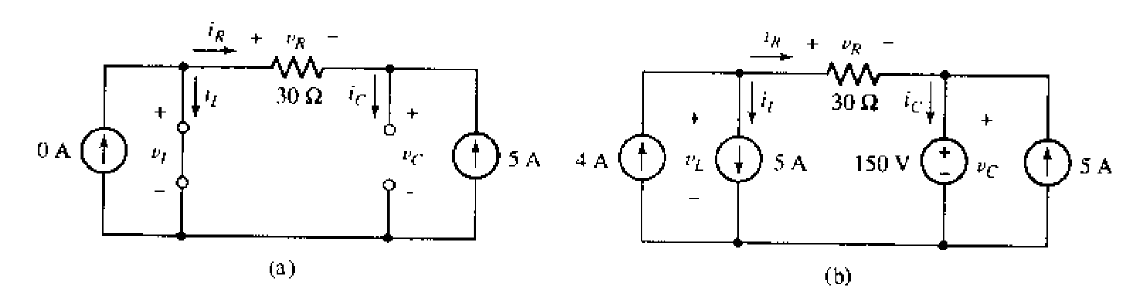


图 9.19 (a) $t=0^-$ 时，图 9.18(a) 所示电路简化后的等效电路；(b) 仅 $t=0^+$ 时刻有效的等效电路，其中标出了各个电压和电流

通过分析这个等效直流电路，可以得到 $t=0^+$ 时的各个电压和电流。求解的过程并不困

难，但由于这个网络中存在的电源比较多，看起来比较复杂。不过，在前面的第 3 章已经讨论了这类问题的求解，这里不包含任何新的内容。首先来求电流，从左上端的节点开始，可以看到 $i_R(0^+)=4-5=-1$ A。然后考虑右上端的节点，可以得到 $i_C(0^+)=-1+5=4$ A。因此，显然有 $i_L(0^+)=5$ A。

下一步来考虑电压的求解。根据欧姆定律，可得 $v_R(0^+)=30(-1)=-30$ V。对于电感，根据 KVL 可得 $v_L(0^+)=-30+150=120$ V。最后，包括已知的 $v_C(0^+)=150$ V，就得到了所有在 $t=0^+$ 上时的值。

练习

9.6 如图 9.20 所示电路，设 $i_s=10u(-t)-20u(t)$ A，求(a) $i_L(0^-)$；(b) $v_C(0^+)$；(c) $v_R(0^+)$；(d) $i_{L(\infty)}$；(e) $i_L(0.1\text{ ms})$。

答案：10 A; 200 V; 100 V; −20 A; 2.07 A

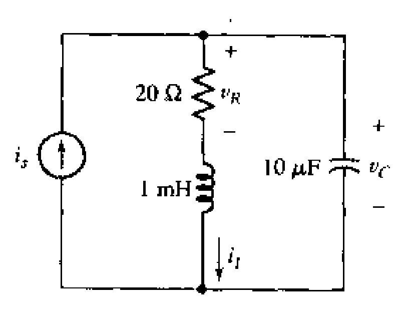


图 9.20

例题 9.5 如图 9.18 所示电路，重新画出如图 9.21 所示，通过首先求出 $t=0^+$ 时 3 个电压和 3 个电流的一阶导数来完成其初始条件的计算

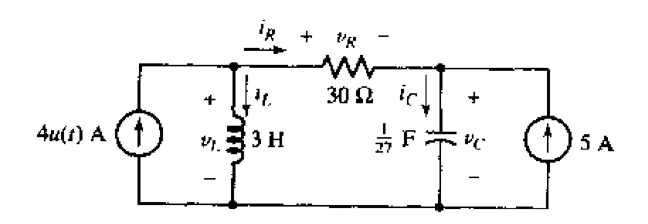


图 9.21 重新画出的例题 9.5 中的图 9.18 所示的电路

首先来考虑两个储能元件。对于电感：

$$v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

特别是：

$$v_L(0^+) = L\frac{di_L}{dt}\bigg|_{t=0^+}$$

于是：

$$\frac{di_L}{dt}\bigg|_{t=0^+} = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{120}{3} = 40 \text{ A/s}$$

类似地：

$$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0^+}=\frac{i_C(0^+)}{C}=\frac{4}{1/27}=108\ \text{V/s}$$

注意到,对于导数,KCL 和 KVL 仍然适用,于是可以求出其他 4 个导数。例如,对图 9.21 中左边的节点有:

$$4-i_L-i_R=0,\quad t>0$$

于是有:

$$0-\frac{di_L}{dt}-\frac{di_R}{dt}=0,\quad t>0$$

因此得到:

$$\left.\frac{di_R}{dt}\right|_{t=0^+}=-40\ \text{A/s}$$

用类似的方法可以求出其他 3 个导数的初始值为:

$$\left.\frac{dv_R}{dt}\right|_{t=0^+}=-1\ 200\ \text{V/s}$$

$$\left.\frac{dv_L}{dt}\right|_{t=0^+}=-1\ 092\ \text{V/s}$$

和

$$\left.\frac{di_C}{dt}\right|_{t=0^+}=-40\ \text{A/s}$$

在结束讨论如何确定所需要的初始条件值之前,需要指出,前面至少略去了一种求解它们的有效方法,即通过首先对初始电路列出一般的节点或者回路方程,然后代入在 $t=0^-$ 时已知为零的电感电压和电容电流的值,然后就可以得到在 $t=0^-$ 的其他几个电压或电流的值,并容易求出剩余的量。对 $t=0^+$ 可以进行类似的分析。这是一种很重要的分析方法,尤其是对于那些不能采用前面简单的循序渐进的方法来分析的复杂电路,必须采用这种方法。

下面求解图 9.21 所示电路的响应 $v_C(t)$。当两个电源均不起作用时,电路表现为一个串联 RLC 电路,容易求出 s_1 和 s_2 分别为 -1 和 -9。仅通过观察就可以得到受迫响应;不过,如果必要,可以通过画出电路的直流等效来求出受迫响应,这时的等效电路与图 9.19(a)类似,只是多了一个 4 A 电流源。求出受迫响应为 150 V,于是:

$$v_C(t)=150+Ae^{-t}+Be^{-9t}$$

和

$$v_C(0^+)=150=150+A+B$$

或

$$A+B=0$$

然后求导有:

$$\frac{dv_C}{dt}=-Ae^{-t}-9Be^{-9t}$$

和

$$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0^+}=108=-A-9B$$

最后，得到：

$$A = 13.5 \quad B = -13.5$$

和

$$v_C(t) = 150 + 13.5(e^{-t} - e^{-9t}) \quad \text{V}$$

9.7.3 求解过程的简单回顾

下面对前面的求解过程做一个总结。当希望确定一个简单三元件 *RLC* 电路的暂态特性时，首先必须确定要分析的是串联电路还是并联电路，以便于使用正确的 α 的表达式。这两个方程分别为：

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad (\text{并联 } RLC)$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad (\text{串联 } RLC)$$

下一步，判断电路响应的类型。对于两个电路，ω_0 均为：

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

如果 $\alpha > \omega_0$，电路为过阻尼，自由响应具有以下的形式：

$$f_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

其中：

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

如果 $\alpha = \omega_0$，电路为临界阻尼，并且：

$$f_n(t) = e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2)$$

最后，如果 $\alpha < \omega_0$，得到的为欠阻尼响应：

$$f_n(t) = e^{-\alpha t}(A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t)$$

其中：

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

最后，判断电路是无源电路还是有源电路。如果在开关切换或不连续过程结束后独立源在电路中不起作用，那么电路为无源电路，自由响应即为完全响应。而如果有独立源存在，那么为有源电路，必须确定受迫响应，这时的完全响应为上面两个响应的和：

$$f(t) = f_f(t) + f_n(t)$$

这对于电路中的任意电流或电压均适用。最后一步，根据给定的初始条件求出待定的常量。

练习

9.7 如图 9.22 所示电路，设 $v_s = 10 + 20u(t)$ V，求(a) $i_L(0)$；(b) $v_C(0)$；(c) $i_{L,f}$；(d) $i_L(0.1\text{s})$。

答案：0.2 A；10 V；0.6 A；0.319 A

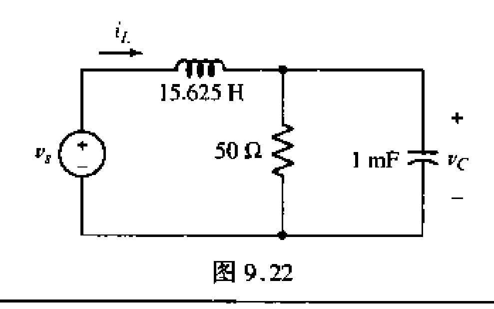


图 9.22

实 际 应 用

对汽车悬挂减震系统的建模

在引言中提起过，可以将本章中的一些概念扩展到电路分析之外。事实上，前面研究过的微分方程的一般形式可以在很多其他领域看到——所需要做的不过是"翻译"新的参数名词。例如，考虑图 9.23 所示的简单的汽车悬挂减震系统。活塞不是附在汽缸上，而是同时附在弹簧和车轮上，因此运动的部分是弹簧、活塞和车轮。



图 9.23 汽车悬挂减震系统的简单模型，这里只是用来说明本章讨论的方法和概念应用的广泛性

首先通过分析这个过程中存在的作用力来对这个物理系统进行建模。定义位置函数 $p(t)$，它描述活塞在汽缸中的位置，然后将作用在弹簧上的力写成：

$$F_S = Kp(t)$$

其中，K 称为倔强系数，单位为 lb/ft[①]。作用在车轮上的力 F_W 等于车轮的质量乘以它的加速度，即：

$$F_W = m\frac{d^2p(t)}{dt^2}$$

其中 m 的单位为 $\text{lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft}$。需要考虑的最后一个(但不是最小的)力是作用在活塞上的摩擦力：

$$F_f = \mu_f\frac{dp(t)}{dt}$$

① lb 为磅，其中 1 lb = 0.4536 kg。ft 为英尺，1 ft = 0.3048 m ——编者注。

其中，μ_f 为摩擦系数，单位为 lb·s/ft。

根据基础物理课程可知，作用于该系统的所有力的和必然为零，所以：

$$m\frac{d^2p(t)}{dt^2}+\mu_f\frac{dp(t)}{dt}+Kp(t)=0 \tag{9.24}$$

在我们的学术生涯的某个阶段，求解这类方程似乎是场噩梦，不过它们将不再是了，因为如果将方程(9.24)与方程(9.22)和方程(9.23)比较，立即可以看到明显的相似之处。以方程(9.22)为例，它是描述了串联 *RLC* 电路响应的微分方程，可以得到下面的对应关系：

质量	m	→	电感	L
摩擦系数	μ_f	→	电阻	R
倔强系数	K	→	电容的倒数	C^{-1}
位置量	$p(t)$	→	电流量	$i(t)$

所以，如果讨论的是英寸[1] 而不是安培，是 lb·s²/ft 而不是 H，是 ft/lb 而不是 F，是 lb·s/ft 而不是 Ω，那么可以将在建模 *RLC* 电路中新学到方法应用到对汽车减震器的估算。

假定汽车车轮的典型重量为 70 lb，通过将它除以地球重力加速度(32.17 ft/s²)，得到车轮的质量为 $m=2.176$ lb·s²/ft。汽车的总重量为 1 985 lb，弹簧静态(在没有乘客时)压缩量为 4 英寸。通过将各减震器承受的重量除以弹簧的静态压缩量得到倔强系数，所以 $K=\left(\frac{1}{4}\right)\times(1\ 985)\times(3\ \text{ft}^{-1})=1\ 489$ lb/ft。还已知活塞和汽缸之间的摩擦系数为 65 lb·s/ft。因此，可以将这个减震器用一个 *RLC* 电路来建模，其中 $R=65\ \Omega$，$L=2.176$ H 和 $C=K^{-1}=671.6\ \mu\text{F}$。减震器的谐振频率为 $\omega_0=(LC)^{-1/2}=26.16$ rad/s，阻尼系数为 $\alpha=R/(2L)=14.94\ \text{s}^{-1}$。因为 $\alpha<\omega_0$，所以这个减震系统为欠阻尼系统，这意味着当汽车驾驶经过路上的一个坑洼时司机将感受到几次反冲。当汽车以很高的速度行驶时，需要减小震动(即需要更大的摩擦系数，或者电路模型中更大的电阻)，这时对应于过阻尼响应。不过，如果驾驶在未铺平的道路上，轻微欠阻尼的响应更为合适。

感兴趣的读者可以参看 R. W. Goody, *MicroSim PSpice for Windows*, vol. I, 2d ed., Prentice Hall, 1998，在那里可以找到用 *RLC* 电路建模悬挂减震系统更详细的讨论。

9.8 无损耗 *LC* 电路

如果在并联 *RLC* 电路中电阻为无限大，或者在串联 *RLC* 电路中电阻为零，就得到一个简单 *LC* 回路，在这个回路中响应可以永久维持。首先来看一个这种电路的例子，然后讨论不使用任何电感如何得到同样的响应。

考虑图 9.24 所示的无源电路，为方便计算，这里使用了大电感 $L=4$ H 和大电容 $C=\frac{1}{36}$ F。假定 $i(0)=-\frac{1}{6}$ A 和 $v(0)=0$，得到 $\alpha=0$ 和 $\omega_0^2=9\ \text{s}^{-1}$，所以 $\omega_d=3$ rad/s。如果忽略指数衰减项，则电压 v 为：

[1] 1 英寸 = 2.54 cm——编者注。

$$v = A\cos 3t + B\sin 3t$$

因为 $v(0)=0$，所以得到 $A=0$。下一步，对电压求导并计算导数在 $t=0$ 时的值：

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = 3B = -\frac{i(0)}{1/36}$$

又已知 $i(0) = -\frac{1}{6}$，因此 $t=0$ 时 $dv/dt = 6$ V/s，于是必然有 $B = 2$ V，所以：

$$v = 2\sin 3t \text{ V}$$

这是一个无阻尼的正弦振荡，换句话说，这个电压响应不随时间衰减。下面来看不采用 LC 电路如何得到相同的电压。我们希望写出 v 满足的微分方程，然后用一组运放来得到该微分方程的解。尽管这里是针对一个特定的例子来进行讨论，不过它是一种通用的方法，可以应用到任何线性齐次微分方程中。

对图 9.24 所示 LC 电路，选取 v 为变量，并令向下流过电感与流过电容的电流和为零：

$$\frac{1}{4}\int_{t_0}^{t} v\,dt' - \frac{1}{6} + \frac{1}{36}\frac{dv}{dt} = 0$$

求导，得到：

$$\frac{1}{4}v + \frac{1}{36}\frac{d^2v}{dt^2} = 0$$

或

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -9v$$

为了求解该方程，采用运放作为积分器。假定微分方程的最高导数项，为 d^2v/dt^2，出现在结构图中的 A 点。这里，使用 7.6 节中讨论过的积分器进行积分，其中 $RC=1$。因为输入为 d^2v/dt^2，所以积分器的输出必然为 $-dv/dt$，其中符号的改变是由于积分器使用了一个反相放大器。前面分析这个电路时已经得到 dv/dt 的初始值为 6 V/s，于是，在积分器中必须设置 -6 V 的初始值。负的一阶导数现在就成了第二级积分器的输入，因此它的输出为 $v(t)$，并且初始值为 $v(0)=0$。现在，只需要将 v 乘以 -9 就可以得到 A 点对应的二阶导数。乘以 -9 即放大 9 倍并改变符号，容易采用反相运放来完成这个过程。

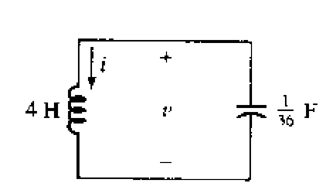


图 9.24　这个电路为无损电路，如果 $v(0)=0$，$i(0) = -\frac{1}{6}$ A，它的输出为无阻尼的正弦振荡 $v = 2\sin 3t$ V

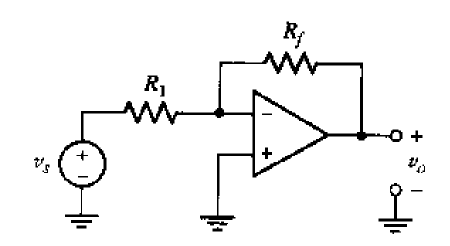


图 9.25　一个反相运放电路，假定其中的运放为理想运放，其增益为 $v_o/v_s = -R_f/R_1$

图 9.25 画出了一个反相放大器电路。对于理想运放，输入电流和输入电压均为零，于是向右流过 R_1 的电流为 v_s/R_1，而向左流过 R_f 的电流为 v_o/R_f。因为它们的和为零，所以有：

$$\frac{v_o}{v_s} = -\frac{R_f}{R_1}$$

因此,可以通过设置恰当的值来得到 - 9 的增益,例如取 $R_f = 90\ \text{k}\Omega$, $R_1 = 10\ \text{k}\Omega$。

如果在每个积分器中取 R 为 1 MΩ、C 为 1 μF,那么对于各积分器:

$$v_o = -\int_0^t v_i dt + v_o(0)$$

反相放大器的输出现在就成了在 A 点的输入,这组运放的结构如图 9.26 所示。如果左边的开关在 $t = 0$ 时刻闭合,同时两个初始条件开关打开,则第二个积分器的输出将为无阻尼的正弦波 $v = 2\sin 3t$ V。

注意到,图 9.24 所示的 LC 电路和图 9.26 所示的运放电路具有相同的输出,但是运放电路中不含有任何电感,它只是工作起来像含有一个电感,它的输出端与地之间的电压即为所需的正弦电压。因为通常情况下电感比较笨重,而且昂贵,损耗也大(因此与"理想"模型符合得不那么好),所以避免使用电感的电路设计将更实用,更经济。

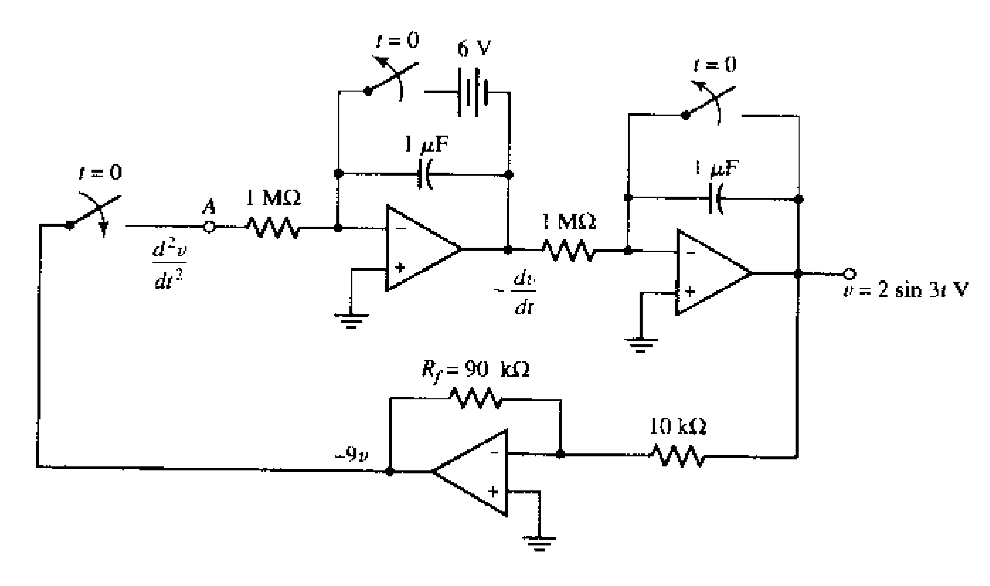


图 9.26 两个积分器和一个反相放大器相连接用以求解方程 $d^2v/dt^2 = -9v$

练习

9.8 对于图 9.26 所示电路,如果其输出表示图 9.27 所示电路的电压 $v(t)$,确定图 9.26 中 R_f 的值和两个初始电压值。

答案:250 kΩ; 400 V; 10 V

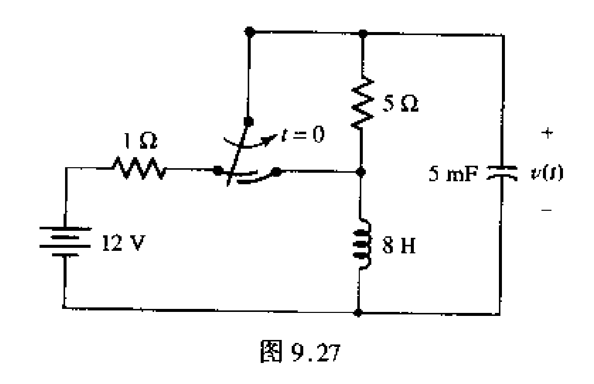


图 9.27

9.9 小结与复习

- 对于含有两个储能元件但不能采用串联或并联方法进行组合的电路，需要用二阶微分方程来描述。
- 串联和并联 RLC 电路可归结为下面三类的一种，取决于 R，L 和 C 值的相对大小：
  过阻尼($\alpha > \omega_0$)
  临界阻尼($\alpha = \omega_0$)
  欠阻尼($\alpha < \omega_0$)
- 对串联 RLC 电路，$\alpha = R/2L$ 和 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$。
- 对并联 RLC 电路，$\alpha = 1/2RC$ 和 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$。
- 过阻尼响应的典型形式为两个指数项的和，其中的一项往往比另一项衰减快，例如 $A_1e^{-t} + A_2e^{-6t}$。
- 临界阻尼响应的典型形式为 $e^{-\alpha t}(A_1t + A_2)$。
- 欠阻尼响应的典型形式为指数衰减的正弦：$e^{-\alpha t}(B_1\cos\omega_d t + B_2\sin\omega_d t)$。
- 在 RLC 电路的暂态过程中，能量在储能元件和电路的阻性部分之间转移，直到消耗完所有能量为止，电路的阻性部分充当消耗初始储存能量的作用。

习题

1. 一个无源并联 RLC 电路，包含一个 ω_0L 为 10 Ω 的电感。如果 $s_1 = -6\ \text{s}^{-1}$，$s_2 = -8\ \text{s}^{-1}$，求 R，L 和 C。
2. 如图 9.28 所示电路，电容电流为 $i_C = 40e^{-100t} - 30e^{-200t}$ mA。如果 $C = 1$ mF，$v(0) = -0.5$ V，求(a)$v(t)$；(b)$i_R(t)$；(c)$i(t)$。
3. 某个并联 RLC 电路的固有谐振频率为 $\omega_0 = 70.71 \times 10^{12}$ rad/s，并且已知电感 $L = 2$ pH。(a)计算 C；(b)确定电阻 R 的值，使得指数阻尼系数为 5 Gs^{-1}；(c)确定电路的奈培频率；(d)计算 s_1 和 s_2；(e)计算电路的阻尼比率。
4. 验证如果 $L = 4R^2C$，则方程 $v(t) = e^{-\alpha t}(A_1t + A_2)$ 是方程(9.4)的解。如果 $v(0) = 16$ V，$dv/dt|_{t=0} = 4$，求 A_1 和 A_2。
5. 用一根长 5 m 的 18 AWG 实芯铜导线代替练习 9.1 中的电阻。(a)计算新电路的谐振频率；(b)计算新电路的奈培频率；(c)计算阻尼比率改变的百分比。

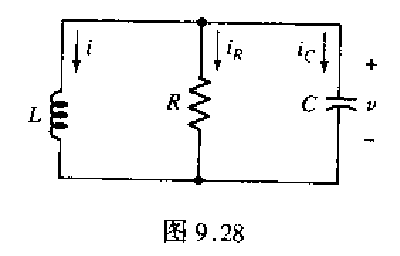


图 9.28

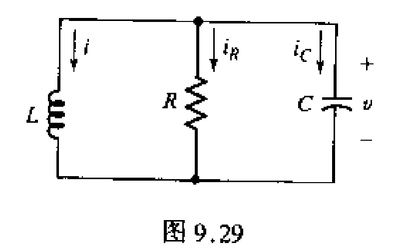


图 9.29

6. 在图 9.29 所示电路中，设 $L = 5$ H，$R = 8\ \Omega$，$C = 12.5$ mF，$v(0^+) = 40$ V。(a)，如果 $i(0^+) = 8$ A，求 $v(t)$；(b)如果 $i_C(0^+) = 8$ A，求 $i(t)$。
7. 参看图 9.29 所示电路，设 $i(0) = 40$ A 和 $v(0) = 40$ V。如果 L = 12.5 mH，$R = 0.1\ \Omega$，$C = 0.2$ F。(a)求 $v(t)$和(b)画出 $0 < t < 0.3$ s 时 i 的草图。
8. 如图 9.30 所示电路，求出 $i_L(t)$的表达式。
9. 求图 9.31 中 $t \geq 0$ 时 $i_L(t)$的表达式。

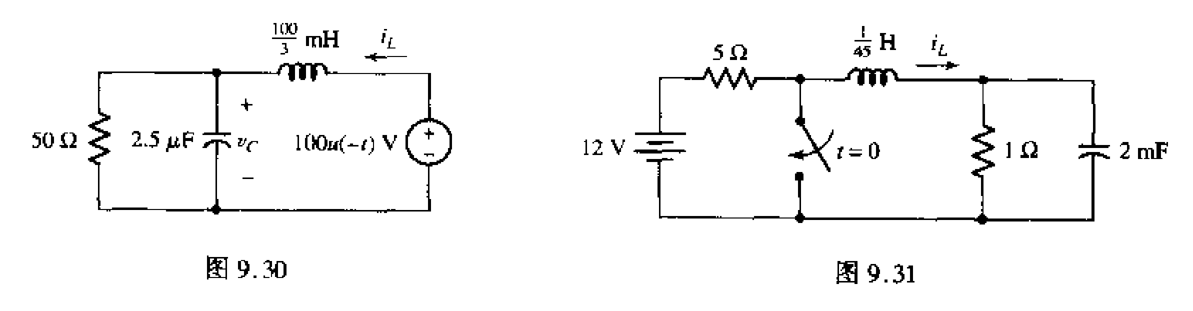


图 9.30　　　　图 9.31

10. 图 9.32 所示电路已处在该状态很长的时间，在 $t = 0$ 开关闭合后，求(a) $v(t)$；(b) $i(t)$；(c) $v(t)$的下降时间。
11. 如图 9.33 所示电路，电感的大小为 1 250 mH，如果已知电容初始存储能量为 390 J，电感初始存储能量为零，求 $v(t)$。
12. 参看图 9.33 所示电路，(a) L 为多大时，电路的暂态响应形式为 $v = Ae^{-4t} + Be^{-6t}$？(b)如果 $i_R(0^+) = 10$ A 和 $i_C(0^+) = 15$ A，求 A 和 B。

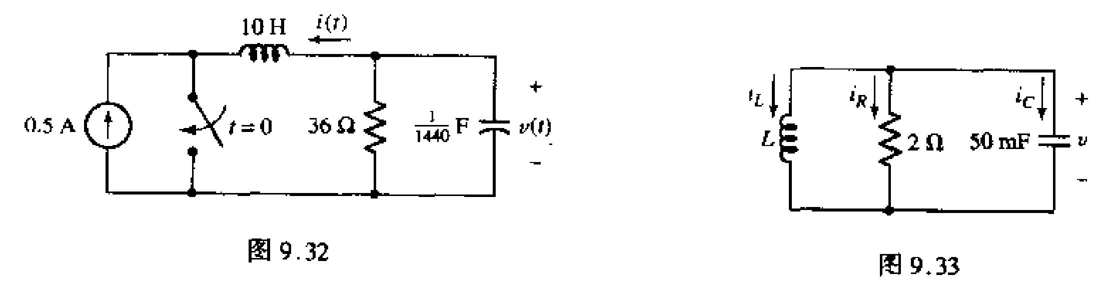


图 9.32　　　　图 9.33

13. 图 9.34 所示电路中的开关已打开很长的时间，求(a) $v_C(0^+)$；(b) $i_C(0^+)$；(c) $v_C(t)$；(d)画出 $v_C(t)$的图形；(e)如果 $v_C(t) = 0$，确定 t；(f)求电路的下降时间。
14. 图 9.35 所示电路中的开关在 $t = 0$ 前已闭合很长的时间，(a)求 $i_A(0^-)$；(b)求 $i_A(0^+)$；(c)求 $v_C(0^-)$；(d)求 $t > 0$ 时的与 L 和 C 并联的等效电阻；(e)求 $i_A(t)$。

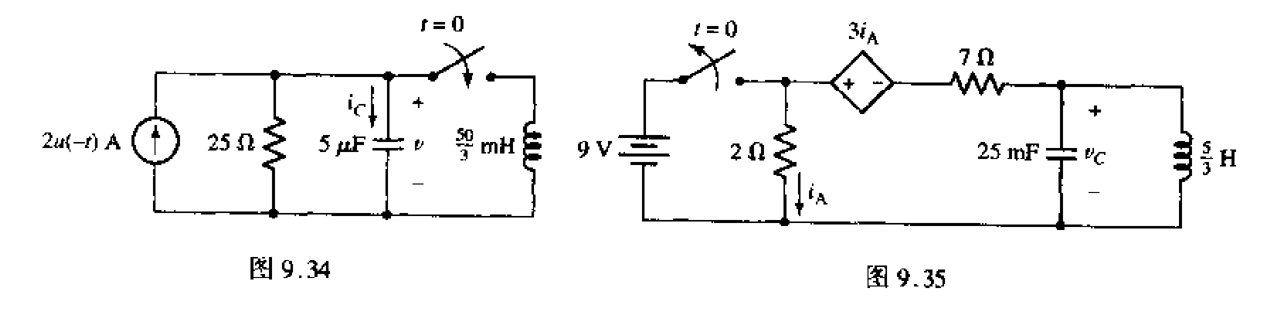


图 9.34　　　　图 9.35

15. 两个一角硬币用温度为 80 K 的 1 mm 厚的冰层隔开。具有电感为 4 μH 的一个钇钡氧化铜超导线圈(电阻为零)不小心从实验室工作台上被风吹落,其两端恰好分别与两枚硬币相触。这里的冰层含有杂质离子,这使得它导电。需要多大的冰层使这个奇特结构的电路表现为一个过阻尼的并联 *RLC* 电路?
16. (a)图 9.30 所示电路需要用什么样的新阻值才能达到临界阻尼? (b)使用这个新电阻值,求 $t>0$ 时 $v_C(t)$的表达式。
17. 改变图 9.31 所示电路中电感的值,直到电路达到临界阻尼。(a)这个新电感的值为多大? (b)求 $t=5$ ms 的 i_L;(c)求出下降时间。
18. 在图 9.29 中的电路,设 $v(0)=-400$ V,$i(0)=0.1$ A。如果 $L=5$ mH,$C=10$ nF,电路处于临界阻尼:(a)求 R;(b)求$|i|_{max}$;(c)求 i_{max}。
19. 在习题 15 描述的情况下,冰层必须具有多大的电阻以得到一个临界阻尼的电路。
20. 某个并联 *RLC* 电路的$\alpha=1\ \text{ms}^{-1}$,$R=1$ MΩ,已知其处于临界阻尼状态。假定电感的值可以用表达式 $L=\mu N^2 A/s$ 计算,其中 $\mu=4\pi\times10^{-7}$ H/m,N 为线圈的匝数,A 为线圈的横截面积,以及 s 为整个线圈的轴向长度。电感的横截面积为 1 cm²,每厘米的线圈匝数为 50,线圈由一种新发现的元素 gluonium 构成,该元素直到 100 °F 仍保持超导状态。问该线圈有多长?
21. 如图 9.36 所示电路,求 $t>0$ 时 $i_C(t)$的表达式。
22. 对图 9.37 所示电路,求(a) $i_L(0^+)$;(b) $v_C(0^+)$;(c) $di_L/dt|_{t=0^+}$;(d) $dv_C/dt|_{t=0^-}$;(e)$v_C(t)$;(f)画出 $-0.1<t<2$ s 时 $v_C(t)$的图形。

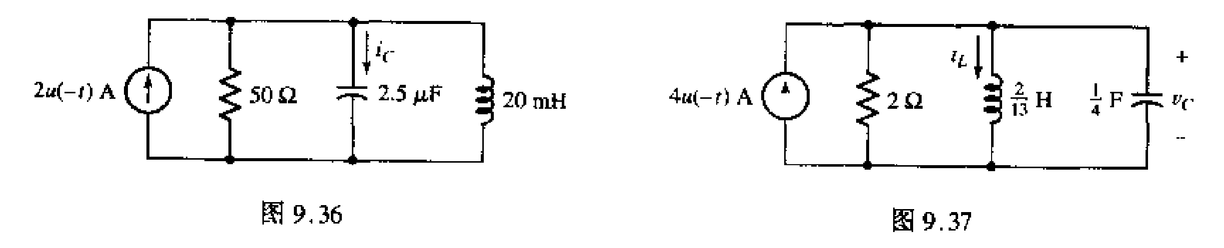


图 9.36 图 9.37

23. 图 9.38 所示电路,其中的开关已打开了很长的时间,在 $t=0$ 时开关闭合。求 $t>0$ 时的(a)$v_C(t)$;(b)$i_{SW}(t)$。

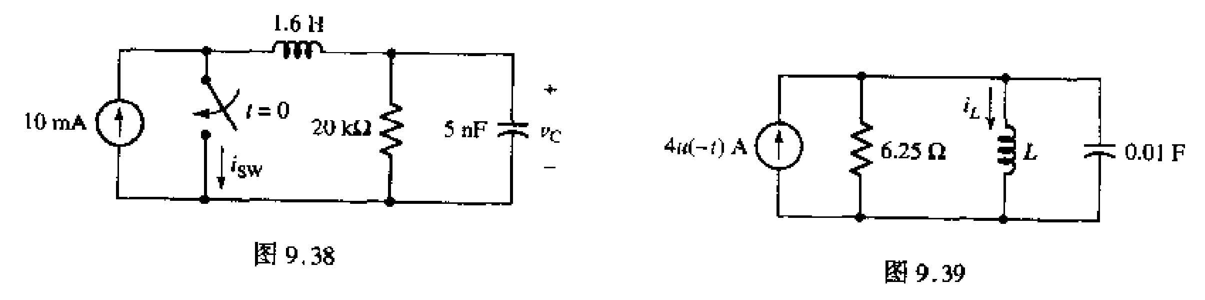


图 9.38 图 9.39

24. 设图 9.39 所示电路中 $\omega_d=6$ rad/s。(a)求 L;(b)求 $i_L(t)$的表达式;(c)画出 $-0.1<t<0.6$ s 时 $i_L(t)$的曲线。
25. 对图 9.40 所示电路,求 $t>0$ 时 $i_1(t)$的表达式。
26. (a)对图 9.41 所示电路,求 $t>0$ 时 $v(t)$的表达式;(b)快速画出在时间区间 $0<t<0.1$ s$v(t)$的曲线。

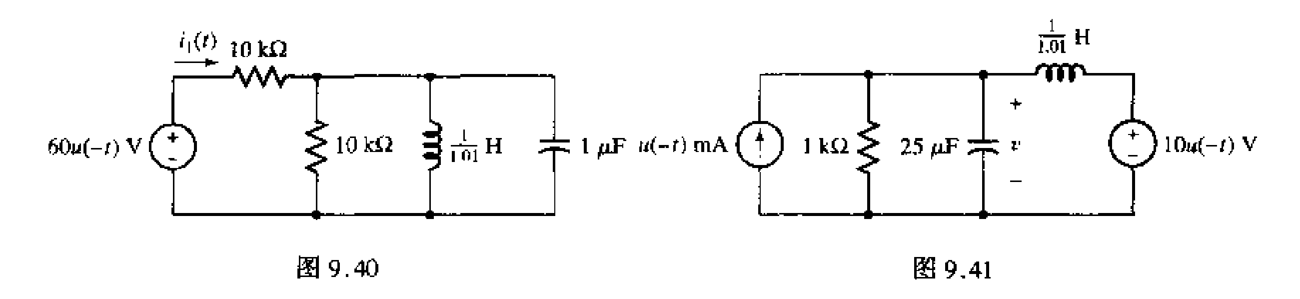


图 9.40　　　　图 9.41

27. 已知图 9.8 所示电路[$L = 7$ H, $C = \frac{1}{42}$ F, $i(0) = 10$ A, $v(0) = 0$]处于欠阻尼状态，确定 R 的值使得下降时间 t_s 为最小，并求此时的 t_s。
28. 需要以多大的电阻来替代图 9.34 所示电路中的 25 Ω 电阻，如果需要 $v(t)$ 为欠阻尼响应？将你求出的电阻乘以 1 000，并画出响应。用 PSpice 确定下降时间，并给出正确标注好的原理图。
29. (a)用PSpice建模图 9.37 所示的电路，移去 $4u(-t)$A 电流源，并通过设定合适的电感和电容初始条件得到一个等效的无源电路，提交一个正确标注好的原理图；(b)用Probe画出电流 $i_L(t)$，并与手算得到的解相比较。用Probe求出下降时间。
30. (a)将图 9.37 中的 2 Ω 电阻替换为 5 Ω 电阻，求出 $i_L(t)$的表达式，并求出 $t = 2.5$ s 时的解；(b)将图 9.37 中的 2 Ω 电阻替换为 0.5 Ω 电阻，求出 $i_L(t)$的表达式，并求出 $t =$ 250 ms 时的解；(c)仿真(a)和(b)中的电路，并在同一张图中画出各电路中的电感电流。同时提交一份标注好的原理图。
31. 如图 9.42 所示电路，求 $t > 0$ 时 $i_L(t)$的表达式。
32. 如图 9.43 所示电路，求 $t = 40$ ms 时 v_C，v_R 和 v_L 的值。

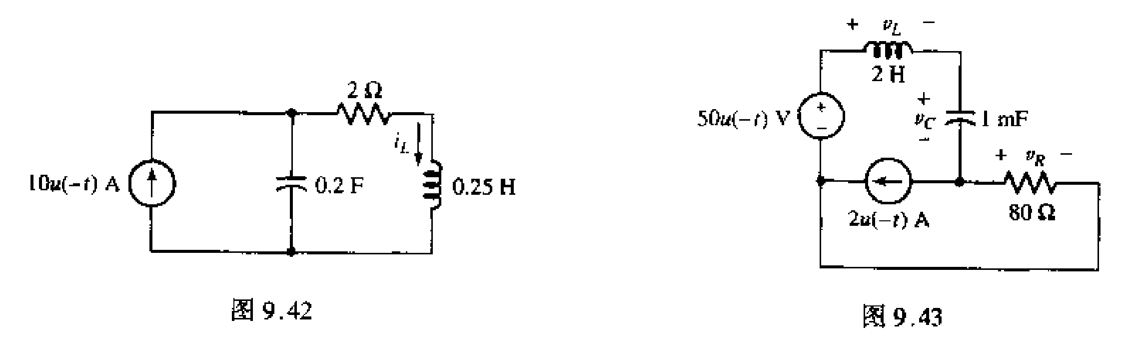


图 9.42　　　　图 9.43

33. 写出习题 8 的对偶问题，包括图 9.30 所示电路的对偶电路，并求解该对偶问题。
34. 图 9.15(a)电路中，设 $R = 300$ Ω 和 $C = 1$ μF，以及电路处于临界阻尼状态。如果 $v_C(0) = -10$ V；$i(0) = -150$ mA，求(a)$v_C(t)$；(b)$|v_C|_{max}$；(c)$v_{C,max}$。
35. 如图 9.44 所示电路，对 $t > 0$，求(a)$i_L(t)$；(b)$v_C(t)$的表达式。

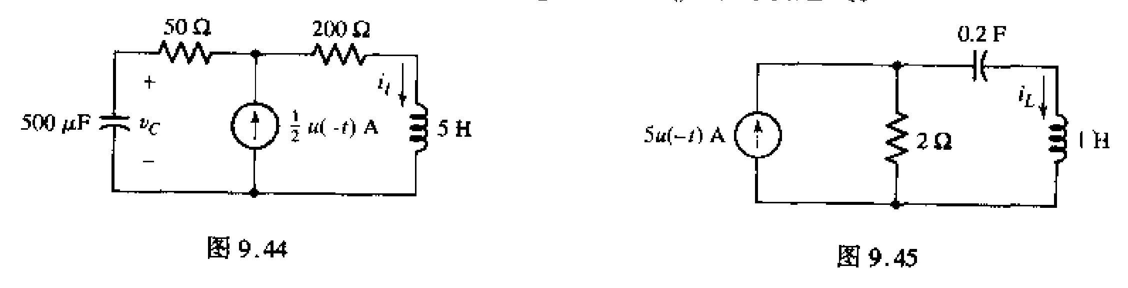


图 9.44　　　　图 9.45

36. (a)如图9.45所示电路,求 $t>0$ 时 $i_L(t)$ 的表达式;(b)求 $|i_L|_{max}$ 和 $i_{L,max}$。
37. 图9.46所示电路中的开关已闭合了很长的时间,$t=0$ 时刻开关打开,求在500 mH电感上产生的电压的最大幅度,并用PSpice验证你的答案。
38. 如图9.47所示电路,求 $t=2$ s时储存在电感上的能量,并用PSpice验证你的答案。

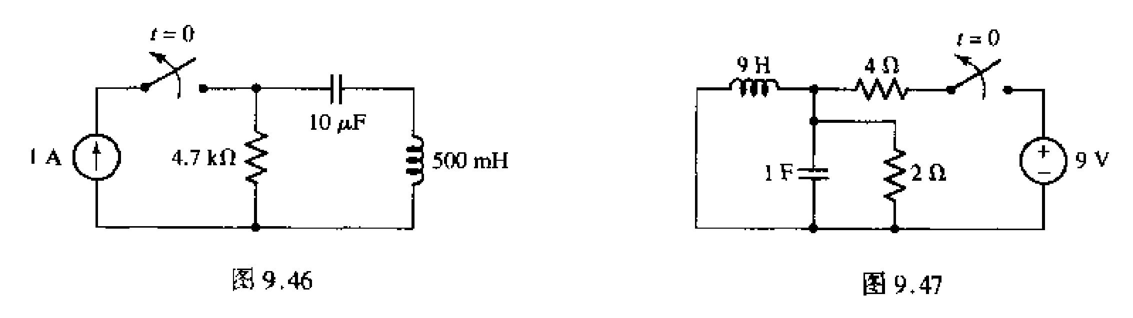


图9.46　　　　图9.47

39. 如图9.47所示电路,需要将电路中的2 Ω电阻替换成阻值为多大的电阻才能够使得电路达到临界阻尼? 计算 $t=100$ ms时储存在电感的能量。
40. 一个制作精良的电容器被连接到一个12 V的电池上,在电池被放回雪地汽车时已经充足电,电容被放在位于加拿大北部的一个无线电收发室的地板上。在一次轻微地震中,一个旧的电话机软线从书架上跌落到地板上,其中的一端恰与电容的一端接触。该电话机软线具有14 mΩ的电阻和5 μH的电感,电容初始储存能量为144 mJ。(a)在地震开始前的瞬间电容电压为多大? (b)在电话机软线掉到汽车地板上与电容接触1s后电容电压为多大? (c)一只浸了水的北极熊为寻找食物而闯进这个收发室,并且碰巧一只手掌放在电话器软线的未连接的一端,而另一只手掌放在电容未连接的一端,北极熊的肌肉抽搐了18 μs,然后怒吼着跑出了房间。如果熊抽搐得这么厉害时需要100 mA的电流,那么浸湿的熊皮电阻为多大(提示:北极熊没有触电而死是难于置信的,如果你是一只北极熊,并且看到了这个习题,请不要在家里进行类似的尝试)?
41. 将图9.42所示电路中的电源替换成 $10u(t)$ A,求 $i_L(t)$ 的表达式。
42. (a)求图9.48所示电路中 $i_L(t)$ 的表达式。(b) $t=0$ 之后,在什么时刻使得 $i_L(t)=0$?
43. 将图9.36所示的电源替换成 $i_s=2[1+u(t)]$ A,求 $t>0$ 时 $i_C(t)$ 的表达式。
44. 将图9.44所示的电源替换成 $i_s=0.5[1-2u(t)]$ A,求 $i_L(t)$ 的表达式。
45. 图9.49所示电路中的开关已闭合很长的时间,在 $t=0$ 时刻打开,求 $t>0$ 时 $v_C(t)$ 的表达式。

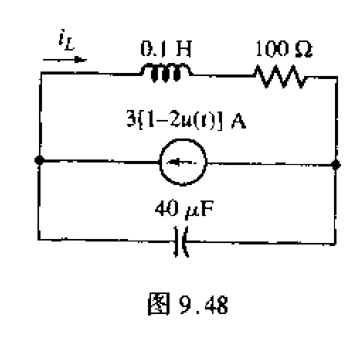


图9.48

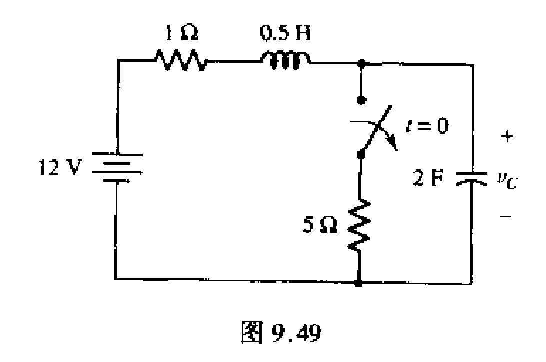


图9.49

46. (a)如图 9.50 所示电路,求 $t>0$ 时 $v_C(t)$ 的表达式;(b)画出 $v_C(t)$ 随 t 变化的曲线,设时间区间为 $-0.1<t<2$ ms。

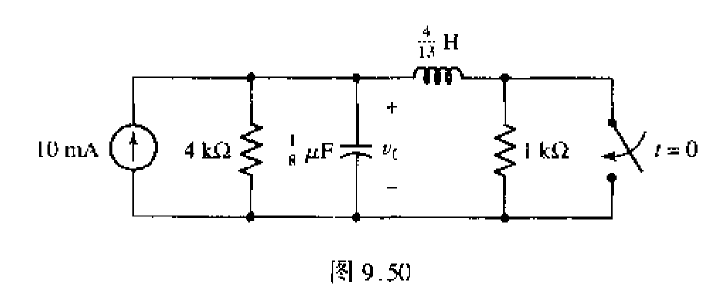


图 9.50

47. 如图 9.51 所示电路,如果 $v_s(t)$ 等于(a)$10u(-t)$ V;(b)$10u(t)$ V,求 $t>0$ 时 $i_s(t)$ 的表达式。

48. 如图 9.52 所示电路,如果 $v_s(t)$ 等于(a)$10u(-t)$ V;(b)$10u(t)$ V,求 $t>0$ 时 $i_R(t)$ 的表达式。

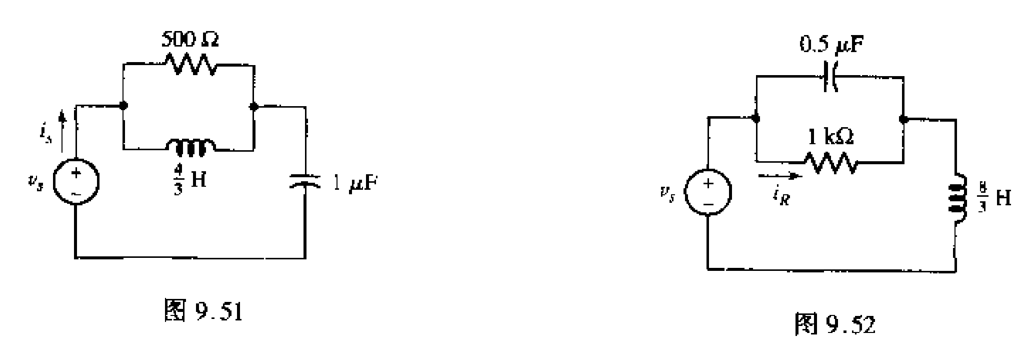


图 9.51　　图 9.52

49. 如图 9.53 所示电路中的电流源在 $t=0$ 时刻突然从 15 A 增大到 22 A,求在下面时刻的电压 v_s:(a)$t=0^-$;(b)$t=0^+$;(c)$t=\infty$;(d)$t=3.4$ s,并用恰当的PSpice仿真验证你的答案。

50. 将图 9.53 所示电路中的 2 Ω 电阻替换为 3 H 电感,如果在 $t=0$ 时刻电流源从 15 A 增大到 22 A,确定 $t=200$ ms 时储存在电容的能量。用PSpice验证你的答案。

51. 5 mH 电感与 25 μF 电容,20 Ω 电阻以及电压源 $v_s(t)$ 串联。该电压源在 $t=0$ 之前为零,在 $t=0$ 时刻跳变到 75 V,然后在 $t=1$ ms 又变为零,又在 $t=2$ ms 跳变到 75 V,并随后周期重复该过程。求在下面时刻的电源电流:(a)$t=0^-$;(b)$t=0^+$;(c)$t=1$ ms;(d)$t=2$ ms。

52. 图 9.53 所示电路中的电流源在 $t=0$ 时刻突然从 15 A 降到 0 A,然后在 $t=1$ s 增长到 3 A。画出 $v_s(t)$,并用PSpice验证你的答案。

53. 一个 12 V 的电池放在位于太平洋的某个荒岛的小屋中,其正极连接到一个 314.2 pF 的电容的一端,而该电容与一个 869.1 μH 的电感串联。在日本的Bonin岛上的地震触发了一次海啸,海啸冲入小屋,海水洒到一块布上,而该布将电感 - 电容组合的另一端与电池的负极连接起来,这样构成了一个串联 *RLC* 电路。由此产生的振荡被附近一艘船上正在监测 290.5 kHz(1.825 Mrad/s)频率无线电导航信号的设备接收到。问潮湿的布的等效电阻是多大?

54. 设计一个电路产生衰减的正弦脉冲，峰值电压为 5 V，并且至少有另外三个电压幅度大于 1 V 的峰值。用PSpice验证你的设计。

55. 求出图 9.54 所示电路中 $t = 1$ ms 时电容两端的电压 $v_C(t)$。用PSpice验证你的答案。

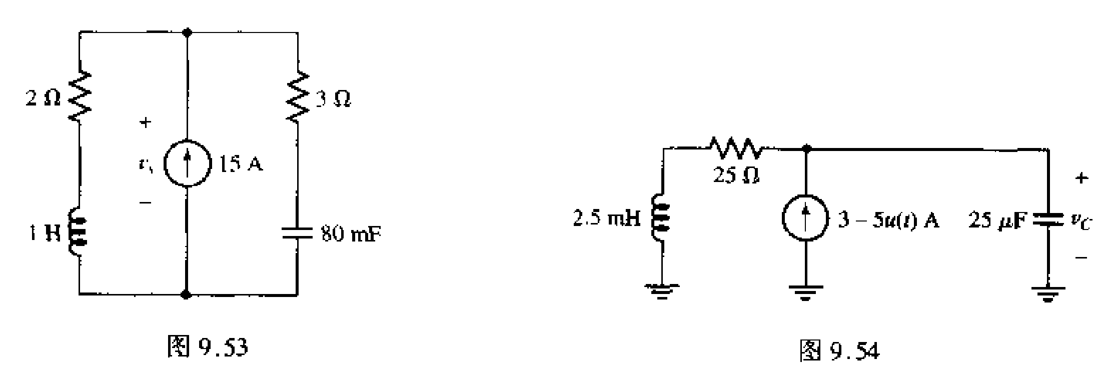


图 9.53

图 9.54

56. 设计一个运放电路来对图 9.55 所示 LC 电路的电压响应建模。用 μA741 运放来仿真图 9.55 所示的电路以及你设计的电路来验证你的设计。

57. 某无源电路由一个 1 kΩ 电阻和一个 3.3 mF 电容组成，其中电容两端的初始电压为 1.2 V。(a) 列出 $t > 0$ 时电容两端电压 v 的微分方程；(b)设计一个运放电路，其输出为 $v(t)$。

58. 参看图 9.56，设计一个运放电路，当 $t > 0$ 时其输出为 $i(t)$。

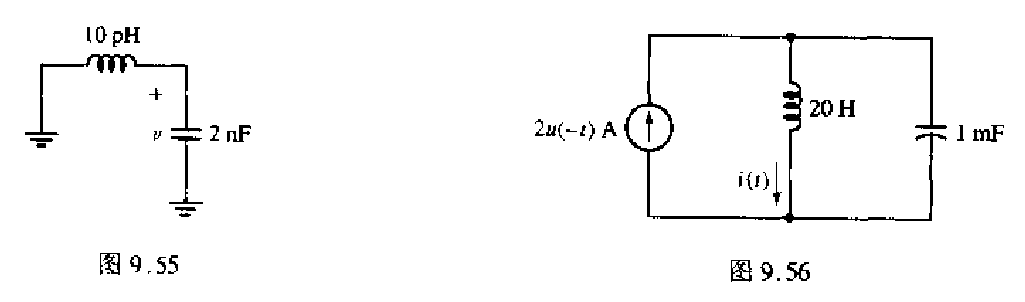


图 9.55

图 9.56

59. 一个 20 Ω 电阻和一个 5 H 电感组成无源电路，如果电感的初始电流为 2 A。(a)列出 $t > 0$ 时电感电流 i 的微分方程；(b)设计一个运放积分器，其输出为 $i(t)$，取 $R_1 = 1$ MΩ, $C_f = 1$ μF。

60. 将图 9.55 所示电路中的电容替换为 20 H 电感与 5 μF 电容的并联组合。设计一个运放电路，使得 $t > 0$ 时其输出为 $i(t)$。在PSpice中，使用 LM111 运放来仿真电容 − 电感电路以及你设计的运放电路以验证你的设计。

第10章　正弦稳态分析

本章要点：

- 熟悉正弦函数的性质
- 掌握阻抗和导纳的概念
- 使用相量来确定正弦激励下电路的受迫响应
- 掌握相量形式的网孔分析、节点分析、叠加原理、电源变换和戴维南定理的应用

10.1　引言

线性电路的完全响应由两部分组成：自由响应和受迫响应。自由响应是电路在电路条件突然发生改变时产生的暂态响应，受迫响应则是电路在接入任意独立电源时产生的长期存在的稳态响应。到目前为止，都是考虑直流电源激励产生的受迫响应，而另一种很常见的激励函数为正弦波，例如可以用正弦波来描述市电电压，以及连接到家庭居住区与工业区的电力线上的高压电压。

在本章中，我们不关心电路的暂态响应，集中考虑电路（例如电视机、烤面包机或者电力配电网络等）对正弦电压或正弦电流产生的稳态响应，并采用一种可以将积分微分方程转化为代数方程的有效分析方法来分析这样的电路。

10.2　正弦波特性

考虑一个正弦变化的电压：

$$v(t) = V_m \sin \omega t$$

其波形如图10.1(a)和图10.1(b)所示。正弦波的幅度为 V_m，幅角为 ωt，弧度频率或角频率为 ω。图10.1(a)为 $V_m \sin \omega t$ 随幅角 ωt 变化的曲线，可以明显看出，正弦波是周期性的，它以 2π 弧度周期重复，因此它的周期为 2π 弧度。图10.1(b)为 $V_m \sin \omega t$ 随时间 t 变化的曲线，周期为 T。周期为 T 的正弦曲线必然每秒出现 $1/T$ 个周期，即它的频率 f 为 $1/T$ 赫兹(Hertz)，简写为Hz。因此：

$$f = \frac{1}{T}$$

又由于：

$$\omega T = 2\pi$$

于是得到频率与角频率的关系为：

$$\omega = 2\pi f$$

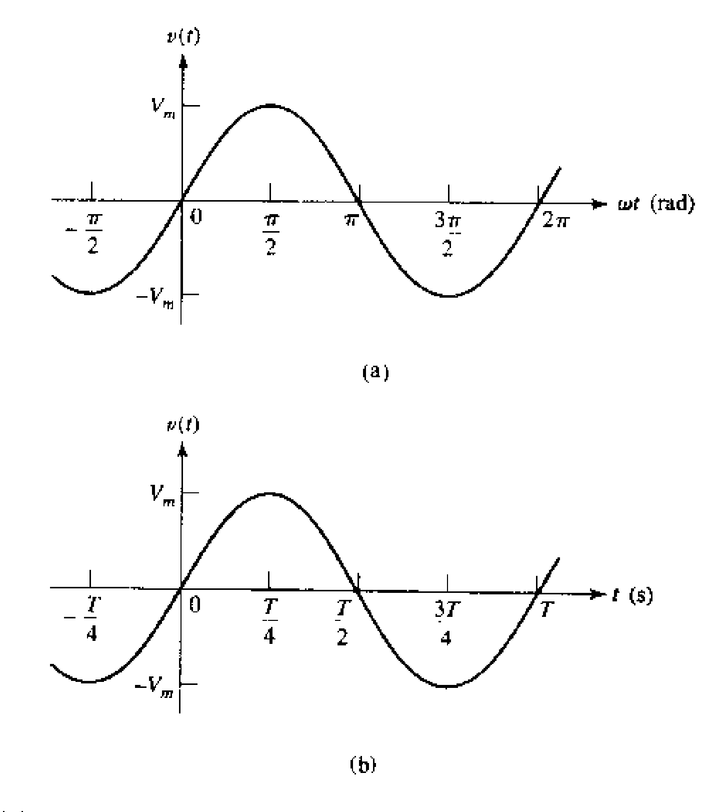


图 10.1　正弦波 $v(t)=V_m \sin \omega t$ 随(a) ωt 和(b)随 t 变化的曲线

10.2.1 滞后与超前

更一般的正弦形式为：

$$v(t)=V_m \sin(\omega t+\theta) \tag{10.1}$$

这时幅角还包含一个相角 θ。图 10.2 画出了方程(10.1)随 ωt 变化的曲线，其中相角表示从初始的正弦曲线(图中虚线所示)往左移动(即在时间上超前)的弧度。因为曲线 $V_m\sin(\omega t+\theta)$ 上的点比曲线 $V_m\sin\omega t$ 相应的点早发生 θ 弧度，或早 θ/ω 秒，所以称 $V_m \sin(\omega t+\theta)$ 比 $V_m \sin \omega t$ 超前 θ 弧度。因此，说 $V_m \sin \omega t$ 比 $V_m \sin(\omega t+\theta)$ 滞后 θ 弧度，比 $V_m \sin(\omega t+\theta)$ 超前 $-\theta$ 弧度，或比 $V_m \sin(\omega t-\theta)$ 超前 θ 弧度都是正确的。

在超前和滞后两种情况下，称两个正弦曲线异相，反之，如果相角相等，则称两个正弦曲线同相。

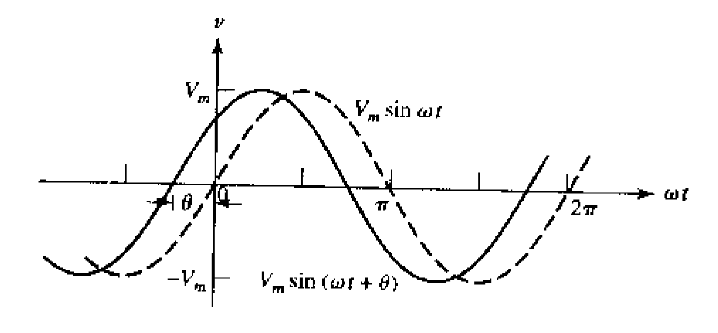


图 10.2　正弦 $V_m \sin(\omega t+\theta)$比 $V_m \sin \omega t$ 超前 θ 弧度

在电子工程中,相角通常以角度而不是弧度给出。为了避免混淆,以后总是使用角度的符号。因此,不写成:

$$v = 100\sin\left(2\pi 1\,000t - \frac{\pi}{6}\right)$$

而通常写成:

$$v = 100\sin(2\pi 1\,000t - 30°)$$

记住,将弧度转化为角度时,只需将弧度乘以 $180/\pi$ 即可。

在计算特定时刻的表达式时,例如对于 $t = 10^{-4}$ s,$2\pi 1\,000t$ 等于 0.2π 弧度,必须将它表示为 36°后,才能用它减去 30°。

在比较两个正弦的相角之前:

1. 必须同时写成正弦的形式,或者同时写成余弦的形式。
2. 必须同时写成正幅度的形式。
3. 必须具有相同的频率。

10.2.2 将正弦化为余弦

从本质上说,正弦和余弦是同一个函数,但它们具有 90°的相位差,即 $\sin\omega t = \cos(\omega t - 90°)$。任意正弦的幅角加上或者减去 360°的整数倍均不改变其函数值,因此,可以写出如下的式子:

$$\begin{aligned} v_1 &= V_{m_1}\cos(5t + 10°) \\ &= V_{m_1}\sin(5t + 90° + 10°) \\ &= V_{m_1}\sin(5t + 100°) \end{aligned}$$

它比:

$$v_2 = V_{m_2}\sin(5t - 30°)$$

超前 130°,或者说 v_1 比 v_2 滞后 230°,这也是正确的,因此 v_1 还可以写成:

$$v_1 = V_{m_1}\sin(5t - 260°)$$

这里假定 V_{m_1} 和 V_{m_2} 均为正数。图 10.3 画出了这两个函数的一种图形表示方法,要注意的是,两个正弦函数的频率必须相同(在本例中均为 5 rad/s),否则将它们进行比较将失去意义。通常情况下,两个正弦函数的相差应该用小于或等于 180°的角度来表示。

后面将广泛用到超前或者滞后的概念,并且同时从数学上和图形上来区分。

练习

10.1 如果 $v_1 = 120\cos(120\pi t - 40°)$ V,i_1 等于:(a)$2.5\cos(120\pi t + 20°)$ A;(b)$1.4\sin(120\pi t - 70°)$ A;(c)$-0.8\cos(120\pi t - 110°)$ A,求 i_1 滞后 v_1 的相角大小。

10.2 如果 $40\cos(100t - 40°) - 20\sin(100t + 170°) = A\cos 100t + B\sin 100t = C\cos(100t + \phi)$,求 A,B,C 和 ϕ。

答案：10.1：$-60°$；$120°$；$-110°$。10.2：27.2；45.4；52.9；$-59.1°$

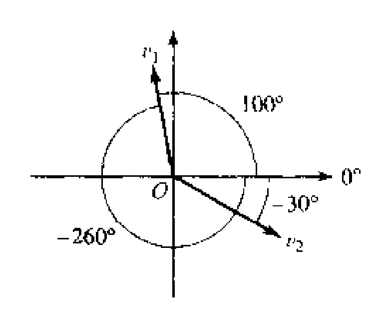


图 10.3　两个正弦函数的图形表示，其中正弦的幅度用相应箭头的长度表示，相角用相对于 x 轴正方向转过的角度表示。在本图中，v_1 比 v_2 超前 $100° + 30° = 130°$。尽管也可以说 v_2 比 v_1 超前 $230°$，但是相差通常用小于或等于 $180°$的角度来表示

10.3　正弦函数激励下的受迫响应

现在已经熟悉了正弦函数的数学特性，下面将正弦激励函数接入简单电路并求电路的受迫响应。首先，写出接入正弦激励后电路的微分方程，微分方程的完全解由两部分组成，即通解（称为自由响应）和特解（称为受迫响应）。本章不关心电路暂时存在的响应即自由响应，只关心那些长期存在的响应即"稳态"响应。

10.3.1　稳态响应

这里，稳态响应这个词用做受迫响应的同义词，对于下面要分析的电路，通常称它们处于"正弦稳态"。可是，很多学生错误地认为，稳态总是与"不随时间变化"相联系的。对于直流激励函数产生的响应，这是正确的，但是对于正弦稳态响应，它显然是随时间变化的。所以，这里的稳态的含义是指暂态或者说自由响应已经消失后所达到的状态。

受迫响应具有激励函数的数学形式，并且它的各阶微分和一次积分形式也具有激励函数的数学形式。这样，就可以得到求解受迫响应的一种方法，即假定它的解由一些函数的和组成，这些函数均含有待定的幅度，通过直接代入微分方程可以确定这些未知幅度。不过下面将要看到，这将是一个繁琐的过程，所以需要寻找另一种更简单的求解方法。

考虑图 10.4 所示串联 RL 电路，正弦电压源电压 $v_s = V_m \cos \omega t$ 已经接入电路很长时间，电路的自由响应已经消失。需要求出受迫（或稳态）响应，它必须满足下面的微分方程：

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V_m \cos \omega t$$

通过沿回路应用 KVL 可以得到上面的方程。注意到，当电流导数为零时，电流必然具有 $i \propto \cos \omega t$的形式。类似地，当电流为零时，电流导数必然与 $\cos \omega t$ 成正比，这表明电流具有正弦 $\sin \omega t$ 的形式。因此，可以假设受迫响应具有以下的一般形式：

$$i(t) = I_1 \cos \omega t + I_2 \sin \omega t$$

其中 I_1 和 I_2 为实常量，由 V_m，R，L 和 ω 确定，上式不包含常数项，也不包含指数函数。将这个假定的解代入微分方程，得到：

$$L(-I_1\omega\sin\omega t + I_2\omega\cos\omega t) + R(I_1\cos\omega t + I_2\sin\omega t) = V_m\cos\omega t$$

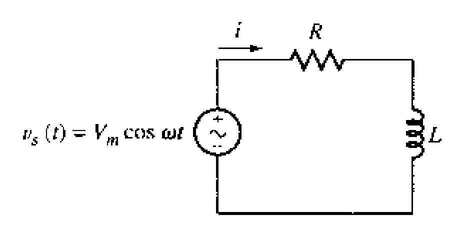


图 10.4　求该串联 *RL* 电路的受迫响应

再对 sin 和 cos 合并同类项，得到：

$$(-LI_1\omega + RI_2)\sin\omega t + (LI_2\omega + RI_1 - V_m)\cos\omega t = 0$$

这个等式必须对所有时间 t 成立，而这只有当 $\cos\omega t$ 和 $\sin\omega t$ 前的乘积因子均为零才可能成立，所以：

$$-\omega LI_1 + RI_2 = 0 \quad 和 \quad \omega LI_2 + RI_1 - V_m = 0$$

联立求解，得到 I_1 和 I_2 为：

$$I_1 = \frac{RV_m}{R^2+\omega^2L^2}, \quad I_2 = \frac{\omega LV_m}{R^2+\omega^2L^2}$$

从而得到受迫响应为：

$$i(t) = \frac{RV_m}{R^2+\omega^2L^2}\cos\omega t + \frac{\omega LV_m}{R^2+\omega^2L^2}\sin\omega t \tag{10.2}$$

10.3.2 更简洁直观的方法

上面已得到了受迫响应的表达式，不过这个表达式有些复杂，可以将响应表示成包含相角的单个正弦函数或者余弦函数的形式，这样更直观一些。这里将其表示成余弦函数的形式：

$$i(t) = A\cos(\omega t - \theta) \tag{10.3}$$

至少有两种求 A 和 θ 的方法，其中可以将方程(10.3)直接代入原方程而得到，也可以令方程(10.2)和方程(10.3)这两个方程相等而得到。这里采用后一种方法，展开函数 $\cos(\omega t - \theta)$，可得：

$$A\cos\theta\cos\omega t + A\sin\theta\sin\omega t = \frac{RV_m}{R^2+\omega^2L^2}\cos\omega t + \frac{\omega LV_m}{R^2+\omega^2L^2}\sin\omega t$$

于是，比较 $\cos\omega t$ 和 $\sin\omega t$ 的系数，得到：

$$A\cos\theta = \frac{RV_m}{R^2+\omega^2L^2} \quad 和 \quad A\sin\theta = \frac{\omega LV_m}{R^2+\omega^2L^2}$$

为了求出 A 和 θ，用前一个方程除以后一个方程得：

$$\frac{A}{A}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = \frac{\omega L}{R}$$

再将两个方程平方并相加，得：

$$A^2\cos^2\theta + A^2\sin^2\theta = A^2 = \frac{R^2V_m^2}{(R^2+\omega^2L^2)^2} + \frac{\omega^2L^2V_m^2}{(R^2+\omega^2L^2)^2} = \frac{V_m^2}{R^2+\omega^2L^2}$$

因此：

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

和

$$A = \frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$$

于是，得到受迫响应的另一种形式为：

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right) \tag{10.4}$$

可以看到，响应的幅度与激励函数的幅度成正比。事实上，如果不是这样，那么将不满足线性性质。另外，响应的幅度还随 R，L 或 ω 的增大而减小，但并不成比例。还可以看到，电流比接入电压滞后 $\tan^{-1}(\omega L/R)$，它在 0 和 90°之间。当 $\omega=0$ 或者 $L=0$ 时，电流必然与电压同相，因为前者对应于直流电压的情形，而后者对应于电阻电路的情形。这个结论与以前的结果一致。当 $R=0$ 时，电流滞后电压 90°。于是，如果电感遵循无源符号规则，那么电流恰好滞后电压 90°。类似地[1]，可以得到流过电容的电流超前电容两端的电压 90°。

电流和电压之间的相位差决定于 ωL 与 R 的比值。称 ωL 为电感的感抗，单位为欧姆，它代表电感对流过的正弦电流的抵抗能力。

下面来看如何将上面的一般分析结果应用到简单串联电路以外的其他电路。

例题 10.1 如图 10.5(a)所示电路，求电流 i_L

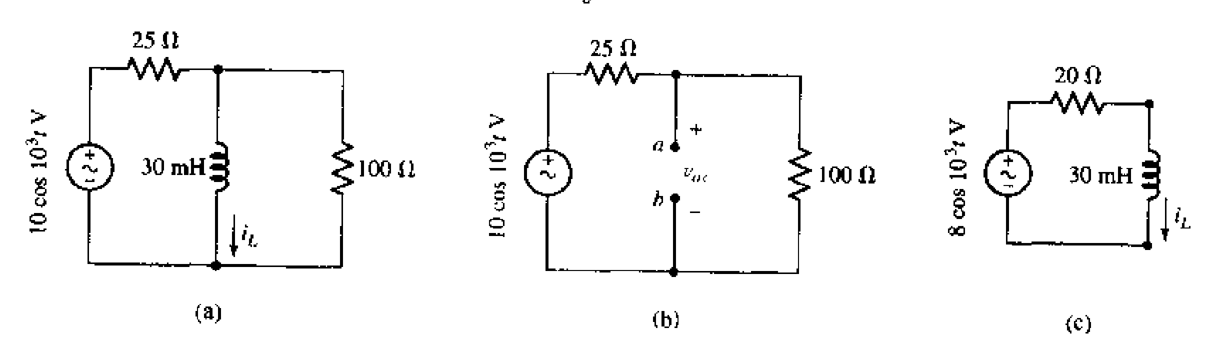


图 10.5 (a)例题 10.1 的电路，求 i_L；(b)求端点 a 和 b 之间的戴维南等效；(c)简化后的电路

尽管这个电路只包含一个正弦电压源和一个电感，但它包含两个电阻，所以它并不是单回路电路。为了应用前面分析得到的结果，需要求出从端点 a 和 b 看过去的戴维南等效电路，如图 10.5(b)所示。

---

[1] 以前用符号 E(代表电动势 electromotive force)来表示电压，于是那时每个学生都知道一句话"ELI the ICE man"，用它来帮助记忆在电感电路中电压超前电流(ELI)，而在电容电路中电流超前电压(ICE)。现在改用 V 来表示电压，所以就不能用同样的话来记忆了(在"ELI"和"ICE"中，E 表示电压，I 表示电流，L 表示电感，C 表示电容)。

开路电压 v_{oc} 为：

$$v_{oc} = (10\cos 10^3 t)\frac{100}{100+25} = 8\cos 10^3 t\ \text{V}$$

因为这里没有受控源，所以可以通过求出移去独立源后得到的无源网络的电阻而得到 R_{th}，有 $R_{th} = (25\times 100)/(25+100) = 20\ \Omega$。

现在已经得到了一个简单串联 RL 电路，其中 $L = 30$ mH，$R_{th} = 20\ \Omega$，电源电压为 $8\cos 10^3 t$ V，如图 10.5(c)所示。这样，根据一般 RL 串联电路得到的式(10.4)可得：

$$\begin{aligned} i_L &= \frac{8}{\sqrt{20^2 + (10^3\times 30\times 10^{-3})^2}}\cos\left(10^3 t - \tan^{-1}\frac{30}{20}\right) \\ &= 222\cos(10^3 t - 56.3°)\ \text{mA} \end{aligned}$$

电压和电流的波形曲线如图 10.6 所示。

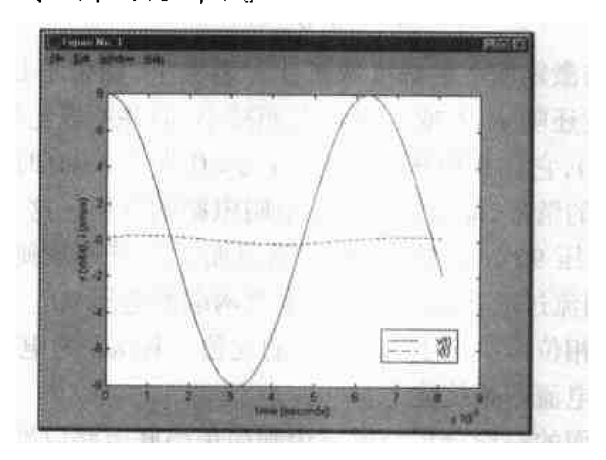


图 10.6 例题 10.1 的电路的电压和电流波形，使用 MATLAB 画出：

```
EDU>> time = linspace(0,8,1 * le-3,1000);
EDU>> v = 8 * cos(le3 * time);
EDU>> i = 0.222 * cos(le3 * time - 56.3 * pi/180);
EDU>> plot(time,v,'- b ',time,i,'- b ');
EDU>> xlabel( 'time(seconds) ');
EDU>> ylabel( 'v(volts),i(amps) ');
EDU>> legend( 'v(t) ','i(t) ',(0);
```

10.3 如图 10.7 所示电路，设 $v_s = 40\cos 8\,000t$ V，利用戴维南定理(这是最简便的方法)，求 $t=0$ 时的(a)i_L；(b)v_L；(c)i_R；(d)i_s。

答案：18.71 mA；15.97 V；5.32 mA；24.0 mA

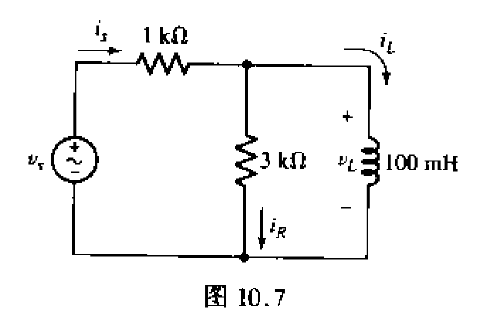


图 10.7

10.4 复激励函数

求解一般的串联 RL 电路的正弦稳态响应并不是一个简单的问题，应该考虑到由于电感的存在所带来的分析上的复杂性。如果串联 RL 电路中的两个元件均为电阻，那么即使是在正弦激励函数的情况下，对它的分析也是非常容易的，因为可以根据欧姆定理，很容易得到所需要的结果。但是对于电感，它的电压－电流关系将不再那么简单，这时需要求解的不是简单的代数方程，而是非齐次微分方程。因此，采用上面例子中介绍的方法来分析含有电感的电路并不实际，所以后面将采用另一种方法来简化分析。后面将看到，采用这种简化的方法将得到电容、电感以及电阻各自的正弦电流和正弦电压之间的一种代数关系，这样，对于任意复杂的电路，均可以列出一组这样的代数方程。虽然这时方程组中的常量和变量均为复数而不是实数，但是通过采用这种方法，任意电路的正弦稳态分析将变得几乎与熟知的电阻电路分析一样简单。

下面来考虑将复激励函数（即激励函数同时具有实部和虚部）接入到一个网络中并分析其响应。这初看起来像是一个让人奇怪的想法，但后面将看到，在正弦稳态分析中，采用复变量来进行分析要比采用实变量简单得多。可以想像复激励函数产生一个这样的复响应，响应的实部由激励函数的实部产生，而虚部由激励函数的虚部产生。这看起来是很合理的，因为很难想像一个实电压会产生一个虚响应，反之亦然。

在图 10.8 中，将下面的正弦电压：

$$V_m\cos(\omega t+\theta) \tag{10.5}$$

接入到一个网络中，这里假定网络只含有无源元件（即不含有受控源），以避免用到叠加原理。这里，需要求出网络中某个支路的电流响应，且式(10.5)所有的量均是实量。

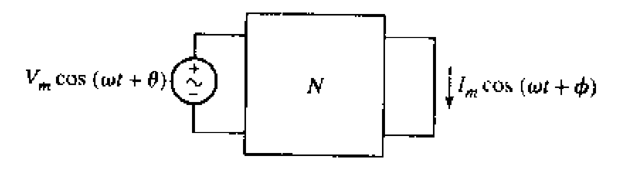


图 10.8 接入正弦激励函数 $V_m\cos(\omega t+\phi)$，产生正弦稳态响应 $I_m\cos(\omega t+\phi)$

可以将该响应表示为一般的余弦函数：

$$I_m\cos(\omega t+\phi) \tag{10.6}$$

在线性电路中，正弦激励总是产生相同频率的正弦受迫响应。

将激励函数的相角移位 90°，即改变定义 $t=0$ 的时刻，于是，激励函数：

$$V_m\cos(\omega t+\theta-90°)=V_m\sin(\omega t+\theta) \tag{10.7}$$

接入到同一个网络时产生的响应为：

$$I_m\cos(\omega t+\phi-90°)=I_m\sin(\omega t+\phi) \tag{10.8}$$

下一步，先不考虑物理可行性，将一个虚激励函数接入到网络中。虽然不能在实验室中做到这一点，但可以在数学中进行。

10.4.1 虚电源产生的响应

要构造一个虚电源非常容易，只需要将式(10.7)乘以虚数运算符 j[①] 即可。考虑接入下面的电源：

$$jV_m \sin(\omega t + \theta) \tag{10.9}$$

那么它产生的响应是什么呢？注意到，根据线性原理，如果将电源加倍，那么得到响应也加倍。如果将激励函数乘以常量 k，那么得到的响应也将乘以同样的倍数。因此，如果取这个常量为 $\sqrt{-1}$，那么这个关系同样成立。所以式(10.9)所示的虚电源产生的响应为：

$$jI_m \sin(\omega t + \phi) \tag{10.10}$$

纯虚电源和它产生的响应如图 10.9 所示。

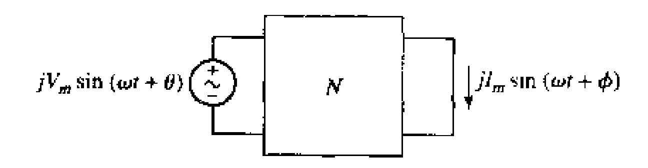


图 10.9 将虚正弦激励函数 $jV_m \sin(\omega t + \phi)$接到图 10.8 所示的网路，将产生虚正弦响应 $jI_m \sin(\omega t + \phi)$

10.4.2 复激励函数的接入

前面已经看到，接入实电源将得到实响应，接入虚电源将得到虚响应。因为考虑的是线性网路，而复激励函数等于实激励函数与虚数激励函数的和，所以可以应用叠加原理来求出复激励函数的响应。

因此，式(10.5)和式(10.9)所示激励函数的和为：

$$V_m \cos(\omega t + \theta) + jV_m \sin(\omega t + \theta) \tag{10.11}$$

产生的响应必然为式(10.6)和式(10.7)所示响应的和：

$$I_m \cos(\omega t + \phi) + jI_m \sin(\omega t + \phi) \tag{10.12}$$

利用欧拉公式，可以将复电源和复响应用更简洁的形式来表示。这时，式(10.11)所示的复电源可以表示为：

$$V_m e^{j(\omega t + \theta)} \tag{10.13}$$

式(10.12)所表示的响应可以表示为：

$$I_m e^{j(\omega t + \phi)} \tag{10.14}$$

图 10.10 画出了上面的复电源和复响应。

附录 E 给出了复数和与复数相关的一些量的定义，并复习了复数的运算，导出了欧拉公式，以及指数形式与极坐标形式之间的关系。

---

① 在电子工程中，采用“j”而不是“i”来表示 $\sqrt{-1}$，以避免与电流的符号相混淆。

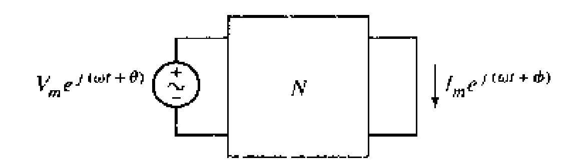


图 10.10　复激励函数 $V_m e^{j(\omega t+\theta)}$ 接入到图 10.8 所示的网络中，将产生复响应 $I_m e^{j(\omega t+\phi)}$

实的、虚的和复的激励函数将分别产生实的、虚的和复的响应，而且，利用欧拉公式和叠加原理，可以将复激励函数看做为一个实激励函数与一个虚激励函数的和。复响应的实部由复激励函数的实部产生，而复响应的虚部由复激励函数的虚部产生。

我们不直接将实激励函数加到网络中来得到所需要求出的实响应，而是通过将实部等于给定实激励函数的复函数接入到网络中去，并希望得到一个复响应，它的实部为所求的实响应。这样做的好处是可以将描述正弦稳态响应的积分微分方程组转化成简单的代数方程组。

10.4.3　将微分方程转化为代数方程

现在以图 10.11 所示的简单 RL 串联电路为例来解释上面的想法。接入的实电源为 $V_m \cos \omega t$，需要求出实响应 $i(t)$。因为：

$$\cos \omega t = \mathrm{Re}\{e^{j\omega t}\}$$

所以与之对应的复电源为：

$$V_m e^{j\omega t}$$

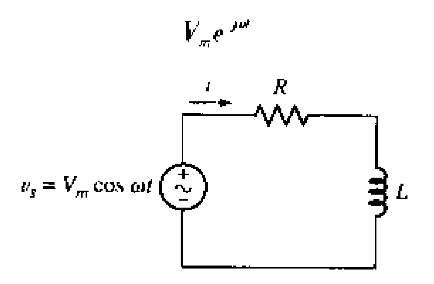


图 10.11　一个处于正弦稳态的简单电路，采用复激励函数对它进行分析

将复响应表示为幅度 I_m 和相角 ϕ 待定的形式：

$$I_m e^{j(\omega t+\phi)}$$

对这个电路，写出其微分方程为：

$$Ri + L\frac{di}{dt} = v_s$$

将 v_s 和 i 的表达式代入上式，有：

$$RI_m e^{j(\omega t+\phi)} + L\frac{d}{dt}(I_m e^{j(\omega t+\phi)}) = V_m e^{j\omega t}$$

求出式中的导数，得到：

$$RI_m e^{j(\omega t+\phi)} + j\omega LI_m e^{j(\omega t+\phi)}) = V_m e^{j\omega t}$$

这时得到一个代数方程。为了求出 I_m 和 ω 的值，将上式的各项分别除以公共因子 $e^{j\omega t}$，得到：

$$RI_me^{j\phi}+j\omega LI_me^{j\phi}=V_m$$

对等式左边提取公因式，有：

$$I_me^{j\phi}(R+j\omega L)=V_m$$

整理得：

$$I_me^{j\phi}=\frac{V_m}{R+j\omega L}$$

再将等式右边表示成指数或者极坐标形式，可以求出 I_m 和 ϕ：

$$I_me^{j\phi}=\frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}e^{j(-\tan^{-1}(\omega L/R))} \tag{10.15}$$

因此：

$$I_m=\frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$$

和

$$\phi=-\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

采用极坐标形式，电流和电压可以写成：

$$I_m\,\underline{/\phi}$$

和

$$V_m/\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\,\underline{/-\tan^{-1}\omega L/R}$$

式(10.15)给出了复响应的表达式，根据它容易得到 I_m 和 ϕ，所以立即可以得到 $i(t)$ 的表达式。不过，还可以采用另一种更为严格的方法来求解，即通过在式(10.15)[①] 两边同时乘以因子 $e^{j\omega t}$，然后取实部得到实响应 $i(t)$。采用上面任意一种方法均可以得到：

$$i(t)=I_m\cos(\omega t+\phi)=\frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos\left(\omega t-\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right)$$

这与前面得到的式(10.4)一致。

例题 10.2 500 Ω 电阻与 95 mH 电感串联，如果流过这两个元件的复电流为 $8e^{j3000t}$，求这个串联组合两端的电压

需要求出复电压，它包括幅度 V_m 和相角 ϕ。因为电压必然具有与电流相同的频率，所以可以写出电压的表达式为：

$$V_me^{j(3000t+\phi)}$$

它等于电阻两端和电感两端的电压的和：

---

① 原文为"式(10.12)"，疑有误——译者注。

$$V_m e^{j(3\,000t+\phi)} = (500)\times 0.008e^{j3\,000t} + (0.095)\times \frac{d(0.008e^{j3\,000t})}{dt}$$

求出式中的导数，得到：

$$V_m e^{j(3\,000t+\phi)} = 4e^{j3\,000t} + j2.28e^{j3\,000t}$$

消去公因子 $e^{j3\,000t}$，有：

$$V_m e^{j\phi} = 4 + j2.28$$

然后将公式右边表示成极坐标形式，得到：

$$4 + j2.28 = 4.60e^{j29.7°}$$

从上式可知，$V_m = 4.60$ V，$\phi = 29.7°$，因此所求电压为：

$$4.60e^{j(3\,000t+29.7°)}\ \mathrm{V}$$

如果需要求出实响应，只需要对复响应取实部即可：

$$\mathrm{Re}\{4.60e^{j(3\,000t+29.7°)}\} = 4.60\cos(3\,000t+29.7°)\ \mathrm{V}$$

这样，对于含有一个储能元件的电路，可以通过上面的方法来求出其正弦稳态响应，而无需解微分方程！

练习

10.4　计算下面的表达式，并将它们表示成直角坐标的形式：(a) $[(2\angle 30°)\times(5\angle -110°)](1+j2)$；(b) $(5\angle -200°)+4\angle 20°$；计算下面的表达式，并将它们表示成极坐标的形式：(c) $(2-j7)/(3-j)$；(d) $8-j4+[(5\angle 80°)/(2\angle 20°)]$。

10.5　如果采用无源符号规则，(a)将复电流 $4e^{j800t}$ A 接入到 1 mF 电容与 2 Ω 电阻的串联组合上，求组合两端的复电压；(b)将复电压 $100e^{j2\,000t}$ V 接入到 10 H 电感和 50 Ω 电阻的串联组合上，求产生的复电流。

答案：10.4：$21.4-j6.38$；$-0.940+j3.08$；$2.30\angle -55.6°$；$9.43\angle -11.22°$。
10.5：$9.43e^{j(800t-32.0°)}$ V；$5.39e^{j(2\,000t-68.2°)}$ A

如果在求解这些问题中遇到困难，请参看附录 F。

10.5　相量

当频率给定后，描述正弦电流或电压只需用两个参数：幅度和相角。同样地，电流或电压的复表达式也可以用这两个参数来描述。例如，例题 10.1 中假定的正弦电流响应的表达式为：

$$I_m\cos(\omega t+\phi)$$

响应的复形式为：

$$I_m e^{j(\omega t+\phi)}$$

当 I_m 和 ϕ 确定后，该电流就完全确定了。对于任何在某个频率 ω 下处于正弦稳态的线性电路，其中的任何电流或电压均可以用幅度和相角完整地描述。每个电流和电压的表达式均含

有同一个因子 $e^{j\omega t}$，因为对于任何量都是如此，那么这个因子就不包含有用的信息。当然，通过该因子可以确定频率的大小，但只需要在电路图中将该值注明一次即可，在求解过程中，没有必要带上这个多余的信息进行运算，这样就简化了求解过程。因此，本例中可以将电压源和电流响应简单表示为：

$$V_m \quad 或 \quad V_m e^{j0}$$

和

$$I_m e^{j\phi}$$

为方便起见，通常将这些复量写成极坐标的形式而不是指数形式。因此，可以将下面的电源：

$$v(t) = V_m \cos \omega t$$

表示成：

$$V_m \angle 0°$$

可以将前面的复响应：

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

表示成：

$$I_m \angle \phi$$

这些简写的复表达式称为相量[①]。下面首先复习一下将正弦电压转化为相量形式的步骤，然后采用更有物理意义的方式来定义相量，并用一个符号表示它。

对于一个实正弦电流：

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

利用欧拉公式，可以将其表示成一个复量的实部：

$$i(t) = \mathrm{Re}\{I_m e^{j(\omega t + \phi)}\}$$

需要记住的是，这里不考虑电路对激励源频率之外的频率的响应，所以 ω 的值总是已知的。

然后，去掉符号 Re{ }，用复量来表示这个电流，这时给电流添加了虚部，但并不改变原来的实部。再去掉因子 $e^{j\omega t}$，进一步简化为：

$$\mathbf{I} = I_m e^{j\phi}$$

最后，将结果写成相量的形式：

$$\mathbf{I} = I_m \angle \phi$$

这个简化的复数表示称为相量表示，相量是一个复量，因此用粗体表示。在相量表示中采用大写字母是因为相量不是关于时间的函数，它只包含幅度和相角信息。为了表示这种差别，将 $i(t)$ 称为时域表示，而将相量 $\mathbf{I}$ 称为频域表示。

需要指出的是，频域表示并不显式包含频率，不过，可以认为频率是频域的基本量，因此可以略去。

① 不要将相量(phasor)与移相器(phaser)相混淆，移相器是电视机中的一种有趣的器件。

$$\boxed{i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{i(t) = \mathrm{Re}\{I_m e^{j(\omega t+\phi)}\}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\mathbf{I} = I_m e^{j\phi}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\mathbf{I} = I_m \angle \phi}$$

将 $i(t)$转化成 $\mathbf{I}$ 的过程称为从时域到频域的相量变换

例题 10.3　将时域电压 $v(t) = 100\cos(400t - 30°)$ V 转化成频域表示

这个时域表达式已经是包含相角的余弦形式，于是去掉 $\omega = 400$ rad/s 即可：

$$\mathbf{V} = 100 \angle -30° \text{ V}$$

需要注意，上面略去了几个步骤而直接写出了频域表示，这也是同学们有时会感到困惑的地方，因为他们容易忘记相量形式不等于时域电压。事实上，相量形式只是将相应的虚部加到时域函数 $v(t)$得到的复量的简洁形式。

练习

10.6　将下面关于时间的函数转化为相量形式：(a) $-5\sin(580t - 110°)$；(b)$3\cos 600t - 5\sin(600t + 110°)$；(c)$8\cos(4t - 30°) + 4\sin(4t - 100°)$。提示：首先将函数表示成带有幅度的单个余弦函数。

答案：$5\angle -20°$；$2.41 \angle -134.8°$；$4.46 \angle -47.9°$

从频域变到时域的过程是以上过程的逆过程，例如，对于相量电压：

$$\mathbf{V} = 115 \angle -45° \text{ V}$$

如果已知 $\omega = 500$ rad/s，那么可以直接写出与之等效的时域形式为：

$$v(t) = 115\cos(500t - 45°) \text{ V}$$

如果需要写出正弦的形式，$v(t)$还可以写成：

$$v(t) = = 115\sin(500t + 45°) \text{ V}$$

练习

10.7　已知 $\omega = 2\,000$ rad/s 和 $t = 1$ ms，求下面以各相量形式给出的电流的瞬时值：(a)$j10$ A；(b)$20 + j10$ A；(c)$20 + j(10\angle 20°)$ A。

答案：-9.09 A；-17.42 A；-15.44 A

10.6　*R*，*L*，*C* 的相量关系

采用相量的方法进行电路分析的最大优越性在于可以将电感和电容的电压－电流关系表

示成代数关系，正如前面对于电阻进行的处理那样。现在，已经知道了如何将时域表示转化成频域表示，或者相反，这样，通过分别对三种无源元件建立相量电压与相量电流的关系，就可以简化正弦稳态的分析过程。

10.6.1 电阻

电阻是最容易处理的情形。如图 10.12(a)所示，在时域中，电阻的定义式为：

$$v(t) = Ri(t)$$

现在，接入复电压：

$$v(t) = V_m e^{j(\omega t+\theta)} = V_m\cos(\omega t+\theta) + jV_m\sin(\omega t+\theta) \tag{10.16}$$

并假定复电流响应为：

$$i(t) = I_m e^{j(\omega t+\phi)} = I_m\cos(\omega t+\phi) + jI_m\sin(\omega t+\phi) \tag{10.17}$$

所以：

$$V_m e^{j(\omega t+\theta)} = RI_m e^{j(\omega t+\phi)}$$

两边除以 $e^{j\omega t}$，得到：

$$V_m e^{j\theta} = RI_m e^{j\phi}$$

或者写成极坐标的形式：

$$V_m \angle\theta = RI_m \angle\phi$$

这里的 $V_m \angle\theta$ 和 $I_m \angle\phi$ 表示一般形式的相量电压 **V** 和相量电流 **I**，即：

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} \tag{10.18}$$

欧姆定律在时域和频域均正确，换句话说，电阻两端的电压总是等于电阻乘以流过它的电流。

可以看到，电阻的相量形式的电压－电流关系与其时域电压－电流关系具有相同的形式。相量形式的定义方程如图 10.12(b)所示。电压的相角 θ 等于电流的相角 ϕ，因此电流和电压总是同相。

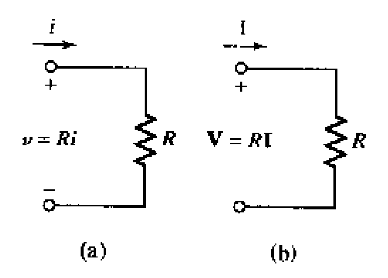


图 10.12 电阻及其电压－电流关系：(a)在时域，$v = Ri$；(b)在频域，$\mathbf{V} = R\mathbf{I}$

下面来看将 $8\cos(100t - 50°)$ V 的电压接到 4 Ω 电阻两端的例子，在这个例子中，分别采用了时域和频域关系进行求解。在时域，电阻电流为：

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = 2\cos(100t - 50°)\ \text{A}$$

电阻电压的相量形式为：$8\underline{/-50^\circ}$ V，于是相量电流为：

$$\mathbf{I}=\frac{\mathbf{V}}{R}=2\underline{/-50^\circ}\text{ A}$$

如果将这个结果转换到时域，可以得到相同的时域电流表达式。于是可以得到结论，对于电阻电路，在频域进行分析并不比在时域简单。

10.6.2 电感

下面来考虑电感。相应的时域网络如图 10.13(a)所示，在时域中，电感的定义式为：

$$v(t)=L\frac{di(t)}{dt} \tag{10.19}$$

图 10.13　电感及其电压－电流关系：(a)在时域，$v=Ldi/dt$；(b)在频域，$\mathbf{V}=j\omega L\mathbf{I}$

将复电压方程(10.16)和复电流方程(10.17)代入式(10.19)，得到：

$$V_m e^{j(\omega t+\theta)}=L\frac{d}{dt}I_m e^{j(\omega t+\phi)}$$

求出上式中的导数，得到：

$$V_m e^{j(\omega t+\theta)}=j\omega L I_m e^{j(\omega t+\phi)}$$

方程两边除以 $e^{j\omega t}$，有：

$$V_m e^{j\theta}=j\omega L I_m e^{j\phi}$$

就得到了需要求出的相量关系：

$$\mathbf{V}=j\omega L\mathbf{I} \tag{10.20}$$

可以看到，时域微分方程(10.19)简化成了频域代数方程(10.20)。电感的相量关系式如图 10.13(b)所示。注意到，因式 $j\omega L$ 的相角为 $+90^\circ$，于是电感的相量电流 **I** 比相量电压 **V** 滞后 90°。

例题 10.4　已知 $\omega=100$ rad/s，将电压 $8\underline{/-50^\circ}$ V 加到 4 H 电感的两端，求相量电流和时域电流

利用前面得到的电感的相量电压－电流关系，有：

$$\mathbf{I}=\frac{\mathbf{V}}{j\omega L}=\frac{8\underline{/-50^\circ}}{j100\times(4)}=-j0.02\underline{/-50^\circ}=(1\underline{/-90^\circ})\times(0.02\underline{/-50^\circ})$$

即

$$\mathbf{I}=0.02\underline{/-140^\circ}\text{ A}$$

如果将电流表示为时域形式，可以得到：

$$i(t)=0.02\cos(100t-140°)\,\text{A}=200\cos(100t-140°)\ \text{mA}$$

10.6.3 电容

最后来考察电容。电容的时域电流－电压关系为：

$$i(t)=C\frac{dv(t)}{dt}$$

与前面类似，首先将 $v(t)$ 和 $i(t)$ 替换为式(10.15)和式(10.16)所示的复量，求出式中的导数，然后去掉因子 $e^{j\omega t}$，就得到了电容的相量电压 $\mathbf{V}$ 和相量电流 $\mathbf{I}$ 的关系：

$$\mathbf{I}=j\omega C\mathbf{V} \tag{10.21}$$

从上式可知，对于电容，$\mathbf{I}$ 比 $\mathbf{V}$ 超前 90°，不过需要注意的是，这并不是指电流响应在产生它的电压后 1/4 周期才出现！

图 10.14(a)和图 10.14(b)同时画出了电容的时域和频域表示。到现在为止，就得到了三个元件的 V-I 关系式，表 10.1 总结了前面得到的这些结果。为了便于比较，分别将三个元件的时域表示和频域表示放在了相邻的两栏中。所有的相量方程均为代数方程，而且是线性的。这些电感和电容方程与电阻中的欧姆定律很相似，事实上，可以像使用欧姆定律那样使用它们。

表 10.1 时域形式和频域形式的电压－电流表达式的比较

时域		频域	
i → R，$+\ v\ -$	$v=Ri$	$\mathbf{V}=R\mathbf{I}$	$\mathbf{I}$ → R，$+\ \mathbf{V}\ -$
i → L，$+\ v\ -$	$v=L\dfrac{di}{dt}$	$\mathbf{V}=j\omega L\mathbf{I}$	$\mathbf{I}$ → $j\omega L$，$+\ \mathbf{V}\ -$
i → C，$+\ v\ -$	$v=\dfrac{1}{C}\int i\,dt$	$\mathbf{V}=\dfrac{1}{j\omega C}\mathbf{I}$	$\mathbf{I}$ → $1/j\omega C$，$+\ \mathbf{V}\ -$

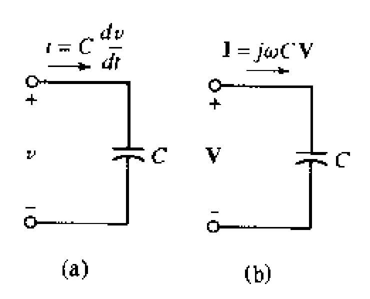


图 10.14 (a)电容电压－电流关系的时域形式；(b)频域形式

10.6.4 基尔霍夫定律的相量形式

时域形式的基尔霍夫电压定律为：

$$v_1(t)+v_2(t)+\cdots+v_N(t)=0$$

现在,运用欧拉公式,将每个实电压均替换成实部等于这个实电压的复电压,然后去掉因子 $e^{j\omega t}$,得到:

$$\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2+\cdots+\mathbf{V}_N=0$$

从中可知,基尔霍夫电压定律的相量形式和其时域形式相同。采用类似的推导可知,基尔霍夫电流定律的相量形式也与其时域形式相同。

下面来考虑前面已经多次讨论过的串联 RL 电路,如图 10.15 所示,图中已标出了相量电流和相量电压。下面通过求出相量电流来得到需要求出的时域电流响应。根据基尔霍夫电压定律的相量形式,有:

$$\mathbf{V}_R+\mathbf{V}_L=\mathbf{V}_s$$

利用前面得到各元件的 V-I 关系式,有:

$$R\mathbf{I}+j\omega L\mathbf{I}=\mathbf{V}_s$$

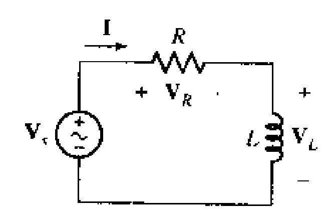


图 10.15　具有相量电压的 RL 串联电路

于是得到相量电流的表达式,以电源 $\mathbf{V}_s$ 表示:

$$\mathbf{I}=\frac{\mathbf{V}_s}{R+j\omega L}$$

假定电源电压的幅度为 V_m,相角为 0°,那么可以得到相量电流为:

$$\mathbf{I}=\frac{V_m\angle 0^\circ}{R+j\omega L}$$

将相量电流写成下面的极坐标形式:

$$\mathbf{I}=\frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\angle\left(-\tan^{-1}(\omega L/R)\right)$$

然后采用已熟悉的步骤就可以求出其时域表达式,而在本章的开始,曾费了很大功夫才得到了这个表达式。

练习

10.8　如图 10.16 所示电路,$\omega=1\,200$ rad/s,$\mathbf{I}_C=1.2\angle 2.8^\circ$ A,$\mathbf{I}_L=3\angle 53^\circ$。求(a)$\mathbf{I}_s$;(b)$\mathbf{V}_s$;(c)$i_R(t)$。

答案:$2.33\angle -31.0^\circ$ A; $34.9\angle 74.5^\circ$ V; $3.99\cos(1\,200t+17.42^\circ)$ A

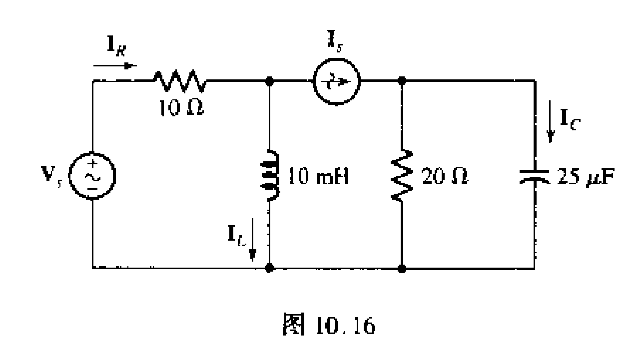


图 10.16

10.7 阻抗

前面已经得到三种元件在频域中的电流－电压关系为(假定遵循无源符号规则)：

$$\mathbf{V}=R\mathbf{I}\quad \mathbf{V}=j\omega L\mathbf{I}\quad \mathbf{V}=\frac{\mathbf{I}}{j\omega C}$$

如果将这些方程写成相量电压除以相量电流的比值的形式，即：

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}}=R\quad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}}=j\omega L\quad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}}=\frac{1}{j\omega C}$$

可以看到，这些比值取决于元件的大小(对于电感和电容，还与频率有关)，除了它们是复量，其运算必须符合复数的运算外，后面将把这些值与电阻同等对待。

定义相量电压对相量电流的比值为阻抗，用符号 $\mathbf{Z}$ 表示，阻抗具有欧姆的量纲。需要注意，阻抗不是相量，所以不能通过将它乘以 $e^{j\omega t}$，再取实部来将其转化到时域。对于电感，在时域中的大小用 L 来表示，在频域中则用阻抗 $j\omega L$ 来表示。类似地，对于电容，在时域中的大小用 C 来表示，在频域中则用阻抗 $1/j\omega C$ 来表示。阻抗是频域量，不是时域中的概念。

$$\mathbf{Z}_R=R$$

$$\mathbf{Z}_L=j\omega L$$

$$\mathbf{Z}_C=\frac{1}{j\omega C}$$

10.7.1 阻抗的串联组合

因为在频域中基尔霍夫定律仍然适用，所以对于阻抗，可以采用前面已经对电阻建立的相同的规则进行串联组合。例如，在 $\omega=10\times10^3$ rad/s 时，5 mH 电感与 100 μF 电容的串联组合可以替换为单个阻抗，其阻抗等于电感与电容的阻抗之和。电感的阻抗为：

$$\mathbf{Z}_L=j\omega L=j50\ \Omega$$

电容的阻抗为：

$$\mathbf{Z}_C=\frac{1}{j\omega C}=\frac{-j}{\omega C}=-j1\ \Omega$$

于是串联组合的阻抗为：

$$\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_C = j50 - j1 = = j49\ \Omega$$

注意到，$1/j = -j$。

电感和电容的阻抗是频率的函数，因此得到的串联组合的等效阻抗只有在给定的频率上才有意义，对于本例，$\omega = 10\,000$ rad/s。如果改变频率，例如取 $\omega = 5\,000$ rad/s，则得到 $\mathbf{Z}_{eq} = j23\ \Omega$。

10.7.2 阻抗的并联组合

计算 $\omega = 10\,000$ rad/s 时 5 mH 电感与 100 μF 电容的并联组合的阻抗与计算并联电阻的方法完全一样：

$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{(j50)\times(-j1)}{j50 - j1} = \frac{50}{j49} = -j1.020\ \Omega$$

而当 $\omega = 5\,000$ rad/s 时，可以计算出并联组合的等效阻抗为 $-j2.17\ \Omega$。

阻抗的复数或复量形式也可以表示成极坐标或者直角坐标的形式。例如，对于直角坐标形式的阻抗 $50 - j86.6\ \Omega$，可以说成具有 50 Ω 的电阻和具有 −86.6 Ω 的电抗。电阻部分为阻抗的实部，电抗部分是阻抗的虚部，包括符号，但不包括虚数运算符 j。该阻抗的极坐标形式为 $\mathbf{Z} = 100\angle -60°\ \Omega$，表示阻抗的幅度为 100 Ω，相角为 −60°。

例题 10.5　求图 10.17(a)所示网络的等效阻抗，已知电路工作频率为 5 rad/s

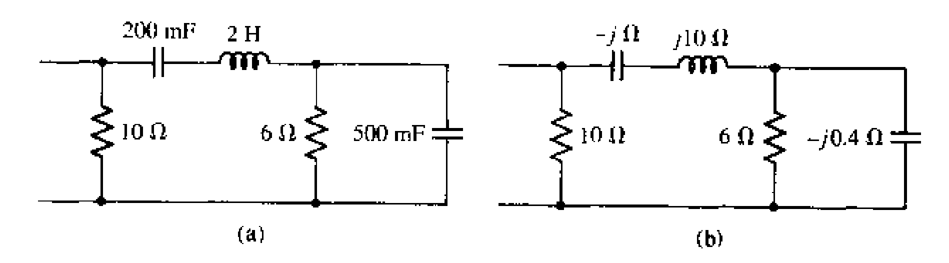


图 10.17　(a)需要将该网络替换为与之等效的单个网络；(b)将各元件替换为其在 $\omega = 5$ rad/s 时的阻抗后的电路

首先，将电阻、电容和电感均替换成相应的阻抗，如图 10.17(b)所示。

分析替换后的网络，可以看到 6 Ω 阻抗与 $-j0.4\ \Omega$ 阻抗并联，其等效阻抗为：

$$\frac{(6)\times(-j0.4)}{6 - j0.4} = 0.026\,55 - j0.398\,2\ \Omega$$

然后，它再与 $-j\ \Omega$ 和 $j10\ \Omega$ 阻抗串联，得到：

$$0.026\,5 - j0.398\,2 - j + j10 = 0.026\,55 + j8.602\ \Omega$$

最后，得到的这个阻抗再与 10 Ω 电阻并联，所以得到该网络的等效阻抗为：

$$10 \parallel (0.026\,55 + j8.602) = \frac{10\times(0.026\,55 + j8.602)}{10 + 0.026\,55 + j8.602} = 4.255 + j4.929\ \Omega$$

或者，可以将它表示成极坐标的形式：$6.511\angle 49.20°\ \Omega$。

练习

10.9　参看图 10.18 所示电路，求以下各端之间的阻抗 $\mathbf{Z}_{in}$(a) a 和 g；(b) b 和 g；(c) a 和 b。

答案：$2.81 + j4.49\ \Omega$；$1.798 - j1.124\ \Omega$；$0.1124 - j3.82\ \Omega$

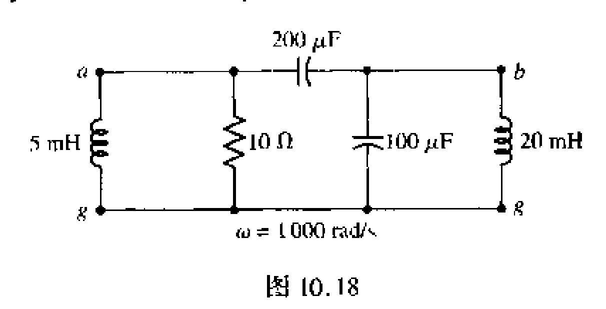


图 10.18

需要强调的是，阻抗中的电阻部分不一定等于网络中所出现的电阻的阻值。例如，10 Ω 电阻与 5 H 电感在 $\omega = 4$ rad/s 时的等效阻抗为 $\mathbf{Z} = 10 + j20\ \Omega$，或者表示成极坐标的形式 $22.4\angle 63.4^\circ\ \Omega$。这时，阻抗的电阻部分确实等于网络中电阻的阻值，不过这是因为这个网络是一个简单的串联网络，如果将这两个元件换成并联连接，则其等效阻抗为 $10 \times (j20)/(10 + j20)\ \Omega$，即 $8 + j4\ \Omega$，这时阻抗的电阻部分为 8 Ω，不等于网络中电阻的阻值。

对于阻抗的幅度和相角，没有规定特定的符号表示。一般的阻抗的极坐标形式为：

$$\mathbf{Z} = |\mathbf{Z}|\angle\theta$$

对于直角坐标形式，阻抗的电阻部分用 R 来表示，电抗部分用 X 来表示，即：

$$\mathbf{Z} = R + jX$$

下面来看如何应用阻抗的概念来分析 *RLC* 电路。

例题 10.6 如图 10.19(a)所示电路，求 $i(t)$

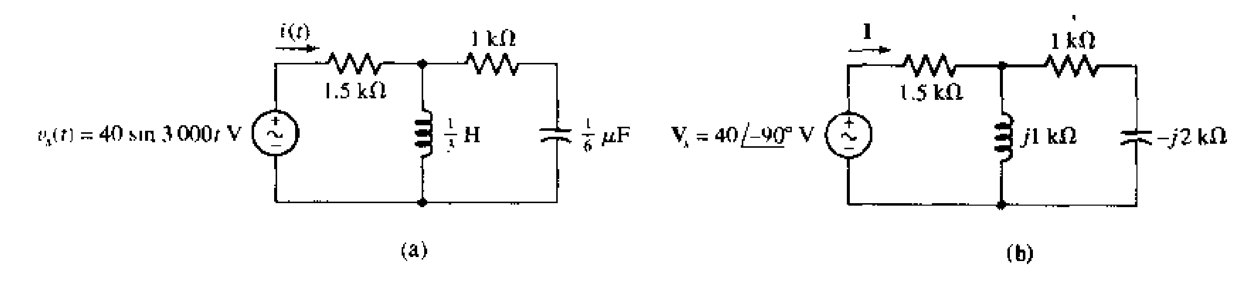


图 10.19 (a)求电路的正弦稳态响应 $i(t)$；(b)电路的频域等效电路，其中 $\omega = 3\,000$ rad/s

- 弄清问题的目标：
  需要求出的是由工作在 3 000 rad/s 下的电压源产生的流过 1.5 kΩ 电阻上的正弦稳态电流。
- 收集已知信息：
  首先，画出频域电路。转换到频域后，电压源用 $40\angle -90^\circ$ 表示，频域响应表示为 $\mathbf{I}$，且当 $\omega = 3\,000$ rad/s 时，电感和电容的阻抗分别为 $j1$ kΩ 和 $-j2$ kΩ。相应的频域电路如图 10.19(b)所示。
- 选择最适合问题的已有方法：
  对于频域电路，可以采用几种方法进行分析。其中，采用网孔分析可以直接得到所求的电流，它是左边网孔的网孔电流，不过它同时得到了并不需要知道的右边网孔的网孔电流。采用节点分析法同样有效，不过当最终需要求出的是电流时，它并不是一个特别好

的选择。但是，当电流 $\mathbf{I}$ 为电源电流时，还可以利用阻抗的概念来化简连接到电源的电路。

● 建立适当的方程组：

$$\mathbf{Z}_{eq} = 1.5 + \frac{j(1-2j)}{j+1-2j} = 1.5 + \frac{2+j}{1-j}$$
$$= 1.5 + \frac{2+j}{1-j}\frac{1+j}{1+j} = 1.5 + \frac{1+j3}{2}$$
$$= 2 + j1.5 = 2.5\angle 36.87^\circ\ \text{k}\Omega$$

这时，相量电流为：

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}_{eq}}$$

● 确定是否还需其他信息：

代入已知量，得到：

$$\mathbf{I} = \frac{40\angle -90^\circ}{2.5\angle 36.87^\circ}\ \text{mA}$$

根据上式以及已知条件 $\omega = 3\,000$ rad/s，就可以求出 $i(t)$。

● 试解：

容易将上面得到的复数表达式化简为单个复数的极坐标形式：

$$\mathbf{I} = 16.00\angle -126.9^\circ\ \text{mA}$$

将电流变换到时域，得到所求的响应为：

$$i(t) = 16\cos(3\,000t - 126.9^\circ)\ \text{mA}$$

● 证实所得解是否合理和满足要求：

连接到电源的等效阻抗的相角为 +36.87°，这表明它具有净电感的特性，也就是说，电流将滞后于电压。因为电压源的相角为 −90°（已经将其转化为余弦电源），可以看到，这与上面的解答是一致的。

练习

10.10　对于图 10.20 所示的频域电路，求(a)$\mathbf{I}_1$；(b)$\mathbf{I}_2$；(c)$\mathbf{I}_3$。

答案：$28.3\angle 45^\circ$ A；$20\angle 90^\circ$ A；$20\angle 0^\circ$ A

需要特别注意的是，在列出时域或者频域关系式时，要避免列出部分在时域，部分在频域的等式。当等式中同时包含复数和时间 t 时（除因式 $e^{j\omega t}$ 外），就出现了这种错误。另外，$e^{j\omega t}$ 通常是在数学推导中而不是实际应用中出现，因此如果看到一个式子同时包含 j 和 t，或者∠和 t，那么基本上就可以认为这个式子是错误的。

例如，前面的等式：

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{40\angle -90^\circ}{2.5\angle 36.9^\circ} = 16\angle -126.9^\circ\ \text{mA}$$

是正确的，但不要列出类似下面的式子：

$$i(t) \neq \frac{40\sin 3\,000t}{2.5\angle 36.9°} \quad 或 \quad i(t) \neq \frac{40\sin 3\,000t}{2+j1.5}$$

图 10.20

10.8 导纳

有时，使用阻抗的倒数更为方便些，于是，定义电路元件的导纳为其相量电流对相量电压的比值(假定遵循无源符号规则)：

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}}$$

因此：

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}}$$

导纳的实部称为电导 G，虚部称为电纳 B，因此：

$$\mathbf{Y} = G + jB = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{R + jX} \tag{10.22}$$

对式(10.22)需要仔细观察，它并不表明导纳的实部等于阻抗实部的倒数，或者导纳的虚部等于阻抗虚部的倒数！

导纳、电导和电纳的单位均为西门子(S)。对于阻抗：

$$\mathbf{Z} = 1 - j2\ \Omega$$

可以表示为 $\omega = 5$ Mrad/s 时 1 Ω 电阻和 0.1 μF 电容的串联，这个串联组合具有的导纳为：

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{1-j2} = \frac{1}{1-j2}\,\frac{1+j2}{1+j2} = 0.2 + j0.4\ \text{S}$$

由几个支路并联组成的网络的导纳为各单个支路导纳的和，于是上面的导纳可以由 0.2 S 电导和 0.4 S 电纳并联得到。前者表示 5 Ω 电阻；因为电容的导纳为 $j\omega C$，所以后者表示工作在 $\omega = 5$ Mrad/s 下的 0.08 μF 电容。作为验算，可以计算最后得到的 5 Ω 电阻与 0.08 μF 电容并联的网络在 $\omega = 5$ Mrad/s 下等效阻抗为：

$$\mathbf{Z} = \frac{5\times(1/j\omega C)}{5 + 1/j\omega C} = \frac{5\times(-j2.5)}{5 - j2.5} = 1 - j2\ \Omega$$

和前面给出的阻抗一致。给定阻抗和导纳以及工作频率，存在无穷多个网络与之对应，以上只是给出两种可能的网络。不过它们均为只包含两个元件的网络，所以可以分别将它们看做是

在 $\omega = 5\times10^6$ rad/s 时阻抗为 $1 - j2\ \Omega$ 和导纳为 $0.2 + j0.4$ S 的两个最简单的网络。

阻纳(immittance)这个词是阻抗(impedance)和导纳(admittance)这两个词的组合,有的时候用它来作为阻抗和导纳的通用词。例如,已知一个阻纳两端的相量电压,那么显然可以计算出流过该阻纳的电流。

练习

10.11 求出下面各导纳的值,以直角坐标形式表示:(a)阻抗 $\mathbf{Z} = 1\,000 + j400\ \Omega$;(b)由800 Ω电阻,1 mH 电感和 2 nF 电容组成的并联网络,已知 $\omega = 1$ Mrad/s;(c)由 800 Ω 电阻,1 mH 电感和 2 nF 电容组成的串联网络,已知 $\omega = 1$ Mrad/s。

答案:$0.862 - j0.345$ mS; $1.25 + j1$ mS; $0.899 - j0.562$ mS

10.9 节点分析和网孔分析

在前面章节中已经看到,采用节点和网孔分析法对电路进行分析很有效,于是很自然要问,对于正弦稳态的相量和阻抗,这些方法是否还适用? 前面已经知道,对于相量,两个基尔霍夫定律仍然成立,而且,对于无源元件,成立类似欧姆定律的 $\mathbf{V} = \mathbf{ZI}$。换句话说,对于相量,作为节点分析的基础这些定律仍然成立,于是,仍然可以采用节点分析法来分析正弦稳态电路。根据类似的推理可知,对于正弦稳态电路,网孔分析仍然有效,而且通常很有用。

例题 10.7 如图 10.21 所示电路,求时域电压 $v_1(t)$和 $v_2(t)$

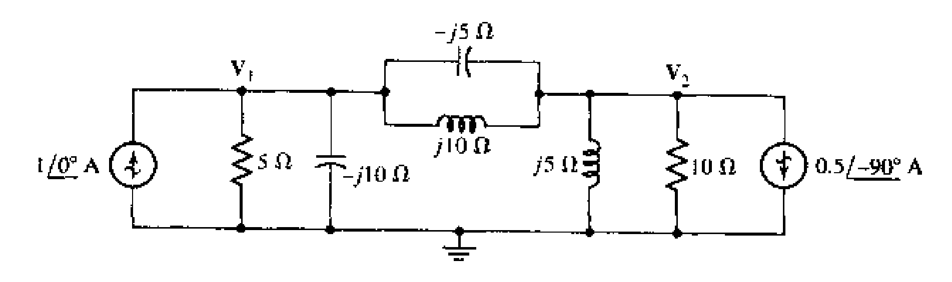


图 10.21 频域电路,其中已标出节点电压 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$

两个电流源均以相量的形式给出,并且图中已标出了相量节点电压 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$。对左边的节点应用 KCL,得到:

$$\frac{\mathbf{V}_1}{5} + \frac{\mathbf{V}_1}{-j10} + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{-j5} + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{j10} = 1\angle 0^\circ = 1 + j0$$

对于右边的节点有:

$$\frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{-j5} + \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{j10} + \frac{\mathbf{V}_2}{j5} + \frac{\mathbf{V}_2}{10} = -(0.5\angle -90^\circ) = j0.5$$

合并同类项,有:

$$(0.2 + j0.2)\mathbf{V}_1 - j0.1\mathbf{V}_2 = 1$$

和:

$$-j0.1\mathbf{V}_1+(0.1-j0.1)\mathbf{V}_2=j0.5$$

这两个方程用普通的计算器就可求解,得到 $\mathbf{V}_1=1-j2$ V 和 $\mathbf{V}_2=-2+j4$ V。

通过先将 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$ 表示成极坐标形式可以得到时域解。极坐标形式为:

$$\mathbf{V}_1=2.24\angle-63.4^\circ \quad \mathbf{V}_2=4.47\angle116.6^\circ$$

再转化到时域有:

$$v_1(t)=2.24\cos(\omega t-63.4^\circ)\text{ V}$$
$$v_2(t)=4.47\cos(\omega t+116.6^\circ)\text{ V}$$

要注意的是,为了计算出图中各元件对应的阻抗,需要知道 ω 的值,而且所有的电源必须工作在同一个频率下。

练习

10.12 利用节点分析方法,求图 10.22 所示电路中的 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$。

答案:$1.062\angle23.3^\circ$ V; $1.593\angle-50.0^\circ$ V。

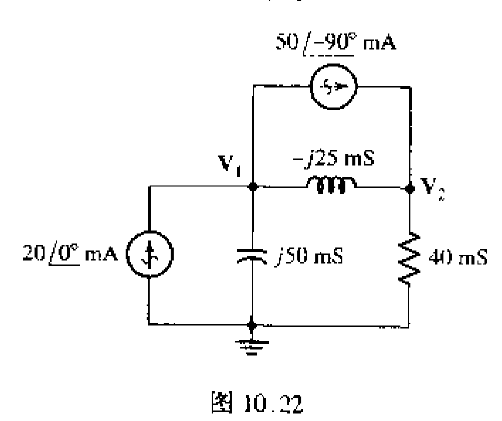


图 10.22

下面来看一个网孔分析的例子。再次强调,所有的电源必须工作在同一个频率下,否则对电路中的任何电抗均不能定义其值。在下一节将看到,解决这个困难的惟一途径是采用叠加原理。

例题 10.8 如图 10.23(a)所示电路,求 i_1 和 i_2 的时域表达式

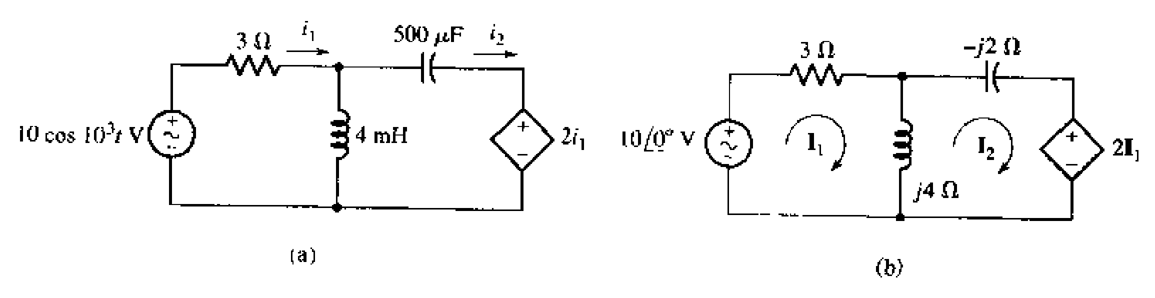


图 10.23 (a)含有一个受控源的时域电路;(b)其频域电路

注意到,对于左边的电源 $\omega=10^3$ rad/s,于是画出其频域电路如图 10.23(b)所示,并设两个网孔电流为 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$。沿网孔 1 写出网孔方程:

$$3\mathbf{I}_1 + j4(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) = 10\,\underline{/0^\circ}$$

或

$$(3 + j4)\mathbf{I}_1 - j4\mathbf{I}_2 = 10$$

对网孔 2,则有：

$$j4(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) - j2\mathbf{I}_2 + 2\mathbf{I}_1 = 0$$

或

$$(2 - j4)\mathbf{I}_1 + j2\mathbf{I}_2 = 0$$

联立求解得：

$$\mathbf{I}_1 = \frac{14 + j8}{13} = 1.24\,\underline{/29.7^\circ}\text{ A}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{20 + j30}{13} = 2.77\,\underline{/56.3^\circ}\text{ A}$$

因此：

$$i_1(t) = 1.24\cos(10^3 t + 29.7^\circ)\text{ A}$$

$$i_2(t) = 2.77\cos(10^3 t + 56.3^\circ)\text{ A}$$

练习

10.13　利用网孔分析方法,求图 10.24 所示电路的 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$。

答案:$4.87\,\underline{/-164.6^\circ}$ A; $7.17\,\underline{/-144.9^\circ}$ A

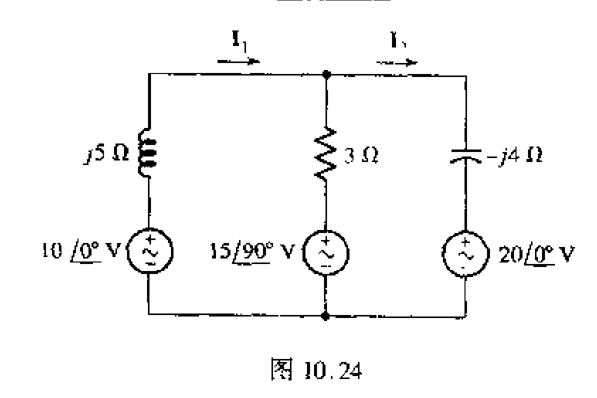


图 10.24

实际应用

晶体管放大器的截止频率

基于晶体管的放大电路是许多现代电子设备的组成部分。常见的一个应用是蜂窝电话,其中语音信号被叠加到高频载波上。但是,晶体管内部固有的电容限制了它们可以应用的频率范围,当将晶体管用于特定的应用时,必须考虑到这一点。

图 10.25(a)画出了双极型晶体管的一个高频模型，通常称为高频混合 π 模型。尽管晶体管是非线性器件，不过这个简单的线性模型对实际器件工作行为的描述已相当精确。两个电容 C_π 和 C_μ 用来表示晶体管的内部电容，增加电容和电阻的个数可以提高模型的精度。图 10.25(b)画出了将这个晶体管模型插入到共发射极放大电路中的情形。

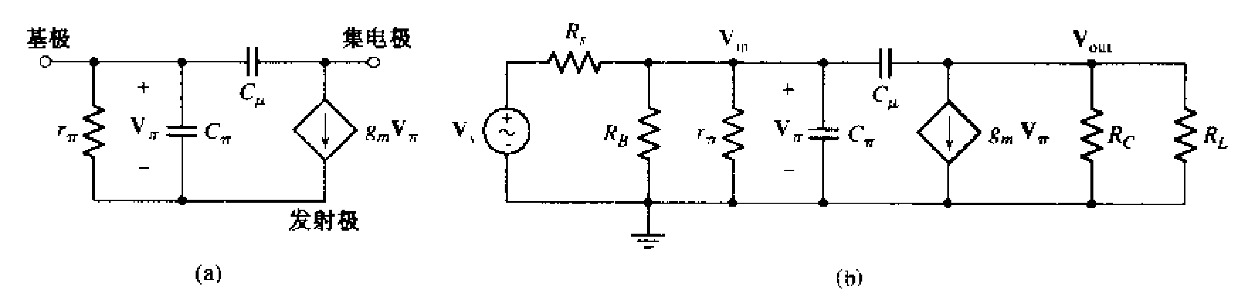


图 10.25 (a)晶体管的高频混合 π 模型；(b)使用了混合 π 模型的共发射极放大电路

假定有一个正弦稳态信号，可用其戴维南等效 $\mathbf{V}_s$ 和 R_s 表示。我们感兴趣的是输出电压 $\mathbf{V}_{out}$和输入电压 $\mathbf{V}_{in}$的比。当 $\mathbf{V}_s$ 的频率增大时，由于晶体管内部电容的存在，放大倍数将减小，这就最终限制了电路可以正常工作的频率范围。在输出端写出节点方程，有：

$$-g_m\mathbf{V}_\pi=\frac{\mathbf{V}_{out}-\mathbf{V}_{in}}{(1/j\omega C_\mu)}+\frac{\mathbf{V}_{out}}{(R_C\parallel R_L)}$$

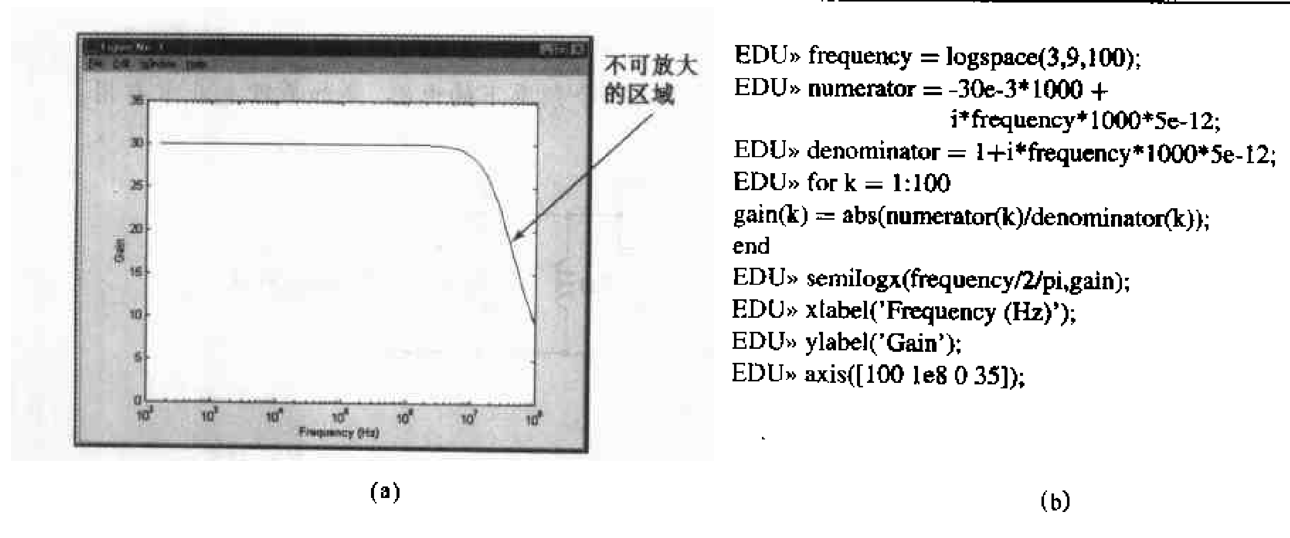
可以解出以 $\mathbf{V}_{in}$表示的 $\mathbf{V}_{out}$，注意到，$\mathbf{V}_\pi=\mathbf{V}_{in}$，得到放大器的增益为：

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}}&=\frac{-g_m(R_C\parallel R_L)(1/j\omega C_\mu)+(R_C\parallel R_L)}{(R_C\parallel R_L)+(1/j\omega C_\mu)}\\&=\frac{-g_m(R_C\parallel R_L)+j\omega(R_C\parallel R_L)C_\mu}{1+j\omega(R_C\parallel R_L)C_\mu}\end{aligned}$$

假定取典型值 $g_m=30\text{ mS}$，$R_C=R_L=2\text{ k}\Omega$，$C_\mu=5\text{ pF}$，可以画出增益的幅度随频率(注意 $\omega=2\pi f$)变化的曲线。图 10.26(a)画出了其半对数曲线，图 10.26(b)则给出了生成该曲线的 MATLAB 语句。有趣的是(但并不是很出乎意料)，可以看到放大器的增益依赖于频率。事实上，还可以想像将这个电路用做滤波器以滤去不感兴趣的频率。不过，至少在较低的频率范围，增益基本上与输入信号源的频率无关。

在描述放大电路时，通常将增益下降到其最大值的 $1/\sqrt{2}$时的频率作为参考频率。从图 10.26(a)可知，最大增益幅度为 30，增益的幅度大约在 30 MHz 处下降到 $30/\sqrt{2}=21$，通常将这个频率称为放大器的截止频率或者转角(corner)频率。如果需要放大电路工作在更高的频率，那么必须减小内部电容(这就是说，必须采用另外一种晶体管)，或者必须对电路的某些地方进行重新设计。

这里必须指出的是，只定义对 $\mathbf{V}_{in}$的增益并不能完全描述放大器依赖于频率的特性。如果主要考虑 C_π，可以很明显看到这点，这时，随着 $\omega\to\infty$，$Z_{C_\pi}\to 0$，所以 $\mathbf{V}_{in}\to 0$，而在前面导出的公式中并没有体现出这一点。为了更好地体现出这一点，需要推导出以 $\mathbf{V}_s$ 表示的 $\mathbf{V}_{out}$的表达式，这时两个电容均出现在表达式中，不过推导出这个表达式需要进行更多的代数运算。




```
EDU» frequency = logspace(3,9,100);
EDU» numerator = -30e-3*1000 +
                 i*frequency*1000*5e-12;
EDU» denominator = 1+i*frequency*1000*5e-12;
EDU» for k = 1:100
gain(k) = abs(numerator(k)/denominator(k));
end
EDU» semilogx(frequency/2/pi,gain);
EDU» xlabel('Frequency (Hz)');
EDU» ylabel('Gain');
EDU» axis([100 1e8 0 35]);
```

(a)　　　　(b)

图 10.26　(a)放大器增益随频率变化的曲线;(b)用以画出这个曲线的 MATLAB 语句

10.10　叠加原理、电源变换和戴维南定理

第 7 章引入了电感和电容,可以发现包含这些元件的电路仍然是线性的,所以线性性质仍然适用。除此之外,叠加原理、戴维南定理、诺顿定理,以及电源变换等均利用了线性性质,因此这些定理均可以用到正在考虑的电路上,它们仍然是线性电路。在前面,将实电源与虚电源组合起来得到一个复电源时,也是利用了线性性质和叠加原理。

例题 10.9　利用叠加原理,求图 10.21 所示电路的 $\mathbf{V}_1$。为方便起见,将电路重新画出如图 10.27(a)所示

首先,将电路改画成图 10.27(b),其中,已将每对并联的阻抗均替换成了单个等效阻抗。具体地说,就是将 $5 \parallel -j10\ \Omega$ 替换为 $4-j2\ \Omega$,将 $j10 \parallel -j5\ \Omega$ 替换为 $-j10\ \Omega$,将 $10 \parallel j5\ \Omega$ 替换为 $2+j4\ \Omega$。为了求出 $\mathbf{V}_1$,可以首先求出当只有左边的电源起作用时的电压响应 $\mathbf{V}_{1L}$。此时,与电源$\underline{/0^\circ}$并联的阻抗为:

$$(4-j2) \parallel (-j10+2+j4)$$

所以:

$$\mathbf{V}_{1L} = 1\underline{/0^\circ} \times \frac{(4-j2)\times(-j10+2+j4)}{4-j2-j10+2+j4}$$

$$= \frac{-4-j28}{6-j8} = 2-j2\ \text{V}$$

同样地,当只有右边的电源起作用时,根据分流定理和欧姆定律有:

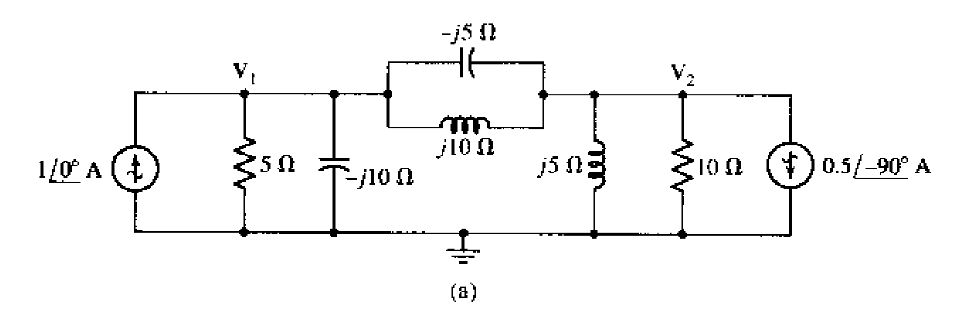
$$\mathbf{V}_{1R} = (-0.5\underline{/-90^\circ}) \times \left(\frac{2+j4}{4-j2-j10+2+j4}\right) \times (4-j2) = -1\ \text{V}$$

将前面得到的两个式子相加,得:

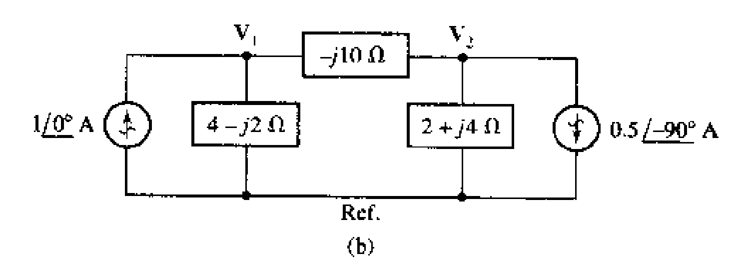
$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{1L} + \mathbf{V}_{1R} = 2-j2-1 = 1-j2\ \text{V}$$

这与前面的例题 10.7 得到的结果一致。

在后面将看到，对于不是所有电源均工作在同一个频率下的电路，叠加原理也非常有用。



(a)



(b)

图 10.27 (a)与图 10.21 所示电路相同，求 $\mathbf{V}_1$；(b)利用叠加原理，将两个相量响应相加得到$\mathbf{V}_1$

练习

10.14 如图 10.28 所示电路，利用叠加原理，(a)当只有 $20\,\underline{/0^\circ}$ mA 电源工作时；(b)当只有 $50\,\underline{/-90^\circ}$ mA 电源工作时，分别求出 $\mathbf{V}_1$。

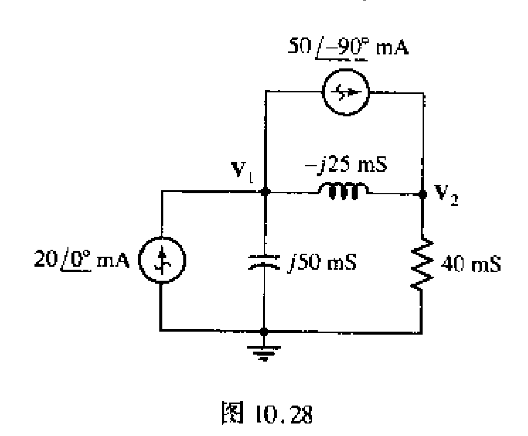


图 10.28

答案：$0.1951 - j0.556$ V；$0.780 + j0.976$ V

例题 10.10 如图 10.29(a)所示电路，求从阻抗 $-j10\ \Omega$ 看过去的戴维南等效电路，并利用它计算出 $\mathbf{V}_1$。

图 10.29(b)中定义的开路电压为：

$$\mathbf{V}_{oc} = (1\,\underline{/0^\circ}) \times (4 - j2) - (-0.5\,\underline{/-90^\circ}) \times (2 + j4)$$
$$= 4 - j2 + 2 - j1 = 6 - j3\ \text{V}$$

当两个电源均不工作时，如图 10.29(c)所示，从负载两端看过去的等效阻抗为剩下的两个阻抗的和，即：

$$\mathbf{Z}_{th} = 6 + j2\ \Omega$$

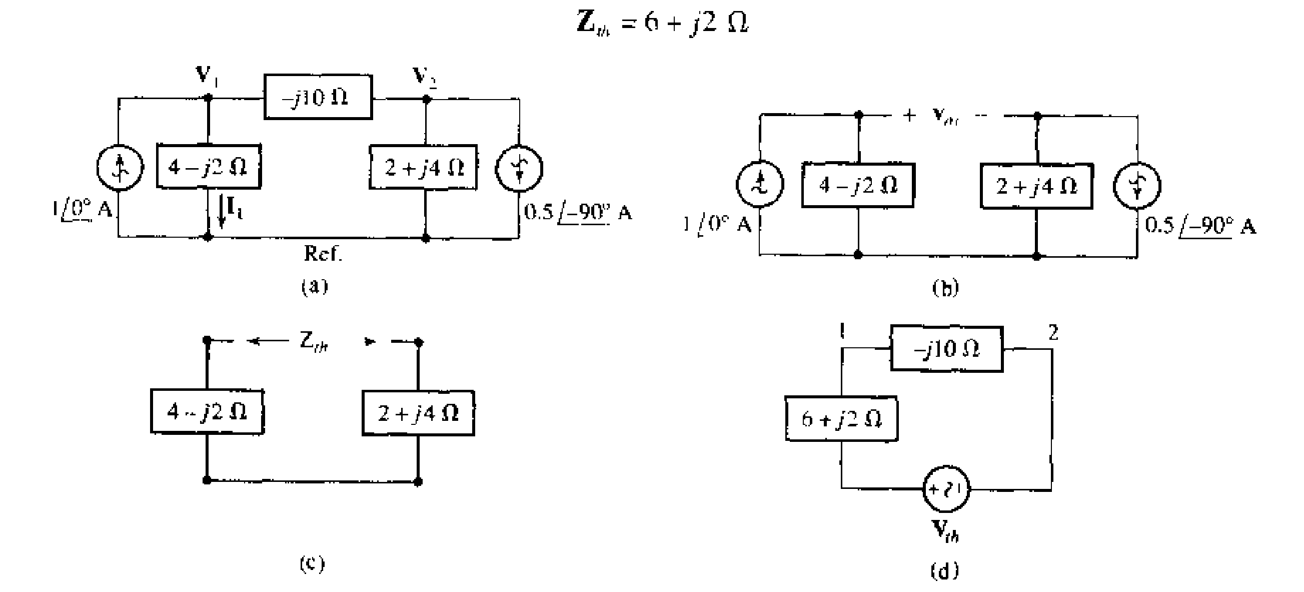


图 10.29　(a)问图 10.27(b)所示电路，求从阻抗 $-j10\ \Omega$ 看过去的戴维南等效；(b)$\mathbf{V}_{oc}$ 的定义；(c) $\mathbf{Z}_{th}$ 的定义；(d)用戴维南等效重画后的电路

所以，将电路重新画出后，如图 10.29(d)所示，从节点 1 流过负载 $-j10\ \Omega$ 到节点 2 的电流为：

$$\mathbf{I}_{12} = \frac{6 - j3}{6 + j2 - j10} = 0.6 + j0.3\ \text{A}$$

这样，就得到了图 10.29(a)中流过负载 $-j10\ \Omega$ 的电流，不过不能利用图 10.29(d)求出 $\mathbf{V}_1$，因为该电路已不包含参考节点。于是，回到最初的电路，将左边的电流源减去上面得到的 $0.6 + j0.3$ A 电流，得到向下流过$(4 - j2)\ \Omega$ 电阻所在支路的电流为：

$$\mathbf{I}_1 = 1 - 0.6 - j0.3 = 0.4 - j0.3\ \text{A}$$

于是：

$$\mathbf{V}_1 = (0.4 - j0.3) \times (4 - j2) = 1 - j2\ \text{V}$$

与前面得到的结果一致。

假定只对 $\mathbf{V}_1$ 感兴趣，可能会想到对图 10.29(a)右边的三个元件应用诺顿定理，这是一个不错的想法。不过也可以通过反复应用电源变换来简化该电路。因此，在第 4 章和第 5 章讨论过的所有方法和技巧均适用于频域中的电路分析。这里增加的困难在于必须用到复数，但不需要更多的理论考虑。

练习

10.15　如图 10.30 所示电路，(a)求开路电压 $\mathbf{V}_{ab}$；(b)将 ab 用短路线连接，求 a 到 b 的电流；(c)求电流源并联的戴维南等效阻抗 $\mathbf{Z}_{ab}$。

答案：$16.77\angle -33.4°$ V; $2.60+j1.500$ A; $2.5-j5\ \Omega$

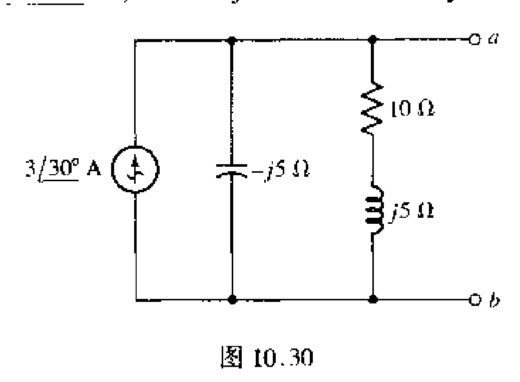


图 10.30

下面来总结一下。到目前为止，所有的讨论均限于单电源电路或者所有电源均工作在同一个频率下的多电源电路，这一点，对于为电感和电容定义确切的阻抗是必须的。不过，很容易将相量分析的概念扩展到对工作在不同频率下的多电源电路的分析上，在这种情况下，可以应用叠加原理来求出由各个电源单独存在时所产生的电压和电流，然后将它们叠加起来而得到。如果其中有几个电源工作在同一个频率下，那么可以同时考虑这些电源，使用叠加原理得到它们的总响应，然后将这个响应与工作在不同频率下的其他电源的响应相加。

例题 10.11 如图 10.31(a)所示电路，求 10 Ω 电阻上消耗的功率

初看这个电路，可能会想到通过写出两个节点方程，或者通过进行两次电源变换来得到 10 Ω 电阻上的电压。

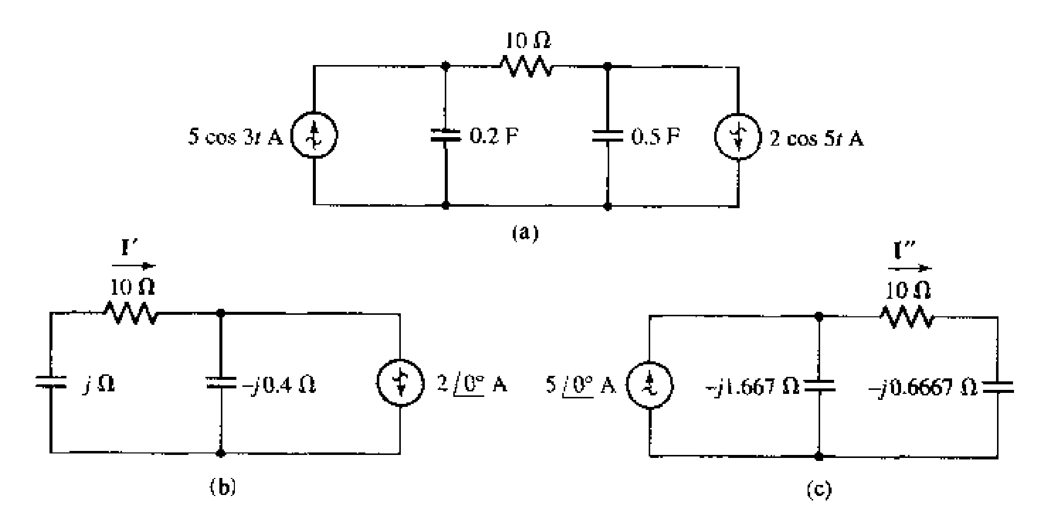


图 10.31 (a) 一个简单电路，其中的两个电源工作在不同频率下；(b)左边电源置零后的电路；(c)右边电源置零后的电路

不过，以上两种想法都不能实现，因为这两个电源工作在不同频率下。在这种情况下，不能求出电路中的任何电容或者电感的阻抗，因为不知道该用哪个 ω。

解决这个困难的惟一途径是利用叠加原理。首先将所有的电源按频率分组，相同频率的电源放到同一个子电路中，如图 10.31(b)和图 10.31(c)所示。

在图 10.31(b)所示的子电路中，利用分流关系，很快就可以求出电流 $\mathbf{I}'$：

$$\mathbf{I}'=2\underline{/0^\circ}\times\left[\frac{-j0.4}{10-j-j0.4}\right]=79.23\underline{/-82.03^\circ}\text{ mA}$$

所以：

$$i'=79.23\cos(5t-82.03^\circ)\text{ mA}$$

类似地，可以得到：

$$\mathbf{I}''=5\underline{/0^\circ}\times\left[\frac{-j1.667}{10-j0.6667-j1.667}\right]=811.7\underline{/-76.86^\circ}\text{ mA}$$

所以：

$$i''=811.7\cos(3t-76.86^\circ)\text{ mA}$$

需要指出的是，根据叠加原理，可以将图 10.31(b)和图 10.31(c)中的两个相量电流 $\mathbf{I}'$和$\mathbf{I}''$加起来。下一步将这两个时域电流加起来，平方，再乘以 10 就得到了图 10.31(a)中 10 Ω 电阻吸收的功率：

$$\begin{aligned}p_{10}&=(i'+i'')^2\times 10\\&=10\times[79.23\cos(5t-82.03^\circ)+811.7\cos(3t-76.86^\circ)]^2\text{ mW}\end{aligned}$$

在后续的信号处理课程中，将介绍傅里叶方法，傅里叶是一位法国数学家，他发明了用正弦组合来表示任意函数的方法。对于线性电路，当知道了电路对一般的正弦激励函数的响应，那么就可以通过将任意激励函数表示成傅里叶级数，再利用叠加原理将电路对激励的响应表示出来。

练习

10.16　如图 10.32 所示电路，求流过 4 Ω 电阻的电流 i。

答案：$i=175.6\cos(2t-20.55^\circ)+547.1\cos(5t-43.16^\circ)$ mA

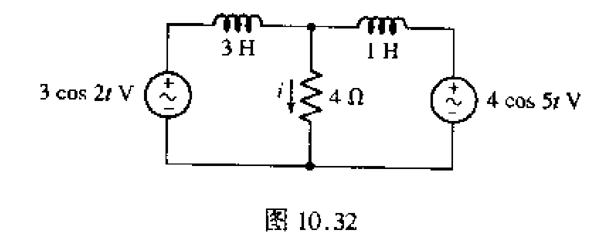


图 10.32

计算机辅助分析

在 PSpice 中，有几种方法可以用做正弦稳态分析，其中最直接的一种方法是使用两种经过特别设计的电源：VAC 和 IAC，双击它们可以设置它们的幅度和相位。

这两个电源的频率不在 Attributes 对话框中设置，而是在设置交流扫描模式时进行。为了设置交流扫描模式，依次选取 Analysis，Setup，AC Sweep，此时弹出一个对话框，如图 10.33 所示。

下面来仿真图 10.19(a)所示的电路，重新画出如图 10.34 所示。

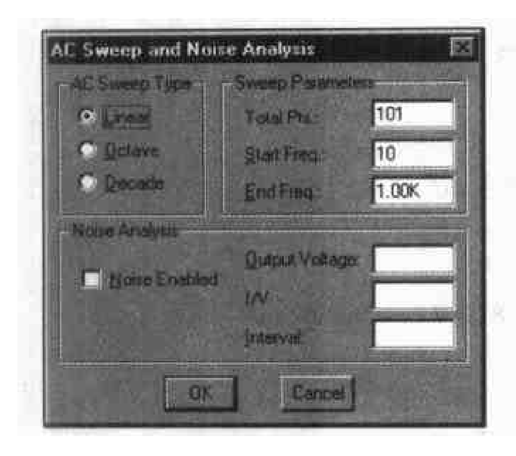


图 10.33 交流扫描对话框

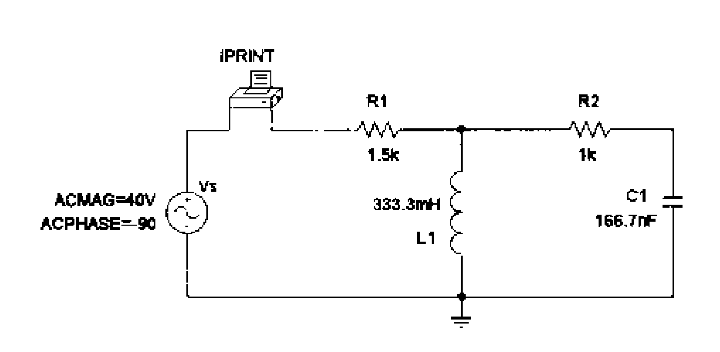


图 10.34 一个工作在 $\omega = 3\,000$ rad/s 下的简单正弦电路，求流过 1.5 kΩ 电阻的电流

将 Total Points 设为 1，同时设置 Start Freq 和 End of Freq 为合适的值，因为电源工作在 3 000 rad/s，所以将这两个参数都取为 $3\,000/(2\pi) = 477.5$ Hz。这样，就完成了对电源的频率设置。

注意，在电路原理图中还使用了一个"元件"，称为 IPRINT，利用它可以打印出多种电流参数。对于这个仿真，我们感兴趣的是 AC，MAG 和 PHASE 的属性，为了让 PSpice 打印出这些参数，在图 10.35 中设置各需要打印的属性为 Yes 即可。

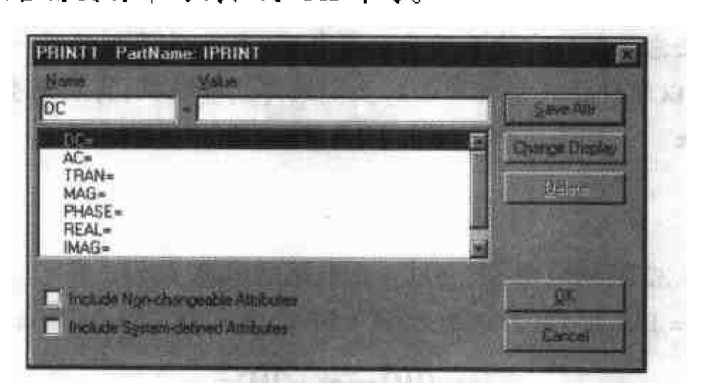


图 10.35 IPRINT 对话框

在 PSpiceAD 窗口中，选择 File 菜单中的 Examine Output 可以得到仿真结果。在这个文件的最后，可以看到以下的信息：

FREQ	IM(V_PRINT1)	IP(V_PRINT1)
4.775E+02	1.600E-02	-1.269E+02

因此，电流的幅度为 16 mA，相角为 $-126.9°$，所以流过 1.5 kΩ 电阻的电流为：

$$i = 16\cos(3\,000t - 126.9°)\ \text{mA}$$
$$= 16\sin(3\,000t - 36.9°)\ \text{mA}$$

10.11 相量图

相量图是复平面中表示电路中相量电压与相量电流关系的图形。可以利用它对某些问题

进行图解，这样可以验证用其他更精确的分析方法得到的结果。在下一章将会遇到类似的图形，用它来表示正弦稳态电路中的复功率关系。

前面已经熟悉了复数在复平面的表示和它们的加减运算。因为相量电压和相量电流均为复数，所以可以用在复平面中的点来表示。例如相量电压 $\mathbf{V}_1 = 6 + j8 = 10\,\underline{/53.1^\circ}$ V 在复电压平面中的表示如图 10.36 所示，其中 x 轴是实电压轴，y 轴是虚电压轴，电压 $\mathbf{V}_1$ 由从原点出发的箭头确定。因为在复平面中很容易进行加减运算并表示出相应的运算过程，所以在相量图中很容易进行相量的加减运算。对于乘法和除法运算，则对应于相量相角的加减和幅度的改变。图 10.37(a)画出了 $\mathbf{V}_1$ 和另一个相量 $\mathbf{V}_2 = 3 - j4 = 5\,\underline{/-53.1^\circ}$ V 的和，图 10.37(b)则画出了相量电流 $\mathbf{I}_1$，它是相量电压 $\mathbf{V}_1$ 于导纳 $\mathbf{Y} = 1 + j1$ S 的乘积。

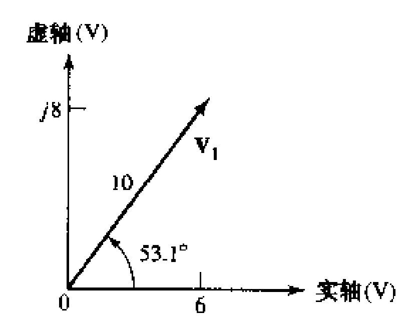


图 10.36 简单的相量图，画出了单个电压相量 $\mathbf{V}_1 = 6 + j8 = \underline{/53.1^\circ}$

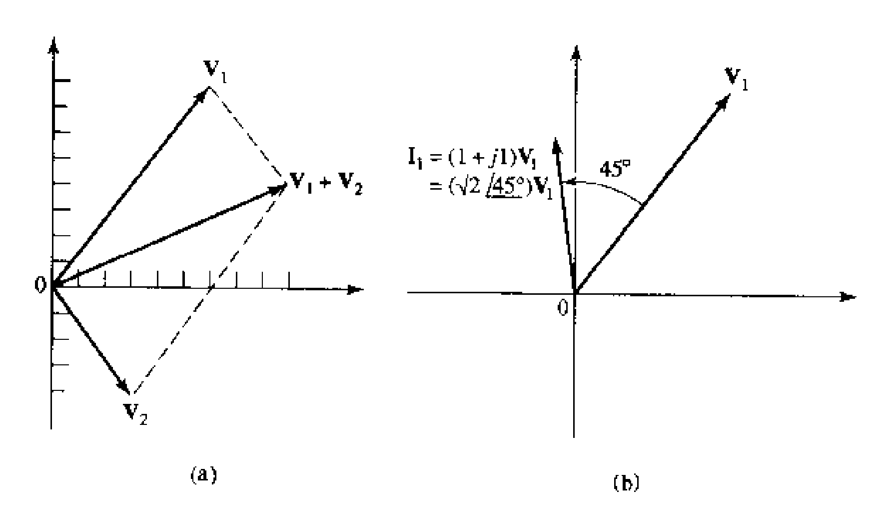


图 10.37 (a)简单的相量图，画出了 $\mathbf{V}_1 = 6 + j8$ V 与 $\mathbf{V}_2 = 3 - j4$ V 的和，即 $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = 9 + j4$ V $= 9.85\,\underline{/24.0^\circ}$；(b)相量图中画出了 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{I}_1$，其中 $\mathbf{I}_1 = \mathbf{Y}\mathbf{V}_1$，$\mathbf{Y} = 1 + j\mathrm{S} = \sqrt{2}\,\underline{/45^\circ}$。这里，电流和电压的幅度标度不同

最后一个图在同一个复平面上画出了相量电流和相量电压，它们的幅度标度不同，但角度标度相同。例如，在复平面中，1 cm 长的相量电压可能代表 100 V，而 1 cm 长的相量电流可能代表 3 mA。将两个相量画在同一个相量图中，可以方便地判断出哪一个波形超前，哪一个波形滞后。

根据相量图可以得到从时域到频域变换的有趣解释。因为既可以从时域的角度来解释，也可以从频域的角度来解释。到目前为止使用的都是频域解释，因为直接将相量在相量图中画出相当于采用了频域解释。下面从时域的角度进行解释。首先来看图 10.38(a)所示的相量电压 $\mathbf{V} = V_m\,\underline{/\alpha}$，为了将它变换到时域，首先将这个相量乘以 $e^{j\omega t}$，得到复电压 $V_m e^{j\alpha} e^{j\omega t} = V_m\,\underline{/\omega t + \alpha}$。这个复电压也可以理解为一个相量，只不过它的相角是变化的，随时间线性增长。于是，在相量图中它表示旋转的线段，其瞬时位置比 $V_m\,\underline{/\alpha}$ 超前 ωt 弧度。图 10.38(b)同时在相量平面中画出了 $V_m\,\underline{/\alpha}$ 和 $V_m\,\underline{/\omega t + \alpha}$。

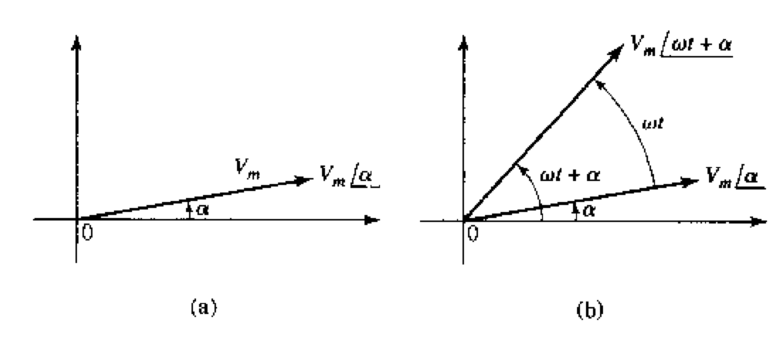


图 10.38 (a)相量电压 $V_m \underline{/\alpha}$;(b)将复电压 $V_m \underline{/\omega t + \alpha}$表示为某特定时刻的相量,这个相量比 $V_m \underline{/\alpha}$超前 ωt 弧度

再对 $V_m \underline{/\omega t + \alpha}$取实部就完成了到时域的变换。这个复量的实部为 $V_m \underline{/\omega t + \alpha}$在实轴上的投影:$V_m \cos(\omega t + \alpha)$。

综上所述,画在相量图中相量即是频域相量,让相量以角速度 ω rad/s 沿逆时针方向旋转,那么它在实轴上的投影即为时域表示。如果将相量图中表示相量 **V** 的箭头想像成旋转的箭头[它在实轴的投影为瞬时电压 $v(t)$在 $\omega t = 0$ 时的快照],将有助于理解以上的内容。

下面来构造几个简单电路的相量图。如图 10.39(a)所示的串联电路包含几个不同的电压,但只包含一个电流。将这个惟一的电流作为参考相量,那么很容易画出其相量图。选取 $\mathbf{I} = I_m \underline{/0°}$,并将它放到相量图中的实轴,如图 10.39(b)所示。然后,可以计算出电阻、电容和电感的电压,并将它们画到相量图中,这时,它们之间相应的 90°相位差关系非常明显。这三个电压的和为电源电压,并且由于 $\mathbf{Z}_C = -\mathbf{Z}_L$,这个电路处于后面将要定义的"谐振"状态,这时电源电压等于电阻电压。通过在相量图中将合适的相量相加,可以得到电阻和电感两端以及电阻和电容两端的总电压,如图 10.39(b)所示。

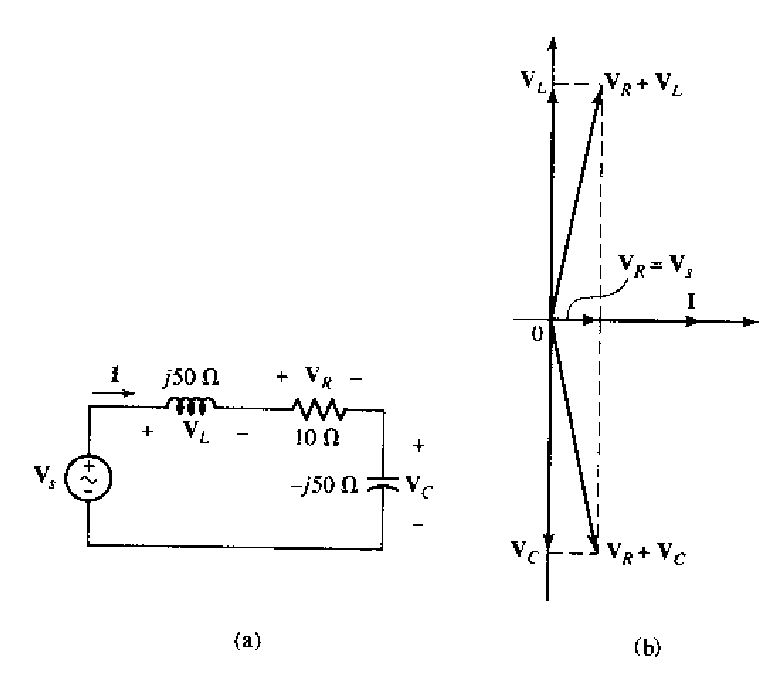


图 10.39 (a)简单串联 *RLC* 电路。(b)电路的相量图,其中为方便起见,选取电流 **I** 作为参考相量

图 10.40(a)是一个简单并联电路，这时，很自然地选取两个节点之间的惟一电压作为参考相量，并假定 $\mathbf{V}=1\angle 0°$。电阻电流为 $\mathbf{I}_R=0.2\angle 0°$，与参考电压同相；电容电流为 $\mathbf{I}_C=j0.1$ A，超前参考电压 90°。在相量图中画出这两个电流之后，得到图 10.40(b)。将这两个电流加起来可以得到电源电流为 $\mathbf{I}_s=0.2+j0.1$ A。

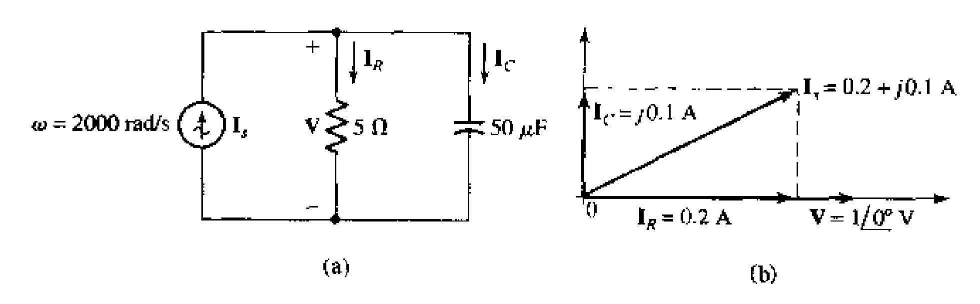


图 10.40　(a)并联 RC 电路；(b)电路的相量图，其中为方便起见，选取节点电压 V 作为参考相量

为方便起见开始时可取电源电流为 $1\angle 0°$，暂时不知道节点电压，那么在这种情况下，可以假定一个节点电压(例如，同样可取 $\mathbf{V}=1\angle 0°$ V)并用它作为参考相量来画相量图。然后，可以采用和以前一样的步骤完成相量图。求出由这个假定节点电压产生的电源电流仍为 $0.2+j0.1$ A，而实际的电源电流为 $1\angle 0°$ A，因此实际的节点电压可以通过将假定节点电压乘以 $1\angle 0°/(02+j0.1)$而得到，为 $4-j2$ V $=\sqrt{20}\angle -26.8°$ V。根据假定参考电压得到的相量图与实际相量图的区别：在尺度上，假定相量图缩小了一个因子 $1/\sqrt{20}$，在相角上，假定相量图逆时针旋转了 26.6°。

通常情况下很容易画出相量图，对于大多数的正弦稳态分析，如果给出这样的相量图，那么将使得分析更为直观。在后面的学习过程中，将会看到很多使用相量图的例子。

例题 10.12　如图 10.41 所示电路，在相量图中画出 $\mathbf{I}_R$，$\mathbf{I}_L$ 和 $\mathbf{I}_C$。通过对这些电流进行组合，确定 $\mathbf{I}_s$ 超前 $\mathbf{I}_R$，$\mathbf{I}_C$ 和 $\mathbf{I}_x$ 的相角

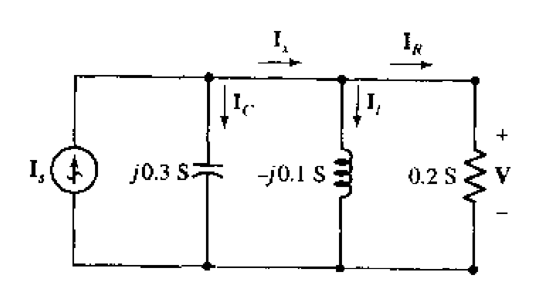


图 10.41　求解几个电流的简单电路

首先，选择合适的参考相量。通过考察该电路和需要求出的量，可以看到，一旦知道 V，利用欧姆定律很容易得到 $\mathbf{I}_R$，$\mathbf{I}_L$ 和 $\mathbf{I}_C$。为方便起见，取 $\mathbf{V}=1\angle 0°$，由此可以计算出：

$$\mathbf{I}_R=(0.2)1\angle 0°=0.2\angle 0°\text{ A}$$

$$\mathbf{I}_L=(-j0.1)1\angle 0°=0.1\angle -90°\text{ A}$$

$$\mathbf{I}_C=(j0.3)1\angle 0°=0.3\angle 90°\text{ A}$$

相应的相量图如图 10.42(a)所示，还需要求出相电流 $\mathbf{I}_s$ 和 $\mathbf{I}_x$。从图 10.42(b)得到 $\mathbf{I}_x=\mathbf{I}_L+\mathbf{I}_R$

$=0.2-j0.1=0.224\underline{/-26.6^\circ}$，从图 10.42(c)得到 $\mathbf{I}_s=\mathbf{I}_C+\mathbf{I}_x=0.283\underline{/45^\circ}$。根据图 10.42(c)可知，$\mathbf{I}_s$ 比 $\mathbf{I}_R$ 超前 45°，比 $\mathbf{I}_C$ 超前 −45°，比 $\mathbf{I}_x$ 超前 $45^\circ+26.6^\circ=71.6^\circ$。不过，需要注意，这里的数值是相对的，其确切值取决于 $\mathbf{I}_s$，也取决于 $\mathbf{V}$ 的真实值(这里为简单起见，假定为 $1\underline{/0^\circ}$)。

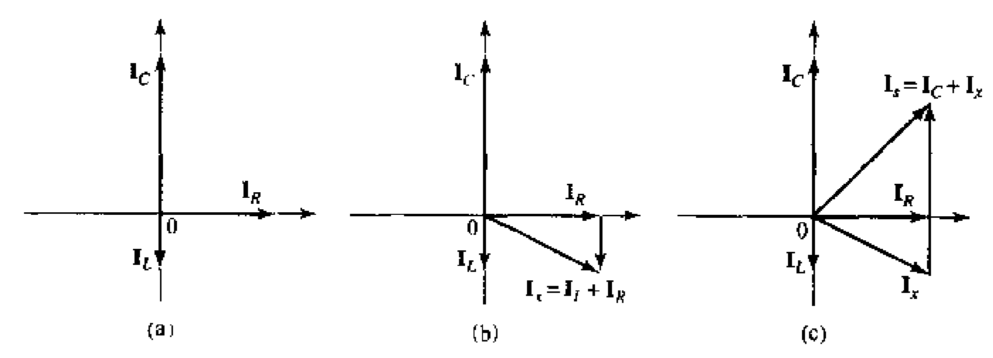


图 10.42　(a)相量图，$\mathbf{V}$ 的参考值为 $\mathbf{V}=1\underline{/0^\circ}$；(b)用图解法求 $\mathbf{I}_x=\mathbf{I}_L+\mathbf{I}_R$；(c)用图解法求 $\mathbf{I}_s=\mathbf{I}_C+\mathbf{I}_x$

练习

10.17　对图 10.43 所示电路，选择一个合适的值作为 $\mathbf{I}_C$ 的参考值，在相量图中画出 $\mathbf{V}_R$，$\mathbf{V}_2$，$\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_s$，并计算出(a) $\mathbf{V}_s$ 和 $\mathbf{V}_1$；(b) $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$；(c) $\mathbf{V}_s$ 和 $\mathbf{V}_R$ 的长度比。

答案：1.90；1.00；2.12

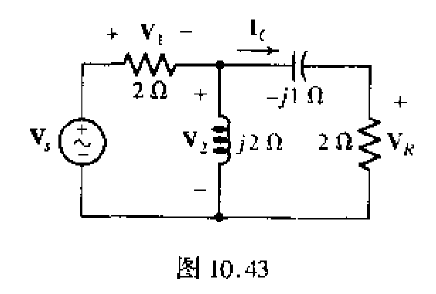


图 10.43

10.12　小结与复习

- 如果两个正弦波(或者两个余弦波)均含有正的幅度和同样大小的频率，那么可以通过比较它们的相位来确定哪个为超前，哪个为滞后。
- 线性电路对正弦电压源或者电流源的受迫响应总可以写成与正弦电源具有相同频率的单个正弦函数的形式。
- 可以对任何正弦源进行相量转换。
- 相量包含幅度和相角，电路的频率为驱动电路的正弦激励源的频率。
- 将时域电路变换到其相应的频域电路时，电阻、电容和电感被替换成阻抗(或者有时为导纳)。
- 电阻的阻抗等于其电阻。
- 电容的阻抗等于 $1/j\omega C$ Ω。

- 电感的阻抗等于 $j\omega L$ Ω。
- 阻抗的串联和并联组合方式均与电阻相同。
- 当电路中的电容及(或)电感均替换成了它们的频域等效时,前面应用于电阻电路的所有分析方法均适用。
- 相量分析只能应用于单频率电路中,对于非单频率电路,必须使用叠加原理,将各时域部分响应相加而得到完全响应。

习题

1. 某个正弦波 $f(t)$起始为零,从 $t=2.1$ ms 开始增加,并且随后在 $t=7.5$ ms 到达正的最大幅值 8.5。将该正弦波 $f(t)$表示为下面的形式:(a) $C_1\sin(\omega t+\phi)$,其中 ϕ 为正量,并尽可能地小,以度为单位;(b) $C_2\cos(\omega t+\beta)$,其中 β 具有最小可能的值,以度为单位;(c) $C_3\cos\omega t+C_4\sin\omega t$。
2. (a)如果 $-10\cos\omega t+4\sin\omega t=A\cos(\omega t+\phi)$,其中 $A>0$, $-180°<\phi\leqslant180°$,求 A 和ϕ;(b)如果 $200\cos(5t+130°)=F\cos5t+G\sin5t$,求 F 和 G;(c)求出位于区间 $0\leqslant t\leqslant1$s 内的三个 t 值,使得 $i(t)=5\cos10t-3\sin10t=0$;(d)在 $t=0$ 到 $t=10$ ms 范围内,怎样的时间区间使得 $10\cos100\pi t\geqslant12\sin100\pi t$?
3. 给定两个正弦波,$f(t)=-50\cos\omega t-30\sin\omega t$ 和 $g(t)=55\cos\omega t-15\sin\omega t$,求(a)它们的幅度和(b)$f(t)$超前 $g(t)$的相角。
4. 把式(10.3)中假定的电流响应 $i(t)=A\cos(\omega t-\theta)$直接代入到微分方程 $L(di/dt)+Ri=V_m\cos\omega t$ 中,验证由此得到的 A 和 θ 满足式(10.4)。
5. 某电源产生的电压可用余弦波 $V_m\cos(\omega t+\phi)$来描述,频率为 13.56 MHz。如果该电源传送到 5 Ω 负载上的最大功率为 300 W,并且该电压在 $t=21.15$ ms 时达到最大值,则 V_m,ω 和ϕ 为多大?
6. 比较下面的各对波形,并判断那一个为超前:(a) $-33\sin(8t-9°)$和 $12\cos(8t-1°)$;(b) $15\cos(1\,000°t+66°)$和 $-2\cos(1\,000t+450°)$;(c) $\sin(t-13°)$和 $\cos(t-90°)$;(d)$\sin t$ 和 $\cos(t-90°)$。
7. 判断以下各对波形中那一个为超前:(a)$6\cos(2\pi60t-9°)$和 $-6\cos(2\pi60t+9°)$;(b)$\cos(t-100°)$和 $-\cos(t-100°)$;(c) $-\sin t$ 和 $\sin t$;(d)$7\,000\cos(t-\pi)$和 $9\cos(t-3.14°)$。
8. 验证电压 $v(t)=V_1\cos\omega t-V_2\sin\omega t$ 可以写成单个余弦函数 $V_m\cos(\omega t+\phi)$的形式,并导出 V_m 和ϕ 的正确表达式。
9. 傅里叶定理无论在科学上,还是工程上都是有用的工具,它表明如图 10.44 所示的周期波形等于下面无限项的和:

$$v(t)=\frac{8}{\pi^2}\left(\sin\pi t-\frac{1}{3^2}\sin3\pi t+\frac{1}{5^2}\sin5\pi t-\frac{1}{7^2}\sin7\pi t+\cdots\right)$$

(a)计算 $v(t)$在 $t=0.4$ s 时的精确值,并用上面的傅里叶级数来估算 $v(t)$的值;(b)仅用第一项;(c)仅用前四项;(d)仅用前五项。

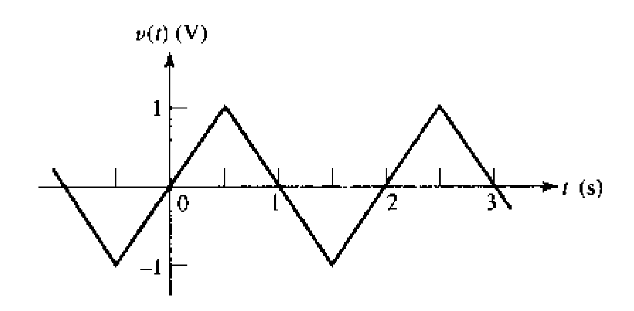


图 10.44

10. 典型的家用电压为 110 V,115 V 或 120 V(北美),不过这些值并不代表交流峰值电压,更确切的是代表电压的均方根值,定义为:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V_m^2 \cos^2(\omega t)\, dt}$$

其中 T 为波形的周期,V_m 为峰值电压,ω 为波形频率(在北美,$f = 60$ Hz)。

(a)计算出式中的积分,验证对于正弦电压有:

$$V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

(b)当均方根(rms)电压为 110 V,115 V 和 120 V 时,计算峰值电压。

11. 如图 10.45 所示电路,设 $v_s = 20 \cos 500t$ V,先对该电路进行简化,然后求出 $i_L(t)$。

12. 如图 10.46 所示电路,如果 $i_s = 0.4 \cos 500t$ A,简化该电路直至如图 10.4 所示的形式,然后求出(a)$i_L(t)$;(b)$i_x(t)$。

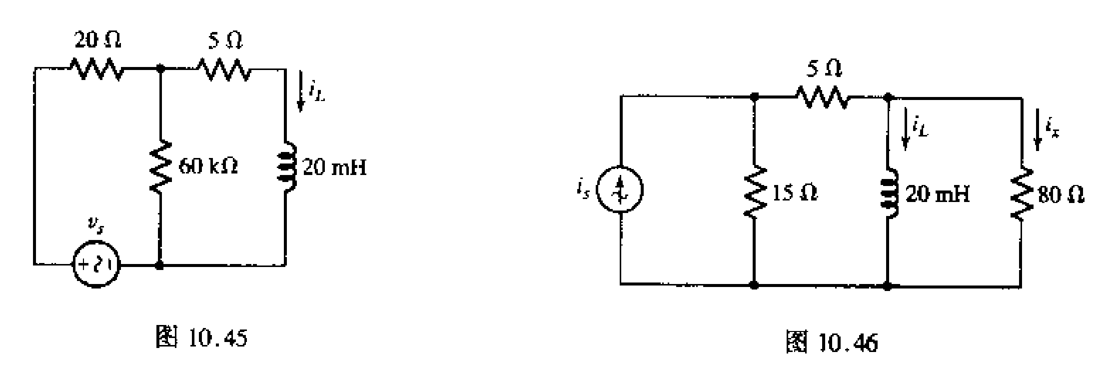


图 10.45　　图 10.46

13. 正弦电压源 $v_s = 100 \cos 10^5 t$ V 与一个 500 Ω 电阻和 8 mH 电感串联,确定 $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}T$ 内的时刻,使得:(a)传送到电阻的功率为零;(b) 传送到电感的功率为零;(c) 电源产生的功率为零。

14. 如图 10.47 所示电路,设 $v_s = 3 \cos 10^5 t$ V 和 $i_s = 0.1 \cos 10^5 t$ A。对电路应用叠加原理和戴维南定理,求出 $t = 10\ \mu s$ 时 i_L 和 v_L 的瞬时值。

15. 如图 10.48 所示电路,求 $i_L(t)$。

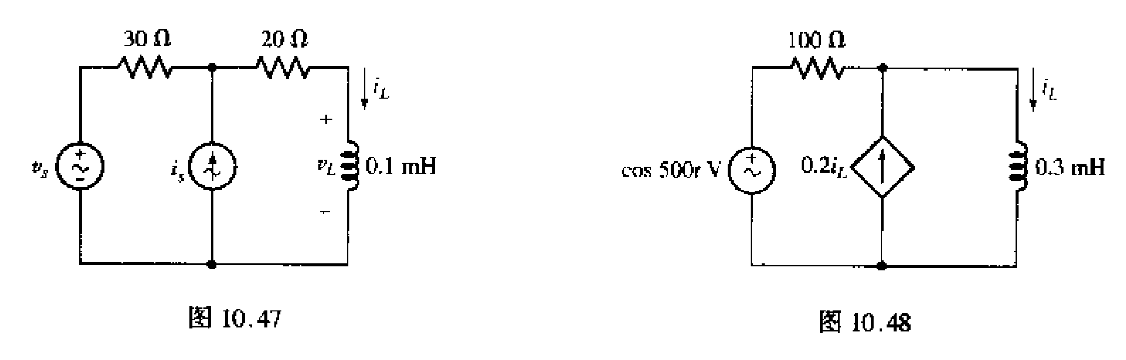


图 10.47　　图 10.48

16. 图 10.49 所示电路中的两个电压源均为 $120\cos 120\pi t$ V。(a)求出电感储存的能量的瞬时值表达式;(b)利用它求出储存能量的平均值。

17. 在图 10.49 的电路中,电压源为 $v_{s1}=120\cos 400t$ V 和 $v_{s2}=180\cos 200t$ V,求向下流过电感的电流。

18. 假定图 10.50 中的运放为理想运放(即 $R_i=\infty$, $R_o=0$ 以及 $A=\infty$),并注意到积分器的输入端接有两个输入:$-V_m\cos\omega t$ 和 v_{out}。如果乘积 R_1C_1 等于图 10.4 所示电路中的比值 L/R,验证 v_{out} 等于图 10.4 中电阻 R(参考符号"+"位于左边)两端的电压。

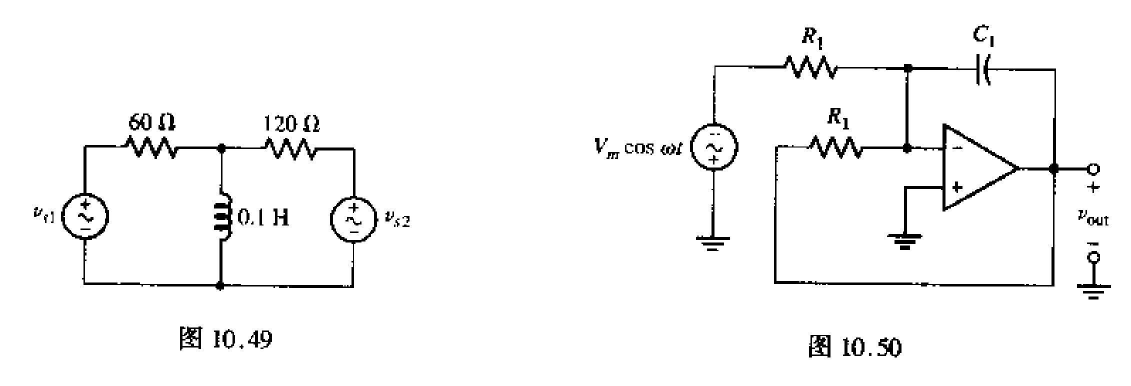


图 10.49　　图 10.50

19. 电压源 $V_m\cos\omega t$ 与电阻 R 和电容 C 相串联。(a)写出以回路电流 i 表示的积分微分方程,然后对它求导得到电路的微分方程;(b)假定一个受迫响应 $i(t)$ 的合适的一般形式,然后将它代入微分方程求出 $i(t)$ 的精确形式。

20. 将下面各式转换为直角坐标形式:(a)$7\angle -90°$;(b)$3+j+7\angle -17°$;(c)$14e^{j15°}$;(d)$1\angle 0°$;将下面各式转换为极坐标形式,(e)$-2(1+j9)$;(f)3。

21. 进行下面所示的运算,并将答案表示为单个复数的直角坐标形式:(a)$3+15\angle -23°$;(b)$12j\times(17\angle 180°)$;(c)$5-16\times\dfrac{(1+j)\times(2-j7)}{33\angle -9°}$。

22. 进行下面所示的运算,并将答案表示为单个复数的极坐标形式:(a)$5\angle 9°-9\angle -17°$;(b)$(8-j15)\times(4+j16)-j$;(c)$\dfrac{(14-j9)}{(2-j8)}+5\angle -30°$;(d)$17\angle -33°+6\angle -21°+j3$。

23. 将下面各式表示为单个复数的极坐标形式:

(a)$e^{j14°}+9\angle 3°-\dfrac{8-j6}{j^2}$;(b)$\dfrac{5\angle 30°}{2\angle -15°}+\dfrac{2e^{j5°}}{2-j2}$。

24. 将下面的复数转换为直角坐标形式:(a)$5\angle -110°$;(b)$6e^{j160°}$;(c)$(3+j6)\times(2\angle 50°)$;(d)$-100-j40$;(e)$2\angle 50°+3\angle -120°$。

25. 进行下面各式中的运算，并将结果表示为极坐标形式：(a)$40\underline{/-50^\circ}-18\underline{/25^\circ}$；(b)$3+\dfrac{2}{j}+\dfrac{2-j5}{1+j2}$，将下式表示为直角坐标形式：(c)$(2.1\underline{/25^\circ})^3$；(d)$0.7e^{j0.3}$。

26. 在图 10.51 所示电路中，设 i_C 的复响应表示为 $20e^{j(40t+30^\circ)}$，将 v_s 表示为复激励函数。

27. 在图 10.52 所示电路中，设电流 i_L 的复响应表示为 $20e^{j(10t+25^\circ)}$ A，将电流源 $i_s(t)$ 表示为复激励函数。

28. 在线性网络中，如图 10.8 所示的网络，正弦电压源 $v_s=80\cos(500t-20^\circ)$ V 产生的输出电流为 $i_{out}=5\cos(500t+12^\circ)$ A。求 i_{out}，如果 v_s 等于：(a) $40\cos(500t+10^\circ)$ V；(b) $40\sin(500t+10^\circ)$ V；(c)$40e^{j(500t+10^\circ)}$ V；(d) $(50+j20)e^{j500t}$ V。

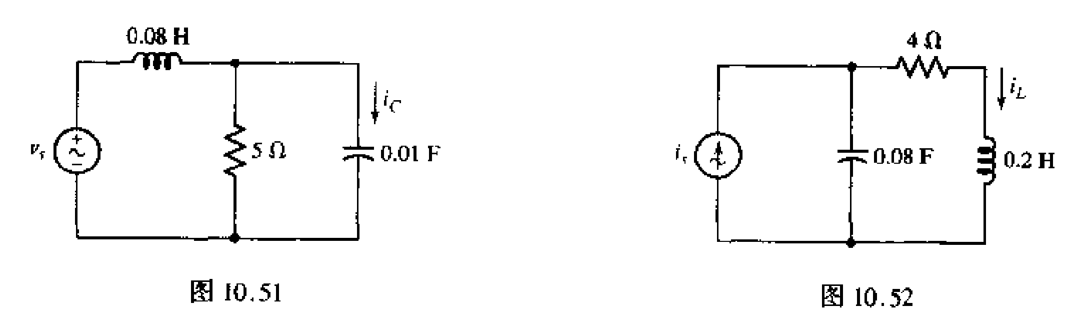


图 10.51

图 10.52

29. 将下列的电流表示成相量：(a)$12\sin(400t+110^\circ)$ A；(b)$-7\sin 800t-3\cos 800t$ A；(c) $4\cos(200t-30^\circ)-5\cos(200t+20^\circ)$ A。如果 $\omega=600$ rad/s，求 $t=5$ ms 时下列各电压的瞬时值：(d)$70\underline{/30^\circ}$ V；(e) $-60+j40$ V。

30. 设 $\omega=4$ krad/s，如果 $\mathbf{I}_x$ 等于(a)$5\underline{/-80^\circ}$ V；(b) $-4+j1.5$ A，求 $t=1$ ms 时 i_x 的瞬时值。如果 $v_x(t)$等于(c)$50\sin(250t-40^\circ)$ V；(d)$20\cos 108t-30\sin 108t$ V；(e)$33\cos(80t-50^\circ)+41\cos(80t-75^\circ)$ V，分别将相量电压 $\mathbf{V}_x$ 表示为极坐标形式。

31. 将 $\omega=500$ rad/s 时的相量电压 $\mathbf{V}_1=10\underline{/90^\circ}$ 与 $\omega=1\ 200$ rad/s 时的相量电压 $\mathbf{V}_2=8\underline{/90^\circ}$ mV在某个运放电路中相加。如果运放将输入放大 -5 倍，求 $t=0.5$ ms 时电路的输出。

32. 如图 10.53 所示电路，如果 $\omega=500$ rad/s 和 $\mathbf{I}_L=2.5\underline{/40^\circ}$，求 $v_s(t)$。

33. 如图 10.54 所示电路，设 $\omega=5$ krad/s，求(a)$v_1(t)$；(b)$v_2(t)$；(c)$v_3(t)$。

34. $1\underline{/0^\circ}$的相量电流流过 1 Ω，1 H 和 1 F 的串联组合，在多大的频率下，网络两端的电压大小为电阻两端电压的两倍？

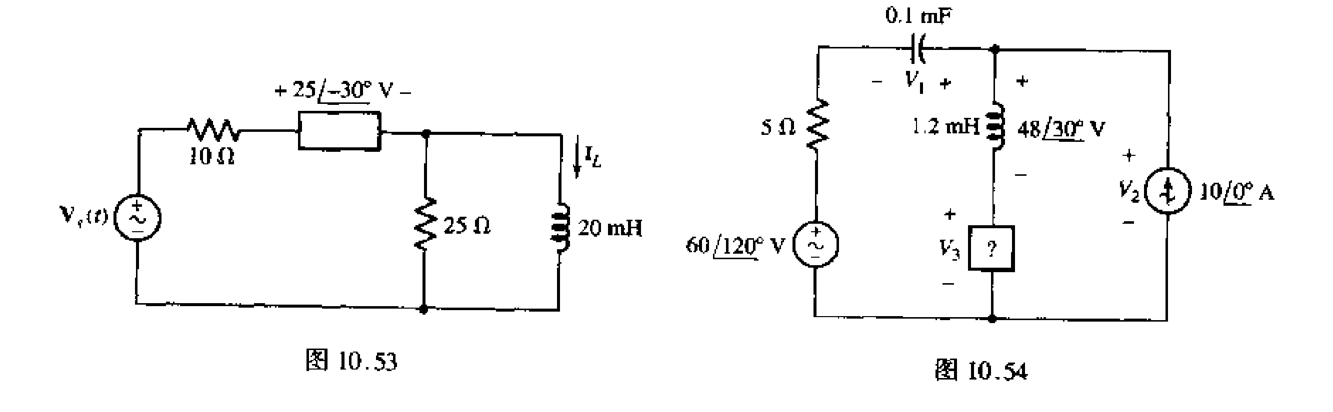


图 10.53

图 10.54

35. 如图 10.55 所示电路，求 v_x。

36. 某个带有黄色条纹的黑盒子包含两个电流源 $\mathbf{I}_{s1}$ 和 $\mathbf{I}_{s2}$，输出电压设为 $\mathbf{V}_{out}$。如果 $\mathbf{I}_{s1} = 2\angle 20^\circ$ A和 $\mathbf{I}_{s2} = 3\angle -30^\circ$ A，那么 $\mathbf{V}_{out} = 80\angle 10^\circ$ V。如果 $\mathbf{I}_{s1} = \mathbf{I}_{s2} = 4\angle 40^\circ$ A，那么 $\mathbf{V}_{out} = 90 - j30$ V。如果 $\mathbf{I}_{s1} = 2.5\angle -60^\circ$ A 和 $\mathbf{I}_{s2} = 2.5\angle 60^\circ$ A，求 $\mathbf{V}_{out}$。

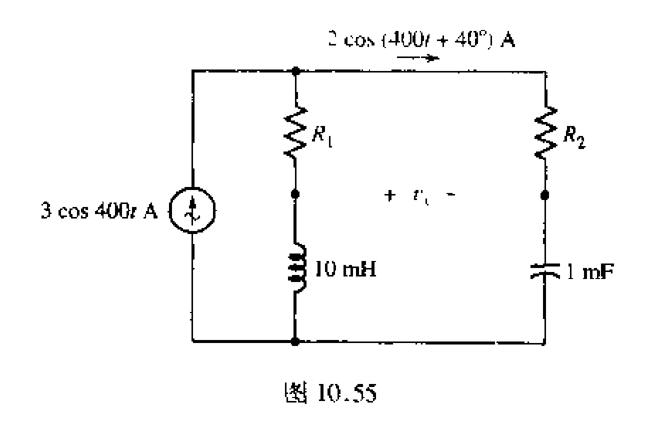


图 10.55

37. 求图 10.56 中 a 和 b 两端的 $\mathbf{Z}_{in}$，如果 ω 等于(a)800 rad/s；(b)1 600 rad/s。

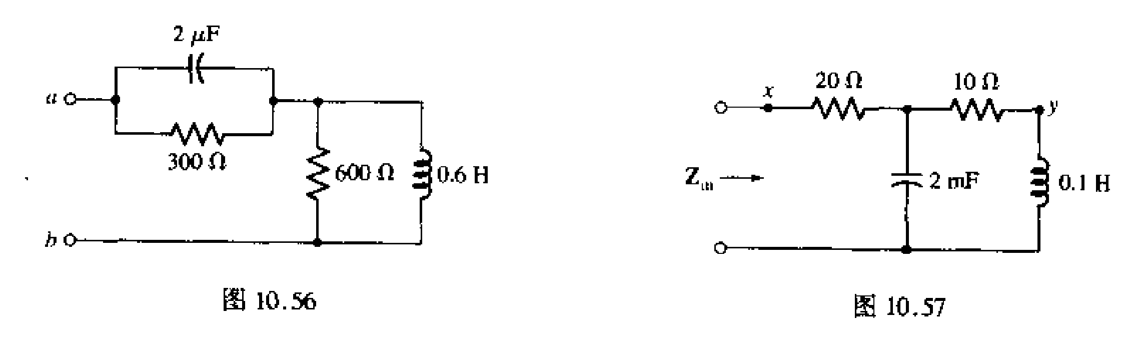


图 10.56　　图 10.57

38. 设图 10.57 中 $\omega = 100$ rad/s，求(a)$\mathbf{Z}_{in}$；(b)如果从 x 到 y 连接一条短路线，求 $\mathbf{Z}_{in}$。

39. 电压源 $v_s = 120\cos 800t$ V 接到图 10.56(参考"+"端位于上端)中的 a 和 b 端，那么向右边流过 300 Ω 电阻的电流为多大？

40. 求图 10.58 中的 $\mathbf{V}$，如果盒子中包含为(a)3 Ω 与 2 mH 串联；(b) 3 Ω 与 125 μF 串联；(c) 3 Ω，2 mH 和 125 μF 串联；(d) 3 Ω，2 mH 和 125 μF 串联，但是这时 $\omega = 4$ krad/s。

41. 10 H 电感与 200 Ω 电阻、电容 C 并联。(a)如果 $C = 20$ μF，求该并联组合在 $\omega = 100$ rad/s时的阻抗；(b)如果阻抗的大小在 $\omega = 100$ rad/s 时为 125 Ω，求 C；(c)如果 $C = 20$ μF，ω 为哪两个值，使得阻抗的大小等于 100 Ω？

42. 20 mH 电感和 30 Ω 电阻并联，分别求频率 ω，当：(a)$|\mathbf{Z}_{in}| = 25$ Ω；(b)angle($\mathbf{Z}_{in}$) = 25°；(c)Re($\mathbf{Z}_{in}$) = 25 Ω；(d)Im($\mathbf{Z}_{in}$) = 10 Ω。

43. 求图 10.55 所示电路的 R_1 和 R_2。

44. 某网络由两个元件组成，在 $\omega = 1\,200$ rad/s 时输入阻抗为 $200 + j80$ Ω。将多大的电容并联到该网络使得输入阻抗为(a)零阻抗？(b)大小为 100 Ω？

45. 如图 10.59 所示网络，如果端 a 和端 b 间为(a)开路；(b)短路，求 $\omega = 4$ rad/s 时的 $\mathbf{Z}_{in}$。

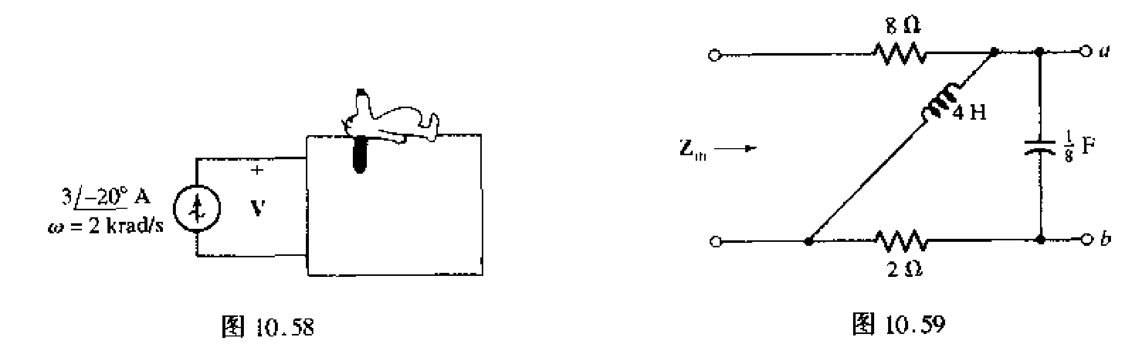


图 10.58　　图 10.59

46. 求图 10.60 所示网络的等效阻抗，假定频率 $f = 1$ MHz。

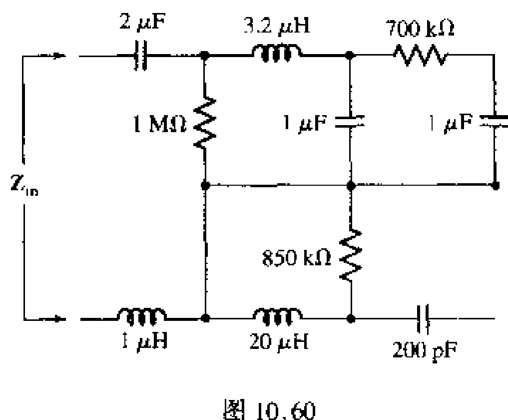


图 10.60

47. 求图 10.61 所示网络的导纳 $\mathbf{Y}_{ab}$，并将它画成电阻 R 和电感 L 的并联组合；如果 $\omega = 1$ rad/s，求出 R 和 L 的值。

48. 5 Ω 电阻，20 mH 电感和 2 mF 电容组成一个串联网络，该网络的两端为 a 和 b。(a)利用导纳，确定在 a 和 b 之间需要并联一个多大的电容，使得 $\omega = 500$ rad/s 时 $\mathbf{Z}_{in,ab} = R_{in,ab} + j0$；(b) $R_{in,ab}$ 的值为多少？(c)并联上该电容 C，则 $\omega = 100$ rad/s 时 $\mathbf{Y}_{in,ab}$ 的值为多少？

49. 如图 10.62 所示网络，分别求出频率的大小，使得处于该频率时(a) $R_{in} = 550$ Ω；(b) $X_{in} = 50$ Ω；(c) $G_{in} = 1.8$ mS；(d) $B_{in} = -150$ μS。



图 10.61　　图 10.62

50. 两个导纳 $\mathbf{Y}_1 = 3 + j4$ mS 与 $\mathbf{Y}_2 = 5 + j2$ mS 并联，第三个导纳 $\mathbf{Y}_3 = 2 - j4$ mS 与该并联组合串联。如果流过 $\mathbf{Y}_1$ 的电流为 $\mathbf{I}_1 = 0.1\angle 30°$，求在下列各量两端的电压大小：(a) $\mathbf{Y}_1$；(b) $\mathbf{Y}_2$；(c) $\mathbf{Y}_3$；(d)整个网络。

51. 10 Ω 电阻和 50 μF 电容的并联组合在 $\omega = 1$ krad/s 时的导纳与相同频率下 R_1 和 C_1 的串联组合相等。(a)求 R_1 和 C_1；(b)如果 $\omega = 2$ krad/s，重做本题。

52. 某笛卡儿坐标平面包含一条水平轴，它表示 G_{in}，单位为西门子；平面内还有一条垂直轴，它表示 B_{in}，也以西门子为单位。设 $\mathbf{Y}_{in}$ 表示 1 Ω 电阻和 0.1 F 电容的串联组合。(a)求出 $\mathbf{Y}_{in}$，G_{in} 和 B_{in} 随 ω 变化的函数表达式；(b)分别在平面上标出频率 $\omega = 0,1,2,5,10,20$ 和 10^6 rad/s 时的坐标对(G_{in}，B_{in})。
53. 如图 10.63 所示电路，利用相量和节点分析法求出 $\mathbf{V}_2$。
54. 如图 10.63 所示电路，利用相量和网孔分析法求出 $\mathbf{I}_B$。
55. 如果 $v_{s1} = 20\cos 1\,000t$ V 和 $v_{s2} = 20\sin 1\,000t$ V，求出图 10.64 所示电路中的 $v_x(t)$。

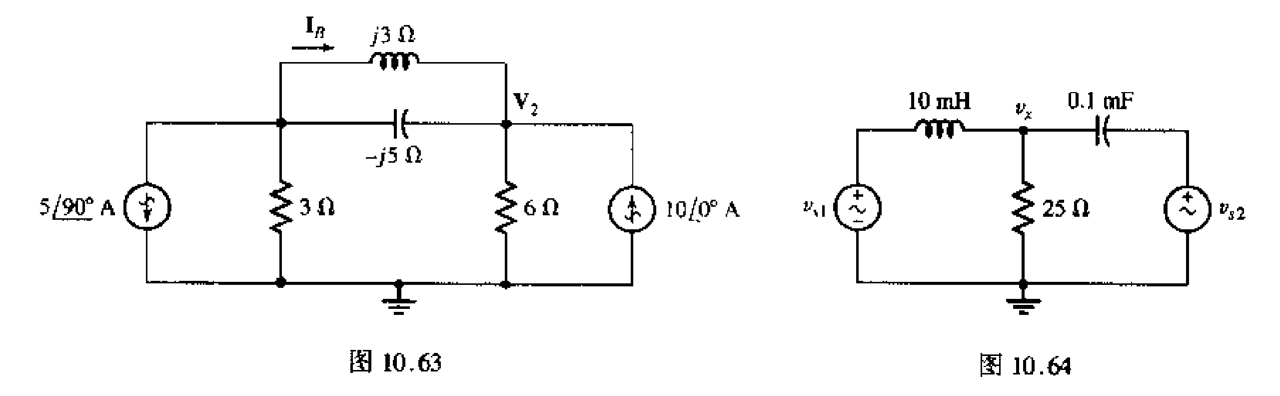


图 10.63　　图 10.64

56. (a)求图 10.65 所示电路中的 $\mathbf{V}_3$；(b)三个容性阻抗的值需要改为多大，以使得 $\mathbf{V}_3$ 与电源电压的相位差为 180°?
57. 利用网孔分析法，求图 10.66 所示电路中的 $i_x(t)$。

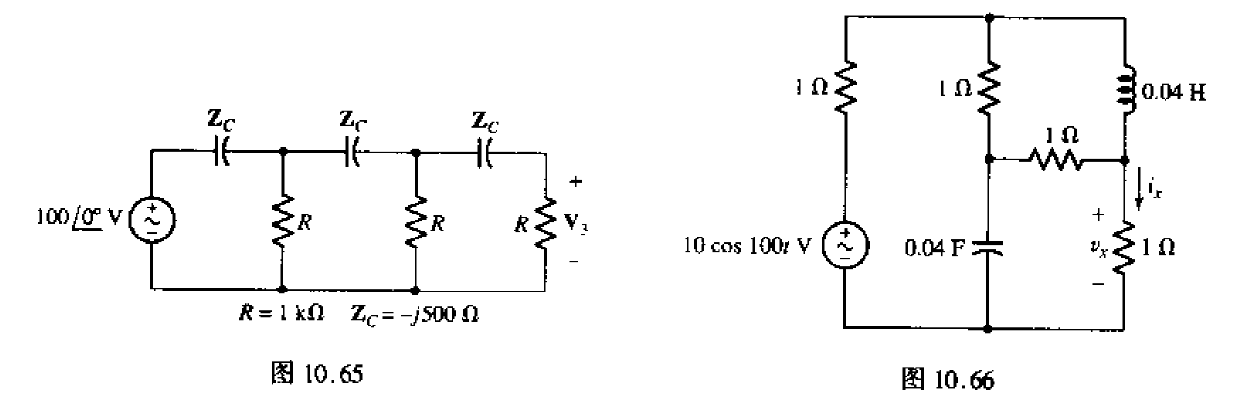


图 10.65　　图 10.66

58. 利用相量和节点分析法，求图 10.66 所示电路中的 $v_x(t)$。
59. 假定图 10.67 中的运放输入阻抗为无限大，输出阻抗为零，增益很大但有限(正的和实的)，为 $A = -\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_i$。(a)令 $\mathbf{Z}_f = \mathbf{R}_f$，构造出一个基本微分电路来求出 $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$，并验证当 $A\to\infty$ 时 $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s \to -j\omega C_1 R_f$；(b)设 $\mathbf{Z}_f$ 表示 C_f 与 R_f 的并联，求 $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$，并验证当 $A\to\infty$ 时 $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s \to -j\omega C_1 R_f/(1+j\omega C_f R_f)$。
60. 如图 10.68 所示电路，求电压 v_2。
61. 计算 $t = 1$ ms 时图 10.69 所示电路中 1 kΩ 电阻消耗的功率。
62. 利用相量分析求出图 10.70 所示电路中的三个网孔电流 $i_1(t)$，$i_2(t)$和 $i_3(t)$。

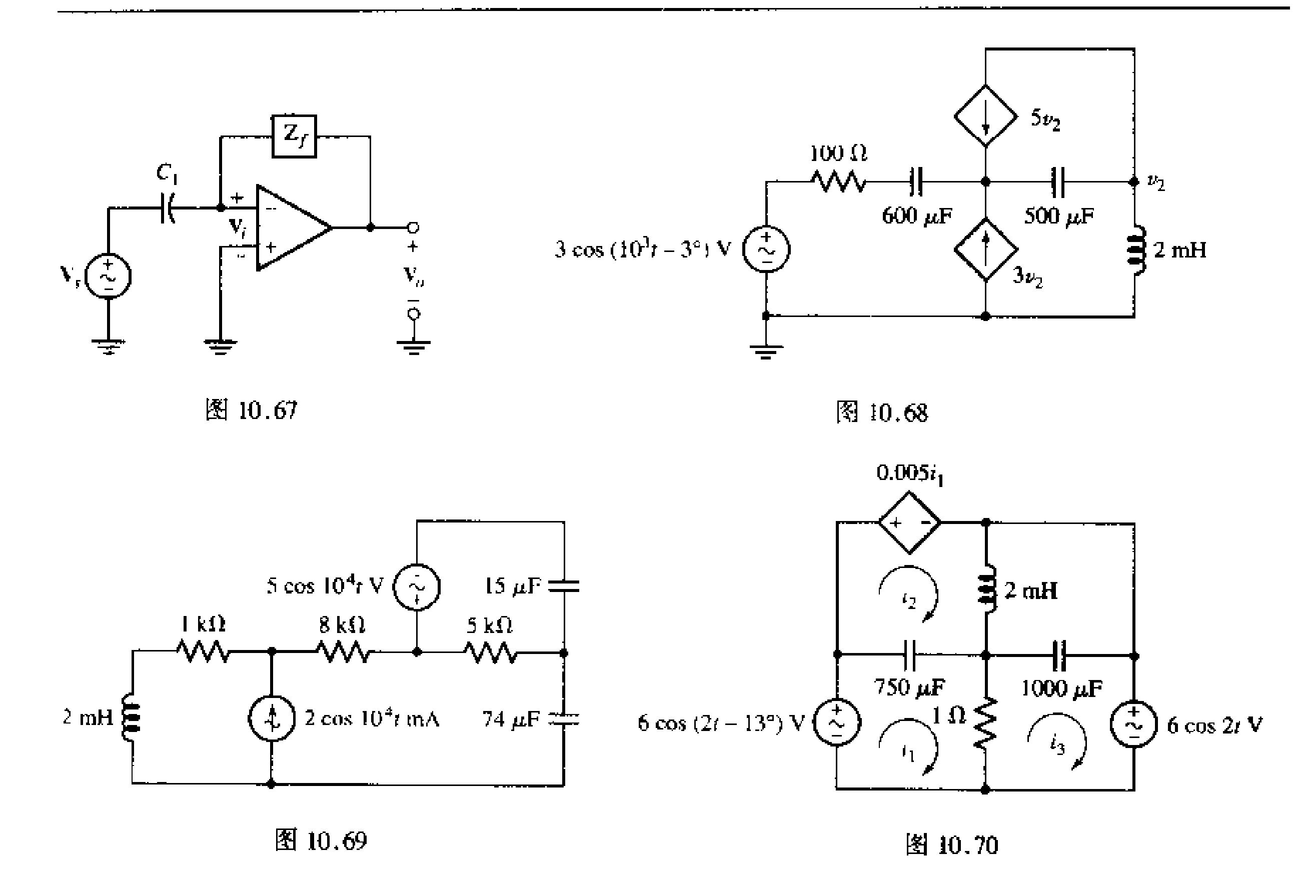


图 10.67　　图 10.68

图 10.69　　图 10.70

63. 在图 10.71 的电路中，电压 $v_1(t)=6.014\cos(2\pi t+85.76°)$伏，则电容 C_1 的值为多少？

64. 在图 10.72 的电路中，电流 $i_1(t)=8.132\cos 2\pi t$ A，则电感 L_1 的值为多少？

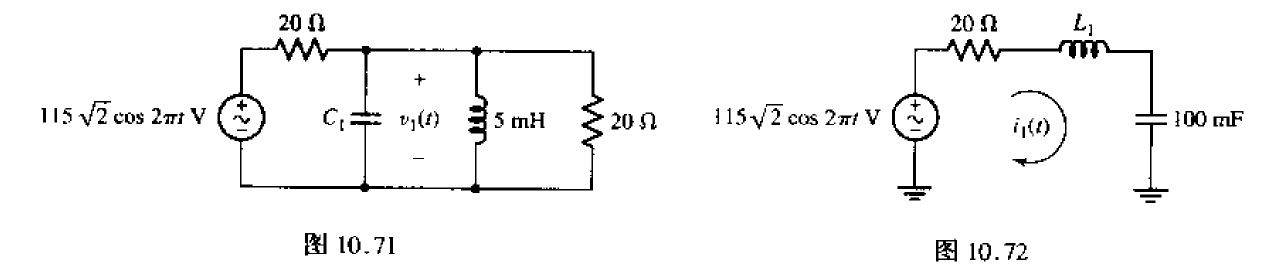


图 10.71　　图 10.72

65. 参看图 10.25(b)所示的晶体管放大电路。(a)导出输出的相角随频率变化的函数关系，假定输入信号为 $\mathbf{V}_s=1\angle 0°$ V；(b) 采用半对数坐标标度，在频率 100 Hz 到 10 GHz 的频率间隔内画出该函数的曲线。这里取 $R_s=300\ \Omega$，$R_B=5\ \text{k}\Omega$，$r_\pi=2.2\ \text{k}\Omega$，$C_\pi=5$ pF，$C_\mu=2$ pF，$g_m=38$ mS，$R_C=4.7\ \text{k}\Omega$ 和 $R_L=1.2\ \text{k}\Omega$；(c)在哪个频率范围内，输出与输入的相差精确为 180°？以及近似从哪个频率开始，相位关系开始改变？

66. 求出图 10.73 所示网络的频域戴维南等效电路，并将结果表示为 $\mathbf{V}_{th}$ 串联 $\mathbf{Z}_{th}$ 的形式。

67. 求图 10.74 所示电路的输入导纳，并将它表示为电阻 R 和电感 L 并联的形式，如果 $\omega=1$ rad/s，求出 R 和 L 的值。

68. 参看图 10.75 所示电路，利用叠加原理，分别求出 $v_1(t)$中(a)仅电压源起作用；(b)仅电流源起作用时所产生的部分。

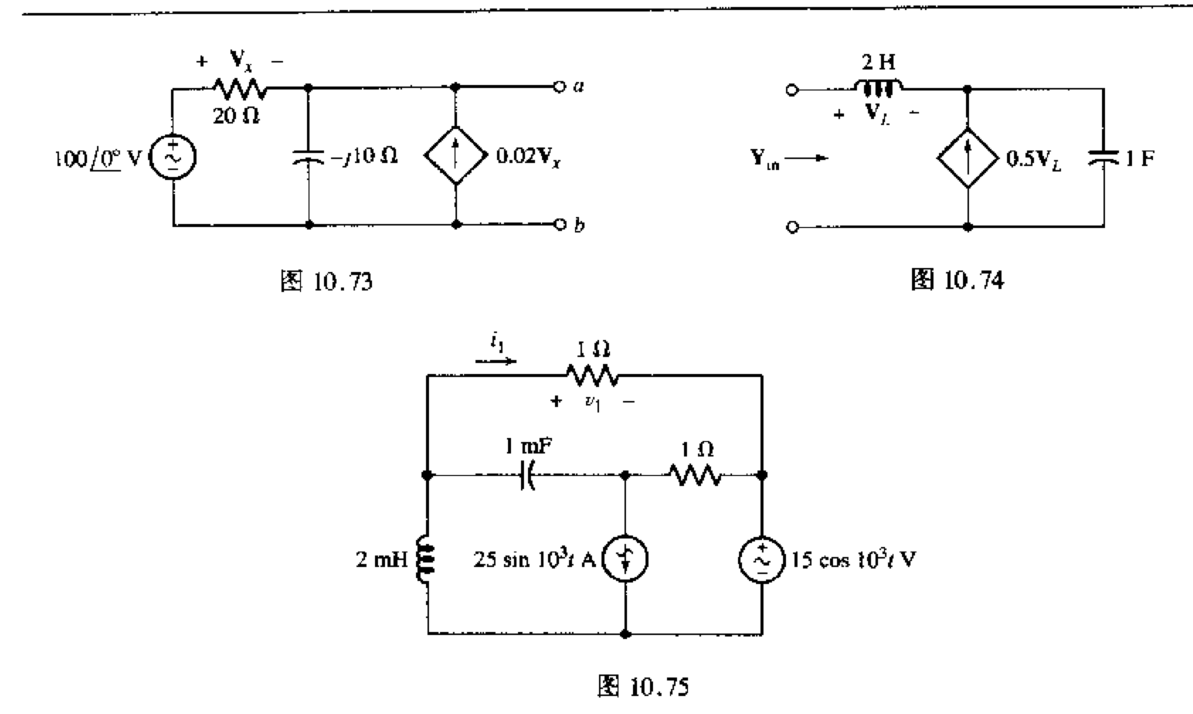


图 10.73

图 10.74

图 10.75

69. 设 $\omega = 1$ rad/s，求出图 10.76 所示网络的诺顿等效电路，并将诺顿等效表示为电流源 $\mathbf{I}_N$ 与电阻 R_N，电感 L_N 或者电容 C_N 并联的形式。

70. 图 10.77 中，设 $i_{s1} = 2\cos 200t$ A，$i_{s2} = 1\cos 100t$ A 和 $v_{s3} = 2\sin 200t$ V，求 $v_L(t)$。

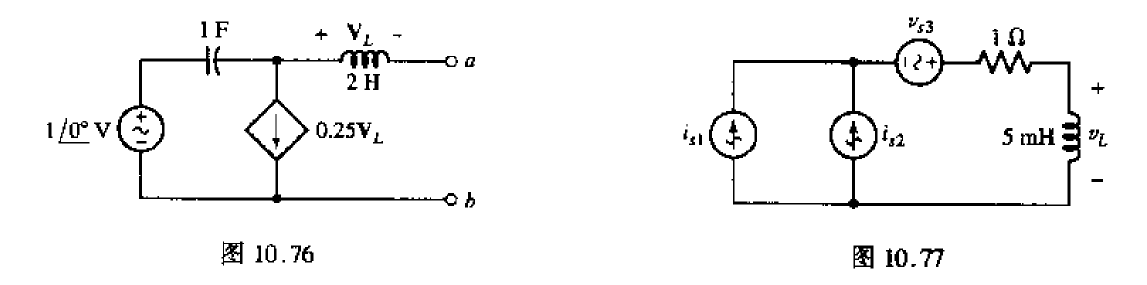


图 10.76

图 10.77

71. 求出图 10.78 所示电路的戴维南等效电路。

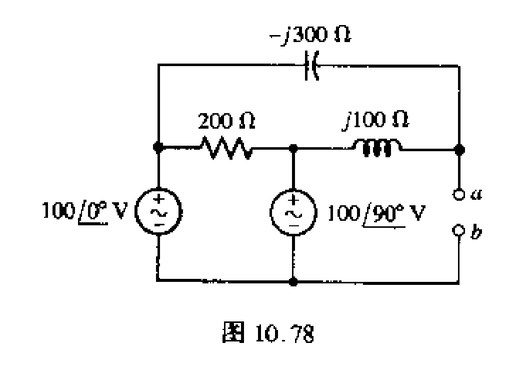


图 10.78

72. 求出图 10.79 中从电压源流出的电流 $i(t)$。

73. (a)求出图 10.80 中 3 F 电容两端的电压；(b)用 PSpice 验证你的答案。

74. (a)求图 10.21 中 $j5\ \Omega$ 电感所看到的戴维南等效电路；(b)假定频率为 100 rad/s，用 PSpice 验证你的答案。

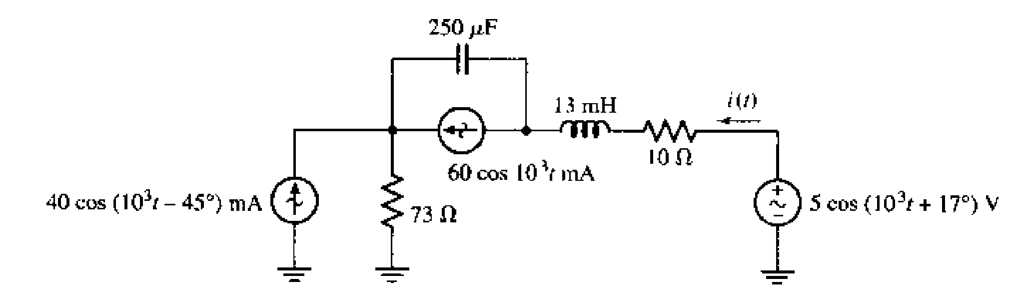


图 10.79

75. 使用一个电阻,一个电容,一个正弦电压源,利用分压关系,设计一个可以滤掉高频的电路(提示:将两个无源元件中的一个电压定义为输出电压,将正弦电压源看做输入。这里的"滤掉"理解为输出电压减小)。

76. 使用一个电阻,一个电容,一个正弦电压源,利用分压关系,设计一个可以滤掉低频的电路(提示:将两个无源元件中的一个电压定义为输出电压,将正弦电压源看做输入。这里的"滤掉"理解为输出电压减小)。

77. (a)将图 10.81 中的电路简化为简单串联 RC 电路;(b)导出电压比 $\mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_s$ 随频率变化的函数关系;(c)在频率范围 100 Hz 到 1 MHz 内画出该函数的曲线,并将它与用 PSpice 对原电路仿真得到的曲线相比较。

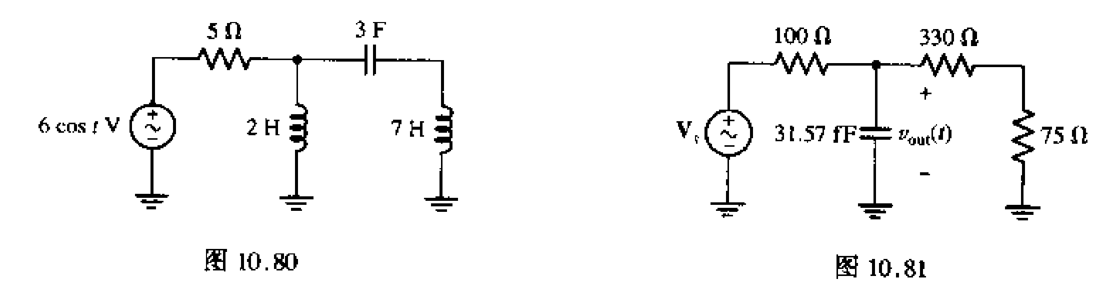


图 10.80　　图 10.81

78. 参看图 10.25(b);(a)验证运放电路的最大电压增益为 $-g_m(R_C \| R_L)$;(b)如果 $R_S = 100\ \Omega$, $R_L = 8\ \Omega$, R_C 的最大值为 10 kΩ, $r_\pi g_\mu = 300$,所有其他的参数均可以改变,问如何修改设计以提高增益?(c)修改后的设计对放大器的截止频率影响如何?如何补偿?

79. 利用叠加原理,求出图 10.82 所示电路中的电压 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$。

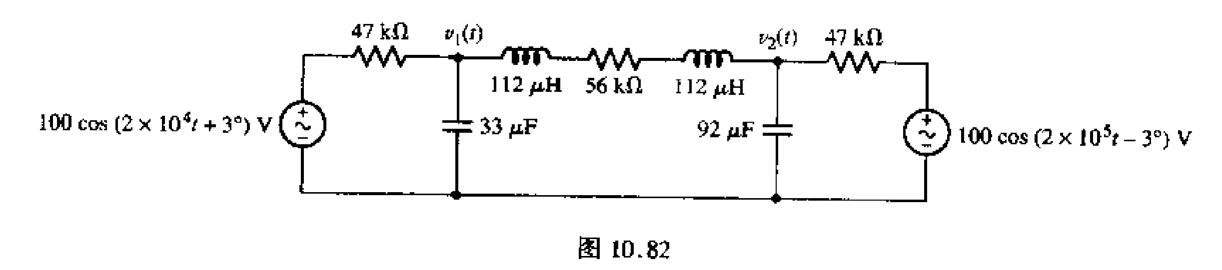


图 10.82

80. 利用叠加原理,求出图 10.83 所示电路中的电压 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$。

81. (a)计算图 10.84 所示电路中的 $\mathbf{I}_L, \mathbf{I}_R, \mathbf{I}_C, \mathbf{V}_L, \mathbf{V}_R$ 和 $\mathbf{V}_C$(加上 $\mathbf{V}_s$);(b)设标度分别为 1 英

寸[①] 50 V 和 1 英寸 25 A，在相量图中画出所有的 7 个量，并说明 $\mathbf{I}_L = \mathbf{I}_R + \mathbf{I}_C$ 和 $\mathbf{V}_s = \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_R$。

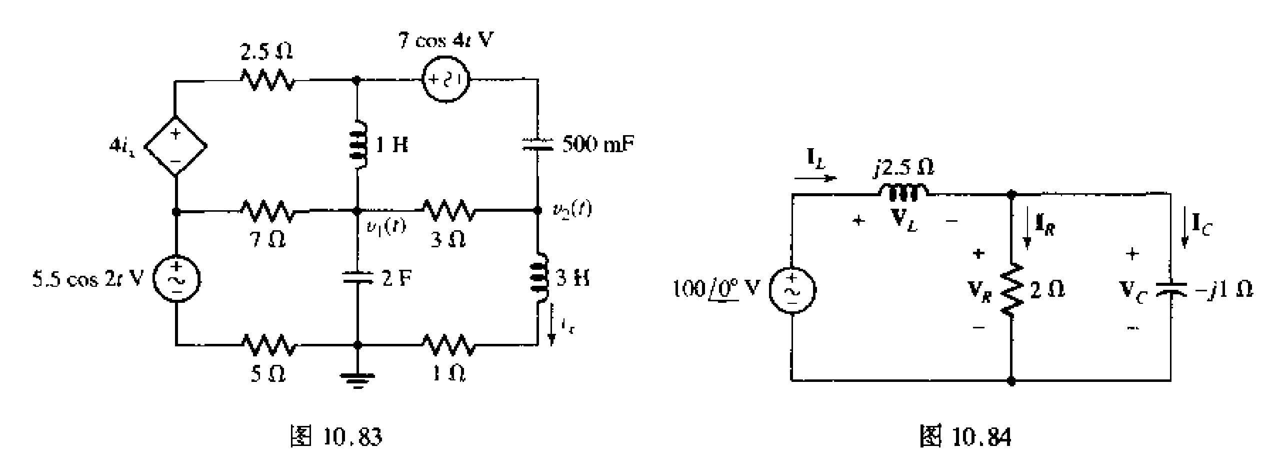


图 10.83　　图 10.84

82. 图 10.85 所示电路中，求(a) $\mathbf{I}_1$，$\mathbf{I}_2$ 和 $\mathbf{I}_3$ 的值；(b)在相量图中画出它们(使用标度 50 V/英寸和 25 A/英寸即可)；(c)用图解法求出 $\mathbf{I}_S$，给出它的幅度和相角。
83. 如图 10.86 所示电路，已知 $|\mathbf{I}_1| = 5$ A 和 $|\mathbf{I}_2| = 7$ A，使用圆规、直尺、划线板和量角器等工具。求出 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$。

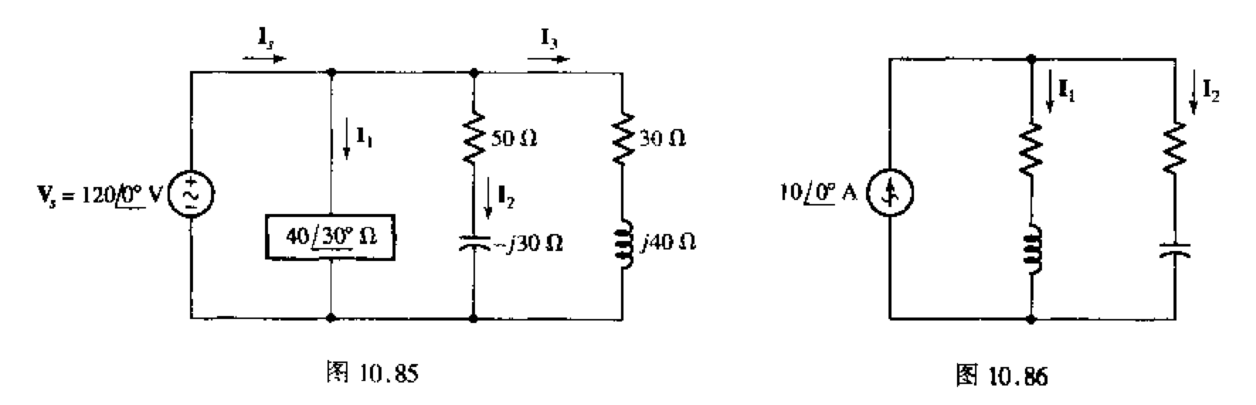


图 10.85　　图 10.86

84. 设 $\mathbf{V}_1 = 100\angle 0°$ V，$|\mathbf{V}_2| = 140$ V 和 $|\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2| = 120$ V，使用图解法求出 $\mathbf{V}_2$ 的相角的两个可能值。

① 1 英寸 = 2.45 cm ——编者注。

第 11 章　交流电路的功率分析

本章要点：

- 提供给元件的瞬时功率
- 正弦电源提供的平均功率
- 时变波形的方均根值
- 利用复功率确定平均功率和无功功率
- 确定给定负载的功率因数及它的改进方法

11.1　引言

首先考虑瞬时功率，瞬时功率是与元件或网络相关联的时变电压和时变电流的乘积。瞬时功率本身有时是相当有用的，因为必须限制它的最大值，以免超过实际器件的安全或有效工作范围。例如晶体管和真空管功率放大器，当峰值功率超过一定值时都会引起输出失真。但是关心瞬时功率主要是因为它提供了计算更重要的平均功率的方法。类似地，跨越乡村道路旅行的进展情况最好用平均速度来描述，对于瞬时速度的兴趣，只是为了避免最大速度超过安全范围，或招来高速公路巡逻警察。

在实际问题中涉及的平均功率从小到低于 1 皮瓦的遥感勘测信号，到高保真立体音响输出到喇叭的几瓦声音功率，再到早上咖啡壶工作所需的几百瓦功率，甚至到大峡谷水电站所产生的 100 亿瓦的电力。

11.2　瞬时功率

提供给任何元件的瞬时功率是元件上的瞬时电压和流过元件的瞬时电流之乘积（假定符合无源符号规则）。所以：

$$p(t)=v(t)i(t) \tag{11.1}$$

如果所讨论的元件是阻值为 R 的电阻，那么功率可由电流和电压单独表示：

$$p(t)=v(t)i(t)=i^2(t)R=\frac{v^2(t)}{R} \tag{11.2}$$

如果与元件相关的电压或电流呈完全电感性，那么：

$$p(t)=v(t)i(t)=Li(t)\frac{di(t)}{dt}=\frac{1}{L}v(t)\int_{-\infty}^{t}v(t')dt' \tag{11.3}$$

其中假定在 $t=-\infty$ 时电压为零。对于电容的情况：

$$p(t)=v(t)i(t)=Cv(t)\frac{dv(t)}{dt}=\frac{1}{C}i(t)\int_{-\infty}^{t}i(t')dt' \tag{11.4}$$

其中对电流也有类似假定。当开始考虑更一般的网络时，以上列出的仅含电流或仅含电压的

功率表达式，就显得笨拙了。这些公式也是很不必要的，因为在网络端口需要找到的仅仅是电流和电压。例如考虑图 11.1 中的 RL 串联电路，激励源为阶跃电压源。熟悉的电流响应为：

$$i(t)=\frac{V_0}{R}(1-e^{-Rt/L})u(t)$$

那么电源提供的功率或无源网络吸收的功率为：

$$p(t)=v(t)i(t)=\frac{V_0^2}{R}(1-e^{-Rt/L})u(t)$$

因为单位阶跃函数的平方是函数本身。

提供给电阻的功率是：

$$p_R(t)=i^2(t)R=\frac{V_0^2}{R}(1-e^{-Rt/L})^2u(t)$$

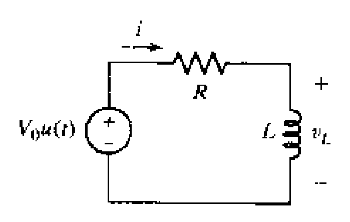


图 11.1 提供给 R 的功率为 $P_R(t)=i^2(t)R=(V_0^2/R)(1-e^{-Rt/L})^2u(t)$

为了确定电感所吸收的功率，首先求电感上的电压：

$$v_L(t)=L\frac{di(t)}{dt}$$

$$=V_0e^{-Rt/L}u(t)+\frac{LV_0}{R}(1-e^{-Rt/L})\frac{du(t)}{dt}$$

$$=V_0e^{-Rt/L}u(t)$$

因为对于 $t>0$，$du(t)/dt$ 为零，并且当 $t=0$ 时，$(1-e^{-Rt/L})$也为零，因此电感吸收的功率为：

$$p_L(t)=v_L(t)i(t)=\frac{V_0^2}{R}e^{-Rt/L}(1-e^{-Rt/L})u(t)$$

只需几步代数运算就可得出：

$$p(t)=p_R(t)+p_L(t)$$

上式用于检查结论的准确与否；结果画在图 11.2 中。

11.2.1 正弦激励下的功率

将图 11.1 中的电压源换成正弦电压源 $V_m\cos\omega t$。熟悉的时域响应为：

$$i(t)=I_m\cos(\omega t+\phi)$$

其中：

$$I_m=\frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \quad 和 \quad \phi=-\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

因此在正弦稳态下提供给整个电路的瞬时功率为：

$$p(t)=v(t)i(t)=V_mI_m\cos(\omega t+\phi)\cos\omega t$$

利用两个正弦函数相乘的三角恒等式，可将上式重写如下：

$$p(t)=\frac{V_mI_m}{2}[\cos(2\omega t+\phi)+\cos\phi]$$

$$=\frac{V_mI_m}{2}\cos\phi+\frac{V_mI_m}{2}\cos(2\omega t+\phi)$$

最后的式子具有几个特点，对一般的正弦稳态电路都有效。式中第一项，不是时间函数；第二项，是周期变量，其周期为外加频率两倍对应的周期。因为这项是余弦波，正弦波和余弦波的均值为零（整数个周期内的平均），这个例子提示，平均功率是$\frac{1}{2}V_mI_m\cos\phi$，情况确实如此。

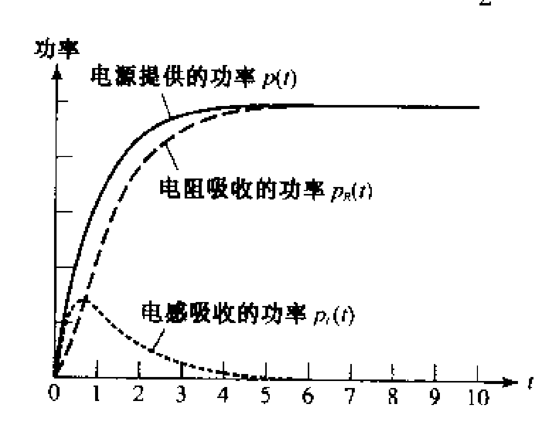


图 11.2 $p(t)$，$p_R(t)$和$p_L(t)$的波形。当瞬态过程结束后，电路回到稳态工作。因为留在电路中的惟一电源是直流源，电感最终表现为一个短接电路，吸收功率为零

例题 11.1 $40+60u(t)$ V 电压源，5 μF 电容及 200 Ω 电阻相串联。求 $t=1.2$ ms 时电容以及电阻所吸收的功率

在 $t=0$ 之前，40 V 直流电压加在串联的电容和电阻上，因为没有电流，$v_C(0^-)=40$ V。在 $t=0^+$，加在串联电路上的电压增加到 100 V。电容上的电压不能瞬时改变，所以 $t=0^+$ 时电阻上的电压必定为 60 V。因此 $t=0^+$ 时流经电阻（也就是流经串联电路）的电流为 60/200 = 300 mA。

$t>0$ 时的电流为：

$$i(t)=300e^{-t/\tau}\text{mA}$$

其中 $\tau=RC=1$ ms。这样，$t=1.2$ ms 时电流为 90.36 mA，此时电阻吸收的功率为 $i^2(t)R=1.633$ W。

电容吸收的瞬时功率为 $i(t)v_C(t)$，有不止一种方法可得到电容电压的表达式。认识到 $t>0$时加在两个串联元件上的电压总是 100 V，电阻上的电压为 $60e^{-t/\tau}$，则：

$$v_C(t)=100-60e^{-t/\tau}$$

求得，$v_C(1.2\text{ ms})=100-60e^{-1.2}=81.93$ V。所以 $t=1.2$ ms 时电容吸收的功率为 $(90.36\text{ mA})\times(81.93\text{ V})=7.403$ W。

练习

11.1 电流源 12 cos 2 000t A，200 Ω 电阻和 0.2 H 电感相串联。假定满足稳态条件。在 t

= 1 ms 时求(a)电阻;(b)电感;(c)正弦电源所吸收的功率。

答案:13.98 W; - 5.63 W; - 8.35 W

11.3 平均功率

当提到瞬时功率的平均值时,必须明确定义平均过程的时间间隔。选择一般时间间隔从 t_1 到 t_2。从 t_1 到 t_2 对 $p(t)$积分并除以时间间隔 $t_2 - t_1$。这样:

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt \tag{11.5}$$

用大写字母 P 表示平均值,因为它不是时间的函数,所以通常不用任何下标去表示它是一个平均值。尽管 P 不是时间函数,它却是 t_1 和 t_2 这两个确定积分间隔的变量的函数。如果 $p(t)$为周期函数,P 对于特定时间间隔的相关性可以用简单方式表示。下面考虑这一重要情形。

11.3.1 周期波形的平均功率

假定激励函数和电路响应都是周期性的,不一定是正弦稳态,但达到一个稳态条件。数学上定义周期函数 $f(t)$为:

$$f(t) = f(t + T) \tag{11.6}$$

其中 T 为周期。现在指出,式(11.6)表示的瞬时功率平均值可以用任意起始时刻的一个周期的时间间隔去计算。

图 11.3 表示一般的周期波形,记为 $p(t)$。首先计算平均功率,从 t_1 到 t_2 做积分,t_2 比 t_1 晚一个周期,$t_2 = t_1 + T$:

$$P_1 = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} p(t)\,dt$$

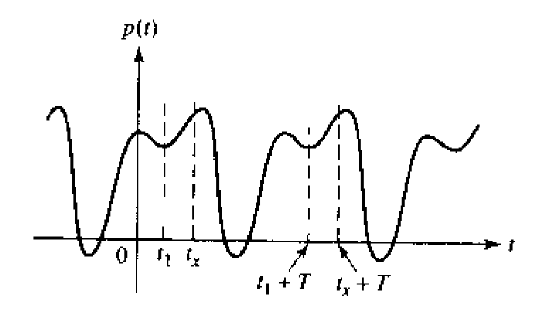


图 11.3 周期函数 $p(t)$的平均值 P 对于任何周期 T 都相同

然后从另一个时刻 t_x 到 $t_x + T$ 做积分:

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{t_x}^{t_x+T} p(t)\,dt$$

P_1 和 P_x 的等价性应该从间隔的图形解释中明显看出。P_x 对应的积分面积比 P_1 的面积少一

块 t_1 到 t_x 的面积,但比它多 t_1+T 到 t_x+T 的面积。曲线的周期性质要求这两块面积相等。所以平均功率的计算可以对瞬时功率在任意一个长度等于一个周期的时间上积分,再除以这个周期:

$$P=\frac{1}{T}\int_{t_x}^{t_x+T}pdt \tag{11.7}$$

重要的一点是,也可以在任何整数个周期上进行积分,只要将结果除以同样整数个周期,即

$$P=\frac{1}{nT}\int_{t_x}^{t_x+nT}pdt,\quad n=1,2,3\cdots \tag{11.8}$$

如果把这一概念应用到极限情况,对全体时间积分,就得到另一有用的结果。首先假定积分的对称条件:

$$P=\frac{1}{nT}\int_{-nT/2}^{nT/2}p(t)\,dt$$

然后取边界 n 为无穷大:

$$P=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nT}\int_{-nT/2}^{nT/2}p(t)\,dt$$

只要 $p(t)$ 是一个完美的数学函数,就像所有的实际激励函数和响应那样,显然如果用一个比 n 稍大的非整数代替大整数 n,积分值和 P 的变化是微不足道的。而且误差随着 n 的增大而减小。因此,不加严格证明,用连续变量 τ 取代离散变量 nT:

$$P=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}p(t)\,dt \tag{11.9}$$

可以发现在某些情况下,它对于"无限周期"上的周期函数求积分是方便的。下面是几个使用式(11.7)、式(11.8)和式(11.9)的例子。

考虑计算周期波形的平均功率,见图 11.4(a),求(周期性)锯齿电流波形提供给电阻 R 的平均功率。有:

$$i(t)=\frac{I_m}{T}t,\quad 0<t\leqslant T$$

$$i(t)=\frac{I_m}{T}(t-T),\quad T<t\leqslant 2T$$

如此等等,并且:

$$p(t)=\frac{1}{T_2}I_m^2Rt^2,\quad 0<t\leqslant T$$

$$p(t)=\frac{1}{T_2}I_m^2R(t-T)^2,\quad T<t\leqslant 2T$$

等等,见图 11.4(b)所示。

在最简单的一个周期上,从 $t=0$ 到 $t=T$ 积分,得到:

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{I_m^2R}{T^2}t^2\,dt=\frac{1}{3}I_m^2R$$

选取其他周期,比如从 $t=0.1T$ 到 $t=1.1T$ 将得到同样结果。从 0 到 $2T$ 积分并除以 $2T$,即以 $n=2,t_x=0$ 代入公式(11.8),也将得到同样结果。

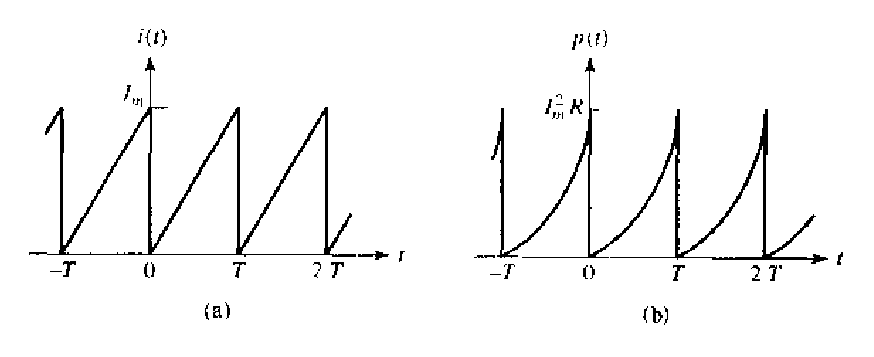


图 11.4　(a)锯齿电流波形;(b)电阻 R 上的瞬时功率波形

11.3.2　正弦稳态下的平均功率

现在考虑正弦稳态下的一般结论。假定所研究元件中的正弦电压和电流的一般形式分别为:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

和

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

瞬时功率为:

$$p(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \theta)\cos(\omega t + \phi)$$

将两个余弦函数乘积表示为差角的余弦与和角的余弦之和的一半:

$$p(t) = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta - \phi) + \frac{1}{2}V_m I_m \cos(2\omega t + \theta + \phi) \tag{11.10}$$

检查一下结果可以节省一部分积分工作。第一项是与 t 无关的常数。剩下的为余弦函数,所以 $p(t)$是周期性的,它的周期为$\frac{1}{2}T$。注意周期 T 是所给电流和电压的周期,而不是功率的周期,功率函数的周期为$\frac{1}{2}T$。可是如果愿意,也可以在间隔 T 上做积分以确定功率的平均值,只是必须也除以 T。已知余弦和正弦在一个周期上的平均值为零,所以不需对式(11.10)认真积分。通过检查,在周期 T(或$\frac{1}{2}T$)上第二项的平均值为零;第一项为常数,其平均值为常数本身。所以:

$$P = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta - \phi) \tag{11.11}$$

这一重要结论在先前的章节中针对特定电路介绍过,它对正弦稳态是相当通用的。平均功率是峰值电压、峰值电流以及电流电压相角差的余弦三者乘积的一半。此相角差的含义是抽象的。

例题 11.2　给定时域电压为 $v = 4\cos(\pi t/6)$ V,求平均功率和当 $\mathbf{V} = 4\angle 0°$ V 时加在阻抗 $\mathbf{Z} = 2\angle 60°$ Ω 上的瞬时功率

相量电流为 $\mathbf{V}/\mathbf{Z} = 2\angle -60°$ A,平均功率为:

$$P = \frac{1}{2} \times (4) \times (2)\cos 60° = 2\ \text{W}$$

时域电压为:

$$v(t)=4\cos\frac{\pi t}{6}\ \mathrm{V}$$

时域电流为：

$$i(t)=2\cos\left(\frac{\pi t}{6}-60^\circ\right)\mathrm{A}$$

瞬时功率为：

$$p(t)=8\cos\frac{\pi t}{6}\cos\left(\frac{\pi t}{6}-60^\circ\right)=2+4\cos\left(\frac{\pi t}{3}-60^\circ\right)\mathrm{W}$$

在图 11.5 中将它们画在同一时间轴上。2 W 的平均功率以及 6 s 的周期(电流或电压周期的一半)都看得很明显。当电压或电流为零时瞬时功率也为零，这一点也很清楚。

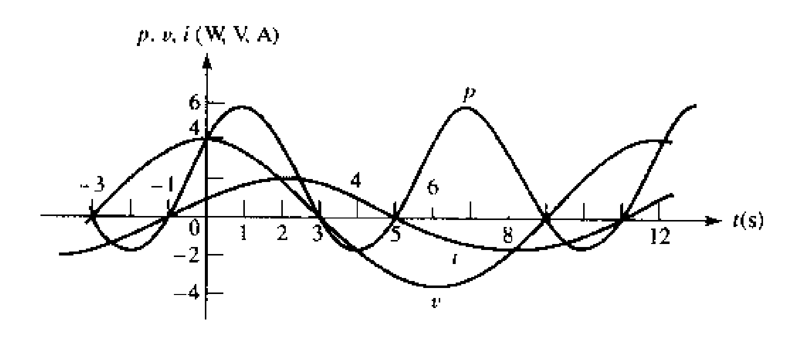


图 11.5　一个简单电路，其中 $\mathbf{V}=4\angle 0^\circ$ V 加在阻抗 $\mathbf{Z}=2\angle 60^\circ\ \Omega$ 上，$\omega=\pi/6$ rad/s，它的时间函数 $v(t)$，$i(t)$ 和 $p(t)$ 的曲线

练习

11.2　给定阻抗 $\mathbf{Z}=16.26\angle 19.3^\circ\Omega$ 上相量电压为 $\mathbf{V}=115\sqrt{2}\angle 45^\circ$ V，求瞬时功率表达式，若 $\omega=50$ rad/s，计算平均功率。

答案：$767.5+813.2\cos(100t+70.7^\circ)$ W；767.5 W

两种特殊情况值得分开考虑：提供给理想电阻以及理想电抗(仅含电容和电感的电路组合)的平均功率。

11.3.3　理想电阻吸收的平均功率

纯电阻上电流与电压的相角差为零。因此：

$$P_R=\frac{1}{2}V_mI_m\cos 0=\frac{1}{2}V_mI_m$$

或

$$P_R=\frac{1}{2}I_m^2R \tag{11.12}$$

或

$$P_R=\frac{V_m^2}{2R} \tag{11.13}$$

时刻记住，所求为正弦电源提供给电阻的平均功率，不要把它与瞬时功率也相混淆，瞬时功率

也有类似的形式。

上面最后两个公式既简单又重要，根据正弦电流或电压的知识，公式可以用于确定提供给纯电阻的平均功率。遗憾的是，这两个公式常常被误用。最为常见的错误是使用式(11.13)，而其中的电压不是电阻上的电压。如果注意将电阻上的电流代入式(11.12)中，将电阻上的电压代入式(11.13)中，保证得到满意的运算结果。另外，不能忘记系数$\frac{1}{2}$！

11.3.4　纯电抗元件吸收的平均功率

提供给纯电抗元件(即不含电阻)的平均功率必定为零。这是电流与电压之间必定存在的90°相位差的直接结果。因此 $\cos(\theta-\phi)=\cos\pm90°=0$，且：

$$P_X=0$$

提供给任何完全由理想电感和电容组成网络的平均功率为零。只是在特定时刻瞬时功率才为零。所以，在周期的一部分时间里，有功率流入网络；在周期的另一部分时间里，有功率流出网络，没有功率损失。

例题 11.3　电流为 $\mathbf{I}=5\underline{/20°}$ A，求提供给阻抗 $\mathbf{Z}_L=8-j11\ \Omega$ 的平均功率

用式(11.12)可以很快求出解答。只是 8 Ω 电阻成分出现在平均功率的计算中，因为 $-j11\ \Omega$成分不会吸收任何平均功率。这样：

$$P=\frac{1}{2}\times(5^2)\times8=100\ \text{W}$$

还应注意，如果给定电流为直角形式，即 $\mathbf{I}=2+j5$ A，那么幅度平方为 2^2+5^2，提供给 $\mathbf{Z}_L=8-j11\ \Omega$ 的平均功率将是：

$$P=\frac{1}{2}\times(2^2+5^2)\times8=116\ \text{W}$$

练习

11.3　电流为 $\mathbf{I}=2+j5$ A，计算提供给阻抗 $6\underline{/25°}\ \Omega$ 的平均功率

答案：78.85 W

例题 11.4　求图 11.6 中每个无源元件吸收的平均功率，以及每个电源提供的平均功率

应用几种方法中的任一种都可求出 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$ 的值，比如网孔分析法、节点分析法或叠加法。它们是：

$$\mathbf{I}_1=5-j10=11.18\underline{/-63.43°}\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_2=5-j5=7.071\underline{/-45°}\ \text{A}$$

流过 2 Ω 电阻的向下电流为：

$$\mathbf{I}_1-\mathbf{I}_2=-j5=5\underline{/-90°}\text{A}$$

所以 $I_m=5$ A，电阻吸收的平均功率利用公式(11.12)来求最为方便：

$$P_R=\frac{1}{2}I_m^2R=\frac{1}{2}\times(5^2)\times2=25\ \text{W}$$

可以用式(11.11)和式(11.13)来检查结果。每个电抗元件吸收的平均功率为零。下面考

虑左边的电源。电压 $20\angle 0^\circ$ V 和相关电流 $\mathbf{I}_1 = 11.18\angle -63.43^\circ$ A 满足有源符号规则，那么这个电源提供的功率为：

$$P_{left} = \frac{1}{2} \times (20) \times (11.18)\cos\left[0^\circ - (-63.43^\circ)\right] = 50\ \mathrm{W}$$

以同样的方法，利用无源符号规则求出右边电源吸收的功率：

$$P_{right} = \frac{1}{2} \times (10) \times (7.071)\cos(0^\circ + 45^\circ) = 25\ \mathrm{W}$$

因为 50 = 25 + 25，功率关系满足。

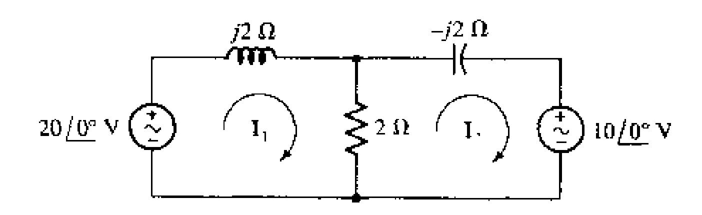


图 11.6 在正弦稳态下提供给每个电抗元件的平均功率为零

练习

11.4 对图 11.7 电路计算提供给每个无源元件的平均功率。计算两个电源提供的功率以证实前面的结果。

答案：37.6 mW

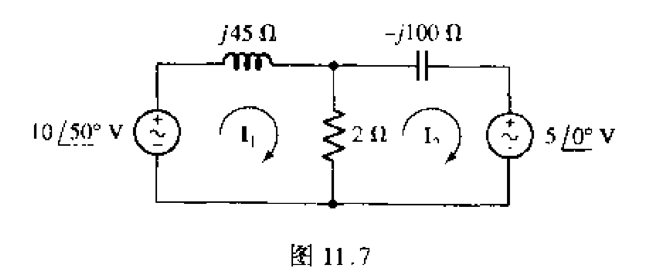


图 11.7

11.3.5 最大功率传输

记号 $\mathbf{Z}^*$ 表示复数 $\mathbf{Z}$ 的复共轭。将所有的“j”替换为“$-j$”即可构成复共轭。详见附录 E。

前面曾考虑过最大功率传输定理，将它应用于电阻负载和电阻性电源阻抗场合。对于戴维南电源 $\mathbf{V}_{th}$ 和阻抗 $\mathbf{Z}_{th} = R_{th} + jX_{th}$ 连接到负载 $\mathbf{Z}_L = R_L + jX_L$，可以证明当 $R_L = R_{th}$，$X_L = -X_L$，即 $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_{th}^*$ 时，提供给负载的功率最大。这个结果常被称为正弦稳态的最大功率传输定理：

一个与阻抗 $\mathbf{Z}_{th}$ 相串联的独立电压源，或者一个与阻抗 $\mathbf{Z}_{th}$ 相并联的独立电流源，当负载阻抗 $\mathbf{Z}_L$ 等于 $\mathbf{Z}_{th}$ 的复共轭，即 $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_{th}^*$ 时，提供给负载阻抗 $\mathbf{Z}_L$ 的平均功率最大。

证明的细节留做习题 11，但是考虑图 11.8 的简单回路，可以理解其基本方法。戴维南等效阻抗可以写成两个分量之和，$R_{th} + jX_{th}$，类似地，负载阻抗 $\mathbf{Z}_L$ 可以写为 $R_L + jX_L$。流过回路的电流为：

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_{th}}{\mathbf{Z}_{th} + \mathbf{Z}_L}$$
$$= \frac{\mathbf{V}_{th}}{R_{th} + jX_{th} + R_L + jX_L} = \frac{\mathbf{V}_{th}}{R_{th} + R_L + j(X_{th} + X_L)}$$

和

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{V}_{th}\frac{\mathbf{Z}_L}{\mathbf{Z}_{th} + \mathbf{Z}_L}$$
$$= \mathbf{V}_{th}\frac{R_L + jX_L}{R_{th} + jX_{th} + R_L + jX_L} = \mathbf{V}_{th}\frac{R_L + jX_L}{R_{th} + R_L + j(X_{th} + X_L)}$$

图 11.8 用以导出最大功率传输定理的简单回路，电路工作于正弦稳态下

$\mathbf{I}_L$ 的幅度为：

$$\frac{|\mathbf{V}_{th}|}{\sqrt{(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2}}$$

相角为：

$$\underline{/\mathbf{V}_{th}} - \tan^{-1}\left(\frac{X_{th} + X_L}{R_{th} + R_L}\right)$$

类似地，$\mathbf{V}_L$ 的幅度为：

$$\frac{|\mathbf{V}_{th}|\sqrt{R_L^2 + X_L^2}}{\sqrt{(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2}}$$

其相角为：

$$\underline{/\mathbf{V}_{th}} + \tan^{-1}\left(\frac{X_L}{R_L}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{X_{th} + X_L}{R_{th} + R_L}\right)$$

参考式(11.11)，得出提供给负载阻抗 $\mathbf{Z}_L$ 的平均功率 P 的表达式为：

$$P = \frac{\frac{1}{2}|\mathbf{V}_{th}|^2\sqrt{R_L^2 + X_L^2}}{(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2}\cos\left[\tan^{-1}\left(\frac{X_L}{R_L}\right)\right] \tag{11.14}$$

为了证实当 $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_{th}^*$ 时提供给负载的平均功率确实最大，必须分两步进行。首先式(11.14)关于 R_L 的导数必须为零。余下的细节为渴望探索的读者留做习题。

例题 11.5 一电路由串联的正弦电压源 $3\cos(100t - 3°)$ V，500 Ω 电阻，30 mH 电感以及一个未知阻抗组成。如果肯定电压源向未知阻抗提供最大功率，那么最大平均功率是多少？

图 11.9 画出了这个电路的相量表示电路图。容易将电路看做一个未知阻抗 $\mathbf{Z}_?$ 与包含 $3\underline{/-3°}$ 电源和戴维南阻抗 $500 + j3$ Ω 的戴维南等效电路相串联的结构。

因为图 11.9 的电路形式已经可以直接应用最大平均功率传输定理，已知当负载阻抗等于

$\mathbf{Z}_{th}$的复共轭时，它得到的平均功率最大，即：

$$\mathbf{Z}_? = \mathbf{Z}_{th}^* = 500 - j3\ \Omega$$

构造这个阻抗有几种方法，最简单的是 500 Ω 电阻串联阻抗为 $-j3\ \Omega$ 的电容。因为电路的工作频率为 100 rad/s，这对应 3.333 mF 的电容。

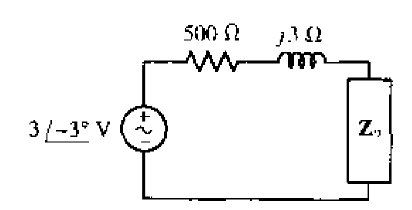


图 11.9 一个用相量表示的，由正弦电压源、电阻、电感和未知阻抗串联组成的简单电路

练习

11.5 如果将例题 11.5 中的 30 mH 电感替换为 10 μF 电容，假定未知阻抗 $\mathbf{Z}_?$ 吸收最大功率，那么 $\mathbf{Z}_?$ 的电感成分是多少？

答案：10 H

11.3.6 非周期函数的平均功率

现在必须考虑非周期函数的情况。一个求非周期函数功率的实际例子是指向“射电星”的射电望远镜功率输出。另一个例子是许多个具有不同周期的周期函数之和，数量多到找不到一个较大的共同周期。例如，电流：

$$i(t) = \sin t + \sin \pi t \tag{11.15}$$

是非周期的，因为两个正弦波的周期之比为无理数。$t = 0$ 时，两项均为零，且增大。但第一项只是在 $t = 2\pi n$ 时为零且增大，其中 n 为整数。所以周期性要求 πt 或者 $\pi(2\pi n)$ 必须等于 $2\pi m$，m 也是一个整数。这个方程无解（m 和 n 均为整数）。通过比较式(11.15)的非周期表达式与周期函数：

$$i(t) = \sin t + \sin 3.14t \tag{11.16}$$

可以看明白，其中 3.14 是一个确切的十进制表达式，而不要理解为 3.141 592…。花一点时间[①]，可以证明这个电流波形的周期是 100π 秒。

式(11.16)那样的周期电流或式(11.15)那样的非周期电流提供给 1 Ω 电阻的平均功率可以通过无限周期上的积分求得。由于对简单函数平均值的了解，大部分积分可以避免。应用式(11.9)可以得到式(11.15)中电流提供的平均功率：

$$P = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} (\sin^2 t + \sin^2 \pi t + 2 \sin t \sin \pi t)\, dt$$

现在考虑三个平均值之和的 P。$\sin^2 t$ 在无限间隔上的平均值可用$(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t)$取代 $\sin^2 t$ 求

① $T_1 = 2\pi$，$T_2 = 2\pi/3.14$。求 m 和 n 的整数解，$2\pi n = 2\pi m/3.14$，即 $3.14n = m$，或$\frac{314}{100}n = m$，或 $157n = 50m$。这样 n 和 m 的最小整数解为 $n = 50$，$m = 157$。因此周期为 $T = 2\pi n = 100\pi$，或 $T = 2\pi(157/3.14) = 100\pi$ s。

得，平均值就是

得,平均值就是$\frac{1}{2}$。类似地,$\sin^2 \pi t$ 的平均值也是$\frac{1}{2}$。最后一项可以表达为两个余弦函数之和,每一个的平均值必定为零。所以:

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ W}$$

对式(11.16)的周期电流可得同样结果。对几个不同周期和任意幅度的正弦曲线之和的电流函数采用同样方法:

$$i(t) = I_{m1}\cos\omega_1 t + I_{m2}\cos\omega_2 t + \cdots + I_{mN}\cos\omega_N t \tag{11.17}$$

求得提供给电阻 R 的平均功率为:

$$P = \frac{1}{2}(I_{m1}^2 + I_{m2}^2 + \cdots I_{mN}^2)R \tag{11.18}$$

给电流各个成分赋以任意相角,结果将不会改变。当考虑推导步骤时,这一重要结果是惊人地简单:给电流函数平方、积分并取极限。结果也并不出乎意料,因为可以表明,像式(11.17)这样电流的特殊情况,叠加原理也适用于功率。叠加原理不适用于两个直流电流之和,也不适用于两个具有相同频率的正弦函数之和。

例题 11.6　求电流 $i_1 = 2\cos 10t - 3\cos 20t$ A 提供给 4 Ω 电阻的平均功率

因为两个余弦项有不同的频率,可以分开计算两个平均功率然后相加。所以电流提供给 4 Ω 电阻的功率为$\frac{1}{2}\times(2^2)\times4+\frac{1}{2}\times(3^2)\times4=8+18==26$ W。

例题 11.7　求电流 $i_2 = 2\cos 10t - 3\cos 10t$ A 提供给 4 Ω 电阻的平均功率

这里电流的两个成分有相同频率,因此它们必定组合为某个单一频率的正弦波。这样,$i_2 = 2\cos 10t - 3\cos 10t = -\cos 10t$ 对 4 Ω 电阻只提供$\frac{1}{2}\times(1^2)\times4=2$ W 的平均功率。

练习

11.6　一个电压源 v_s 连接到 4 Ω 电阻上。如果 v_s 等于(a)8 sin 200t V;(b)8 sin 200t − 6 cos (200t − 45°) V;(c) 8 sin 200t − 4 sin 100t V;(d)8 sin 200t − 6 cos (200t − 45°) − 5 sin 100t + 4 V,求提供给电阻的平均功率。

答案:8.00 W; 4.01 W; 10.00 W; 11.14 W

11.4　电流和电压的有效值

大多数人知道在北美地区电源插座上得到的电压是正弦电压,频率为 60 Hz 且"电压值"为 115 V。但"115 V"是什么意思?当然不是瞬时值,因为电压不是常数。115 V 电压值也不是用符号 V_m 表示的幅度。如果在校准后的示波器上显示这个电压波形就会发现,交流插座上的电压幅度为 $115\sqrt{2}$,即 162.6 V。也不能说 115 V 是一个平均值,因为正弦波的平均值是零。在正半周或负半周求平均将得到较为接近的数值,用整流型电压表测量交流电压,读数是 103.5 V。然而 115 V是正弦电压的有效值。它是电压源向电阻负载提供功率的有效性的度量。

11.4.1 周期波形的有效值

用电流波形定义有效值(选择电压也完全相同)。如果一直流电流流经电阻 R,并像周期电流那样,向电阻提供同样的功率,则周期电流的有效值等于相应的直流电流值。

换句话说,让给定的周期电流流过电阻,确定瞬时功率 i^2R,接着在一个周期上求 i^2R 的平均值,这是平均功率。然后让一直流电流流过同一电阻,调节直流电流的大小直到得到同样的平均功率。最后的直流电流大小就等于给定周期电流的有效值。图 11.10 解释了这样的看法。

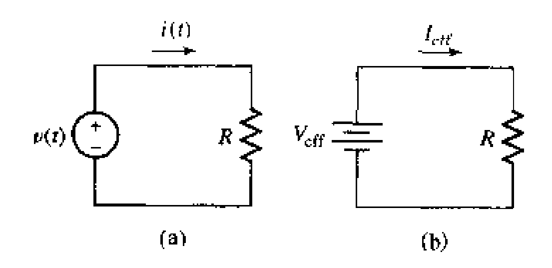


图 11.10 如果电路(a)和电路(b)中的电阻接收同样平均功率,那么 $i(t)$ 的有效值等于 I_{eff},且 $v(t)$ 的有效值等于 V_{eff}

现在容易得到 $i(t)$ 有效值的一般数学表达式。周期电流提供给电阻的平均功率为:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 R dt = \frac{R}{T}\int_0^T i^2 dt$$

其中 T 是 $i(t)$ 的周期。直流电流提供的功率为:

$$P = I_{eff}^2 R$$

令两个功率表达式相等,解出 I_{eff} 为:

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt} \tag{11.19}$$

结果与电阻 R 无关,这个结论是符合设想的。用 v 和 V_{eff} 分别替换 i 和 I_{eff} 可以得到周期电压有效值的类似表达式。

注意,首先取时间函数的平方,再取一个周期内平方函数的平均值,最后取平方函数平均值的平方根。简短地说,求有效值的运算是方均根运算。为此,有效值常称为方均根值,或 rms 值。

11.4.2 正弦波形的有效(rms)值

周期波形有效值最重要的特例是正弦波形的有效值。选择正弦电流:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

其周期为:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

代入式(11.19)得到有效值为:

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \cos(\omega t + \phi) dt}$$

$$= I_m\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\omega t+2\phi)\right]dt}$$

$$= I_m\sqrt{\frac{\omega}{4\pi}[t]_0^{2\pi/\omega}}$$

$$= \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

因此，正弦电流的有效值是与相角无关的实数，数值上等于电流幅值的 $1/\sqrt{2}=0.707$ 倍。所以电流 $\sqrt{2}\cos(\omega t+\phi)$ A 的有效值为 1 A，该正弦电流向任一电阻提供的平均功率与 1 A 直流电流提供的平均功率相同。

应该特别注意，周期电流的幅度与有效值的比例系数 $\sqrt{2}$ 仅适用于正弦周期函数。对于图 11.4 的锯齿波，有效值等于最大值除以 $\sqrt{3}$。在求有效值时所用到的除以最大值的系数取决于给定周期函数的数学形式，它既可以是有理的，也可以是无理的，取决于函数的性质。

11.4.3 利用 rms 值计算平均功率

有效值的使用也稍微简化了正弦电流或电压提供的平均功率的表达式，免去了 $\frac{1}{2}$ 这个系数。例如正弦电流提供给电阻 R 的平均功率为：

$$P=\frac{1}{2}I_m^2R$$

因为 $I_{eff}=I_m/\sqrt{2}$，平均功率可以写成：

$$P=I_{eff}^2R \tag{11.20}$$

用等效直流量定义有效值使得电阻电路的平均功率公式，与直流分析中使用的公式相同。其他功率表达式也可用有效值表示：

$$P=V_{eff}I_{eff}\cos(\theta-\phi) \tag{11.21}$$

$$P=\frac{V_{eff}^2}{R} \tag{11.22}$$

尽管从平均功率关系中成功地消去了系数 $\frac{1}{2}$，现在必须注意一个正弦量是用幅度还是用有效值表示的。在实际中，有效值通常用在功率传输或分配以及旋转电机领域。在电子学和通信领域，往往使用幅度。除非明显使用术语 rms 或是特别指出，这里一般采用幅度。

在正弦稳态下，电压或电流相量可用有效值或幅度给出，两者只差系数 $\sqrt{2}$。电压 $50\angle 30^\circ$ V 是用幅度表示。作为 rms 电压，同样的电压将表示为 $35.4\angle 30^\circ$ V rms。

11.4.4 多频率电路的有效值

为了确定含有多种不同频率的周期或非周期波形的有效值，可以使用前一节得出的式(11.18)中的适当平均功率关系，几个成分的有效值重写如下：

$$P=(I_{1eff}^2+I_{2eff}^2+\cdots I_{Neff}^2)R \tag{11.23}$$

从中可见，由任意个不同频率正弦电流组成的电流的有效值可以表示为：

$$I_{eff} = \sqrt{I_{1eff}^2 I_{2eff}^2 + \cdots I_{Neff}^2} \tag{11.24}$$

这些结果表明，如果 60 Hz，5 A rms 正弦电流流过 2 Ω 电阻，电阻吸收的功率为 $5^2 \times (2) = 50$ W；如果还存在第二个电流，比如是 3 A rms，120 Hz，吸收功率为 $3^2 \times (2) + 50 = 68$ W。而利用式(11.24)，发现 60 Hz 和 120 Hz 电流之和的有效值为 5.831 A。那么 $P = 5.831^2 \times (2) = 68$ W，与前面相同。可是如果第二个电流也是 60 Hz，这两个 60 Hz 电流之和的有效值可能介于 2A ~ 8 A 之间。这时吸收功率可能介于 8 W ~ 128 W 之间，取决于两个电流成分的相对相位。

练习

11.7 计算每个周期电压的有效值：(a)$6\cos 25t$；(b)$6\cos 25t + 4\sin(25t + 30°)$；(c)$6\cos 25t + 5\cos^2(25t)$；(d)$6\cos^2 5t + 5\sin 30t + 4$ V。

答案：4.24 V；6.16 V；5.23 V；6.82 V

计算机辅助分析

在 PSpice 中有几种有效方法可用于功率计算。特别是 Probe 的内建函数可以画出瞬时功率曲线和计算平均功率。例如考虑图 11.11 的简单分压电路，激励是 60 Hz 正弦波，幅度为 $115\sqrt{2}$ V。先在电压波形一个周期($\frac{1}{60}$ s)上进行瞬态模拟。

应用 Plot 菜单下 Add Plot to Window 选项，图 11.12 中画出了电流和电阻 R1 消耗的瞬时功率。瞬时功率是周期性的，均值不为零，峰值为 6.61 W。

利用 Probe 求平均功率最容易的方法是利用内建 running average 函数，预计平均功率为 $\frac{1}{2} \times (162.6 \times \frac{1\,000}{1\,000 + 1\,000}) \times (81.3 \times 10^{-3}) = 3.305$。一旦 Add Traces 对话框出现(Trace, Add)，在 Trace Expression 窗内键入：

AVG(I(R1) * I(R1) * 1 000)

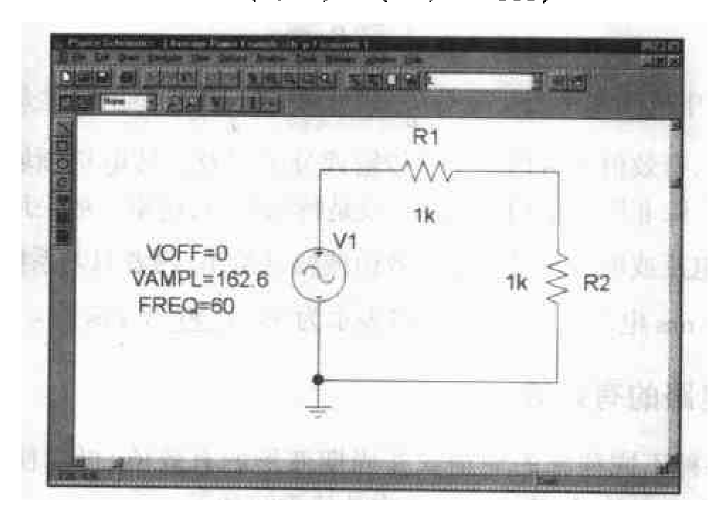


图 11.11 简单分压电路

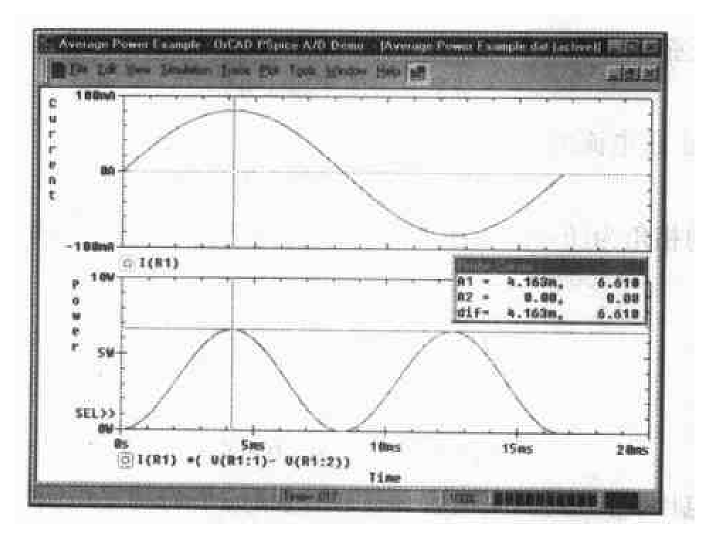


图 11.12　电阻 R1 上的电流和瞬时功率

如图 11.13 所示，一个或两个周期上的平均值都是 3.305 W，与手算一致。

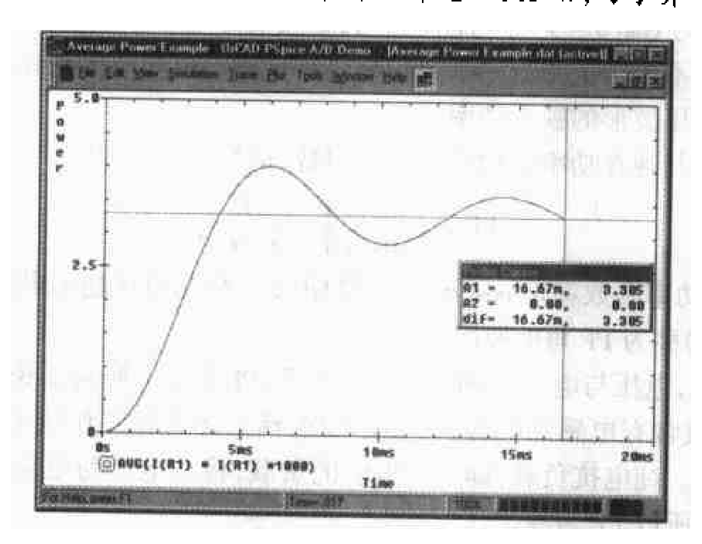


图 11.13　求电阻 R1 消耗的平均功率

利用内建函数 avgx 还可以计算特定间隔内的平均值。例如，用这个函数计算单个周期（这里是 1/120 = 8.33 ms）上的平均功率，输入：

AVGX(I(R1) * I(R1) * 1 000, 8.33m)

两种方法在曲线终点产生的结果都是 3.305 W。

11.5　视在功率和功率因数

大量电能必须从一处传送到另一处，传输效率将直接关系到最终由用户付出的电能花费。如果用户的负载使传输效率降低，他必须为实际收到和使用的每一千瓦小时(kWh)的电能付出更高价格。类似地，如果用户要求发电公司在传送和配电设备方面做更多投入，也要为每一千瓦小时付出更多的钱，除非公司是乐善好施的。

下面首先定义视在功率和功率因数，然后简要介绍这些术语是怎样与前面提到的经济问

题相联系的。假定正弦电压：

$$v = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

作用于网络，产生的正弦电流为：

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

因此电压超前电流的相角为$(\theta - \phi)$。在无源符号规则下，提供给网络输入端的平均功率用最大电压表示为：

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi)$$

或用有效值表示为：

$$P = V_{eff} I_{eff} \cos(\theta - \phi)$$

如果施加的是直流电压，将得到直流响应，提供给网络的平均功率可以简单地用电压与电流的乘积表示。把这一方法用于正弦情况，就会得到由熟悉的乘积 $V_{eff}I_{eff}$"视在"提供的吸收功率值。可是这个电压和电流有效值乘积并不是平均功率，而被定义为视在功率。量纲上，视在功率肯定与实际功率有相同单位，因为 $\cos(\theta - \phi)$是无量纲的。但为了避免混淆，视在功率用伏安或 VA 表示。又因为 $\cos(\theta - \phi)$不可能大于 1，显然实际功率永远不可能大于视在功率值。

视在功率的概念不限于正弦激励函数和响应。只要简单地取电流和电压有效值的乘积就可得出任何电流和电压波形的视在功率。

实际或平均功率与视在功率之比称为功率因数，记为 PF。所以：

$$\mathrm{PF} = \frac{\text{平均功率}}{\text{视在功率}} = \frac{P}{V_{eff} I_{eff}}$$

在正弦情况下，功率因数就是 $\cos(\theta - \phi)$，其中$(\theta - \phi)$是电压超前电流的相角。这就是为什么常常将角$(\theta - \phi)$称为 PF 角的原因。

对于纯电阻负载，电压与电流同相，$(\theta - \phi)$为零，PF 为 1。换句话说，视在功率等于平均功率。可是如果负载含有电感和电容，只要仔细选择元件值和工作频率，使输入阻抗相角为零，也可获得单位 PF。纯电抗负载，即不含电阻的负载，将在电压与电流之间产生要么 $+90°$，要么 $-90°$的相位差，所以 PF 为零。

在这两个极端情况之间是一般网络的情况，PF 可从零变到 1。例如 PF 等于 0.5，表示负载输入阻抗的相角为 $+60°$或 $-60°$；前者描写的是电感负载，因为电压超前电流 60°，而后者指电容负载。负载性质可由 PF 超前或是 PF 滞后加以区分，超前或滞后指电流相对于电压的相角。这样电感负载具有滞后 PF，电容负载具有超前 PF。

例题 11.8 计算电源提供给图 11.14 所示的两个负载的平均功率、视在功率以及组合负载的功率因数

- 弄清问题的目标：

  平均功率指负载元件中电阻成分所吸收的功率；视在功率指组合负载的有效电压和有效电流之乘积。

- 收集已知信息：

  有效电压是 60 V rms，它是组合负载 $2 - j + 1 + j5 = 3 + j4\ \Omega$ 上的电压。

- 选择最适合问题的已有方法：

  两个功率值的计算是直截了当的，但是要记住，必须保持定义的连续性。

● 建立适当的方程组：

平均功率由下式给出：

$$P = V_{eff} I_{eff} \cos(\text{ang } \mathbf{V} - \text{ang } \mathbf{I})$$

视在功率为 $V_{eff} I_{eff}$。

功率因数是这两个量的比值：

$$\text{PF} = \frac{\text{平均功率}}{\text{视在功率}} = \frac{P}{V_{eff} I_{eff}}$$

● 确定是否还需其他信息：

求 I_{eff}：

$$\mathbf{I}_s = \frac{60\angle 0°}{3 + j4} = 12\angle -53.13°$$

所以 $I_{eff} = 12$ A rms，ang $\mathbf{I}_s = -53.13°$。

● 试解：

电源提供的平均功率为：

$$P_s = (60) \times (12)\cos[0° - (-53.1°)] = 432 \text{ W}$$

视在功率为 $60 \times (12) = 720$ VA。

最后考虑组合负载的电压和电流，得出组合负载的功率因数。当然这个功率因数等同于电源的功率因数。所以：

$$\text{PF} = \frac{P}{V_{eff} I_{eff}} = \frac{432}{60 \times (12)} = 0.6$$

● 证实所得解是否合理和满足要求：

上面那个负载得到平均功率为：

$$P_{upper} = 12^2 \times (2) = 288 \text{ W}$$

而右边那个负载，其平均功率为：

$$P_{right} = 12^2 \times (1) = 144 \text{ W}$$

因此电源提供 432 W，其中 288 W 消耗在上面那个负载，144 W 消耗在右边那个负载。功率平衡正确。

还可以将组合负载写成 $5\angle 53.1°$ Ω，53.1°是 PF 角，所以 PF 为 cos 53.1° = 0.6。还要注意，组合负载是电感性的，因此 PF 为 0.6 滞后。

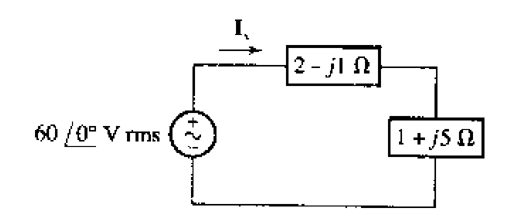


图 11.14　求电源提供给每个元件的平均功率、视在功率以及组合负载的功率因数

练习

11.8 对于图 11.15 电路，确定组合负载的功率因数，$Z_L = 10\ \Omega$。

答案：0.9966 超前

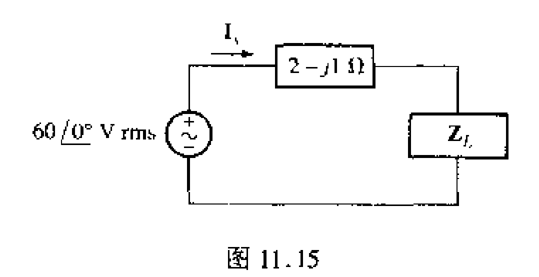


图 11.15

11.6 复功率

如果将功率看成复数，可使功率计算得到一定简化。复功率的幅值将取为视在功率，复功率的实部取为(实)平均功率。复功率的虚部这一新物理量将称为无功功率。

定义一对端点上的正弦电压 $\mathbf{V}_{eff} = V_{eff}\angle\theta$ 和流进一个端点的电流 $\mathbf{I}_{eff} = I_{eff}\angle\phi$，使它们满足无源符号规则。这样两端网络吸收平均功率为：

$$P = V_{eff}I_{eff}\cos(\theta - \phi)$$

同引入相量时所做的那样，下面利用欧拉公式引入复物理量，将 P 表示为：

$$P = V_{eff}I_{eff}\text{Re}\{e^{j(\theta-\phi)}\}$$

或

$$P = \text{Re}\{V_{eff}e^{j\theta}I_{eff}e^{-j\phi}\}$$

电压相量就是上式括号中前面两个系数，但是后面两个系数与电流相量不太对应，因为相角含有负号，电流相量中却不存在。即电流相量是：

$$\mathbf{I}_{eff} = I_{eff}e^{j\phi}$$

因此必须利用共轭标记：

$$\mathbf{I}^*_{eff} = I_{eff}e^{-j\phi}$$

所以：

$$P = \text{Re}\{\mathbf{V}_{eff}\mathbf{I}^*_{eff}\}$$

现在功率就成为复数，定义复功率 $\mathbf{S}$ 为：

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{eff}\mathbf{I}^*_{eff} \tag{11.25}$$

先来检查复功率的极坐标或指数形式：

$$\mathbf{S} = V_{eff}I_{eff}e^{j(\theta-\phi)}$$

很明显，$\mathbf{S}$ 的幅度 $V_{eff}I_{eff}$ 是视在功率，$\mathbf{S}$ 的角度 $(\theta - \phi)$ 是 PF 角(即电压超前电流的角度)。

在直角坐标形式下，有：

$$\mathbf{S} = P + jQ \tag{11.26}$$

其中 P 同以前一样是平均功率。复功率的虚部记为 Q，称为无功功率。Q 的量纲与有功功率

P、复功率 $\mathbf{S}$ 和视在功率 $|\mathbf{S}|$ 相同。为避免与其他量混淆，Q 的单位定义为伏安电抗（缩写为 VAR）。从式（11.25）和式（11.26）可见：

$$Q = V_{eff} I_{eff} \sin(\theta - \phi) \tag{11.27}$$

无功功率的物理解释是能量在电源（即供电公司）和负载的电抗成分（即电感和电容）之间来回流动的时间速率。这些成分交替充电和放电，分别导致电源到负载和负载到电源的电流流动。

常用的表示复功率的图形称为功率三角形，示于图 11.16。图中显示三个功率量中只有两个是待求的，因为可以利用三角关系得到第三个。如果功率三角形位于第一象限（$\theta - \phi > 0$），功率因数滞后（对应于感性负载）；如果功率三角形位于第四象限（$\theta - \phi < 0$），功率因数超前（对应于容性负载），有关负载的许多定性信息可以一目了然。

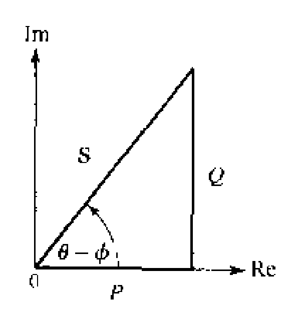


图 11.16　复功率的功率三角形表示

无功功率的另一解释，可以通过构造包含 $\mathbf{V}_{eff}$ 和 $\mathbf{I}_{eff}$ 的相角图看出，如图 11.17 所示。如果将电流相量分解为两个分量，一个与电压同相，幅度为 $\mathbf{I}_{eff}\cos(\theta - \phi)$，另一个与电压相位成 90° 角，幅度等于 $\mathbf{I}_{eff}\sin|\theta - \phi|$，那么显然有功功率就是电压相量和电流相量中与电压同相分量的乘积。而且，电压相量幅度和电流相量中与电压相量成 90°角的分量之乘积，就是无功功率 Q。相量中与另一相量成 90°角的分量通常称为正交分量。这样 Q 就是 $\mathbf{V}_{eff}$ 乘以 $\mathbf{I}_{eff}$ 的正交分量。Q 也称为正交功率。

若规定负载上的电压和电流为 $\mathbf{V}_{eff}$ 和 $\mathbf{I}_{eff}$，则无功功率的正负描绘了无源负载特性。若负载为感性，那么角（$\theta - \phi$）介于 0 到 90°之间，这个角的正弦为正，无功功率也为正。电容负载导致负的无功功率。

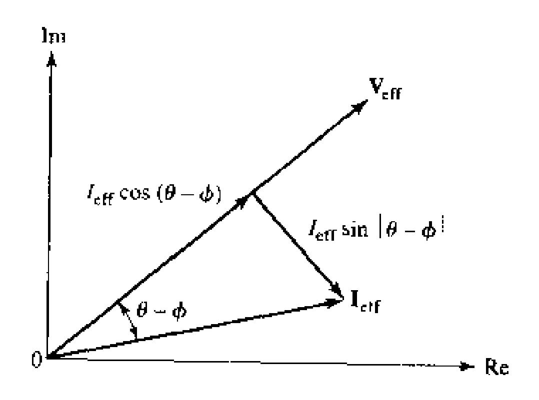


图 11.17　电流相量 $\mathbf{I}_{eff}$ 分解为两个分量，一个与电压相量 $\mathbf{V}_{eff}$ 同相，另一个与电压相量成90°角，后一分量称为正交分量

11.6.1 功率测量

瓦特计读取负载吸收的平均有功功率，而无功功率表读取负载吸收的平均无功功率 Q。两个量可同时测量。此外，瓦特小时表和伏安小时表可以同时使用，用以在任何所希望的时间间隔内记录用户使用的实能量和电抗能量。根据这些记录可以确定平均 PF，并且相应调整用户的账单。

可以说明提供给几个相互连接的负载的复功率是提供给单个负载复功率之和，不管负载是如何连接的。例如考虑图 11.18 中并联连接的两个负载。采用 rms 值，组合负载吸收的复功率为：

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}\mathbf{I}^* = \mathbf{V}(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)^* = \mathbf{V}(\mathbf{I}_1^* + \mathbf{I}_2^*)$$

那么：

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}\mathbf{I}_1^* + \mathbf{V}\mathbf{I}_2^*$$

正如所料

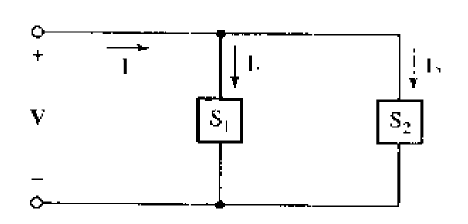


图 11.18 电路显示，两个并联负载吸收的复功率是它们分别吸收复功率之和

实际应用

功率因数的校正

当电力公司向大型工业用户提供电能时，往往在其费率表中包含一个 PF 条款。在这一条款下，每当 PF 值低于规定值时，一般在 0.85 滞后左右，用户要额外付费。受典型工业负载的性质决定，很少有工业用户的功率因数超前。有几个原因迫使电力公司对低 PF 值额外收费。首先，在一定功率和一定电压下，显然低 PF 值运行的发电机必须具有较高的电流承载能力。另一个原因是传输和配电系统的损耗增加。

为了补偿损失和鼓励用户高 PF 值运行，某电力公司对超过标准值(按平均功率需求的 0.62 倍计算)的每 kVAR 收取罚金 0.22 美元：

$$\mathbf{S} = P + jQ = P + j0.62P = P(1 + j0.62) = P(1.77\underline{/31.8^\circ})$$

由于 $\cos 31.8^\circ = 0.85$，且 Q 为正值，所以这一标准值等同于 0.85 滞后的 PF 值。对于 PF 角大于这一标准的用户会受到罚款。

通常通过安装与负载并联的补偿电容去补偿电抗性功率，电容一般安装在用户设备外面的变电站。要求的电容值为：

$$C = \frac{P(\tan\theta_{old} - \tan\theta_{new})}{\omega V_{rms}^2} \qquad [11.28]$$

其中 ω 是频率，θ_{old} 是目前的 PF 角，θ_{new} 是目标 PF 角。为了方便，补偿电容堆是按规定的递增率，以 kVAR 容量为单位制造的。安装实例示于图 11.19。

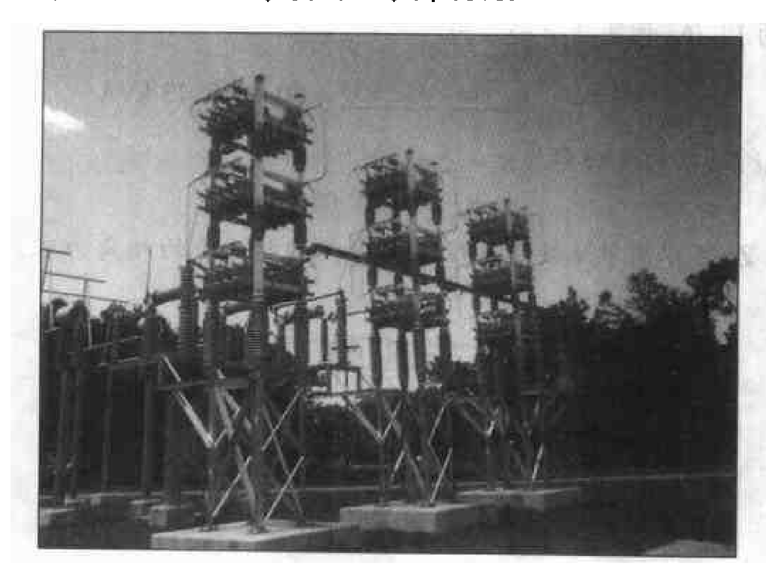


图 11.19　补偿电容安装现场

现在考虑一个特例。某一工业机器厂月峰值需求为 5 000 kW，月电抗需求为 6 000 kVAR。利用上述费率表计算该用户与 PF 罚款有关的年花费。如果电力公司提供电容补偿的费用为每增加 1 000 kVAR 增加 2 390 美元；每增加 2 000 kVAR 增加 3 130 美元，什么是对用户最经济有效的方案？

需要补偿的 PF 是复功率 **S** 的角度，这里为 $5\ 000 + j6\ 000$ kVA。那么角度为 $\tan^{-1}(6\ 000/5\ 000) = 50.19°$，PF 为 0.64 滞后。标准无功功率值为 0.62 倍的峰值需求，即 $0.62 \times (5\ 000) = 3\ 100$ kVAR。所以这个工厂比电力公司允许值多吸收 $6\ 000 - 3\ 100 = 2\ 900$ kVAR 无功功率。这表示将比普通电力花费年估计多花 $12 \times (2\ 900) \times (0.22) = 7\ 656$ 美元。

如果用户选择只安装 1 000 kVAR 补偿电容（花费为 2 390 美元），吸收的过剩无功功率减少到 $2\ 900 - 1\ 000 = 1\ 900$ kVAR，那么年罚款现在为 $12 \times (1900) \times (0.22) = 5\ 016$ 美元。这年的总花费为 $5\ 016 + 2\ 390 = 7\ 406$ 美元，节省 250 美元。如果用户选择安装 2 000 kVAR 补偿电容（花费为 3 130 美元），吸收的过剩无功功率减少到 $2\ 900 - 2\ 000 = 900$ kVAR，那么年罚款现在为 $12 \times (900) \times (0.22) = 2\ 376$ 美元。这年的总花费为 $2\ 376 + 3\ 130 = 5\ 506$ 美元，第一年就节省 2 150 美元。可是如果用户着了迷，安装 3 000 kVAR 补偿电容，在第一年将比只安装 2 000 kVAR 电容实际多花 14 美元

例题 11.9　一个工业用户在滞后 0.8 PF 下运行 50 kW 电感电动机。电源电压为 230 V rms。为获得较低的电力费率，用户希望将 PF 提高到 0.95 滞后。请确定一个合适的方案

尽管可以在保持一定的无功功率下增加有功功率来提高 PF 值，但这不会减轻用户的账单，所以不是用户所感兴趣的。必须在系统中加入纯电抗负载，又因为电感电动机上的电压不允许改变，显然附加的纯电抗负载只能并联连接。如果把 $\mathbf{S}_1$ 解释为电感电动机的复

功率，$\mathbf{S}_2$ 为补偿器吸收的复功率，图 11.18 电路（这里重画于图 11.20）是可行的。

提供给电感电动机的复功率的实部必然是 50 kW，相角为 $\cos^{-1}(0.8)$，即 36.9°。所以：

$$\mathbf{S}_1=\frac{50\angle 36.9^\circ}{0.8}=50+j37.5\ \text{kVA}$$

为得到 0.95 的 PF 值，总复功率必须为：

$$\mathbf{S}=\frac{50}{0.95}\angle\cos^{-1}(0.95)=50+j16.43\ \text{kVA}$$

这样补偿负载所吸收的复功率为：

$$\mathbf{S}_2=-j21.07\ \text{kVA}$$

所需负载阻抗 $\mathbf{Z}_2$ 可以简单地按下述步骤求得。取电压源的相角为零，那么 $\mathbf{Z}_2$ 吸收的电流为：

$$\mathbf{I}_2^*=\frac{\mathbf{S}_2}{\mathbf{V}}=\frac{-j21\ 070}{230}=-j91.6\ \text{A}$$

或

$$\mathbf{I}_2=j91.6\ \text{A}$$

因此：

$$\mathbf{Z}_2=\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2}=\frac{230}{j91.6}=-j21.5\ \Omega$$

如果工作频率为 60 Hz，这个负载可由一个与电动机并联的 1 056 μF 的电容提供。可是必须用电费账单所节省的经费支付它的初始花费、维护和折旧费用。

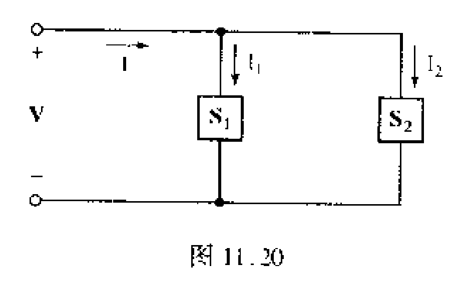


图 11.20

练习

11.9 对于图 11.21 所示的电路，求(a)1 Ω 电阻；(b) $-j10\ \Omega$ 电容；(c)$5+j10\ \Omega$ 阻抗；(d)电源所吸收的复功率。

答案：$26.6+j0$ VA；$0-j1\ 331$ VA；$532+j1\ 065$ VA；$-559+j266$ VA

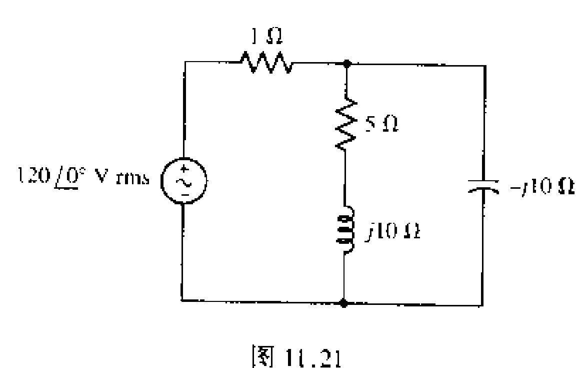


图 11.21

11.7 功率术语比较

本章中引入了多得令人生畏的功率术语，现在应该停下来做一整体考虑。表 11.1 汇集了这些术语，并提供了每一术语的简短描述。

表 11.1

术语	符号	单位	描述
瞬时功率	$p(t)$	W	$p(t)=v(t)i(t)$。它是功率在特定时刻的值，不是电压相量和电流相量的乘积
平均功率	P	W	在正弦稳态中，$P=\frac{1}{2}V_mI_m\cos(\theta-\phi)$，其中 θ 为电压的角度，ϕ 为电流的角度，电抗对 P 没有贡献
有效或 rms 值	V_{rms} 或 I_{rms}	V 或 A	例如定义 $I_{eff}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}$，如果 $i(t)$ 为正弦波，那么 $I_{eff}=I_m/\sqrt{2}$
视在功率	$\mathbf{\lvert S \rvert}$	VA	$\mathbf{\lvert S \rvert}=V_{eff}I_{eff}$，是平均功率可能的最大值，仅当纯电阻负载时 $P=\mathbf{\lvert S \rvert}$
功率因数	PF	无	平均功率与视在功率之比。对于纯电阻负载 PF 等于 1，对纯电抗负载 PF 为零
无功功率	Q	VAR	能量流进和流出电抗负载速率的度量
复功率	$\mathbf{S}$	VA	包含平均功率 P 和无功功率 Q 的方便的复物理量，$\mathbf{S}=P+jQ$

下面的实际情况可以表明这些新术语的实际重要性。首先假定有一个正弦发电机，它是在其他具有力矩输出的装置，比如蒸汽涡轮、电动机或内燃机驱动下旋转的机器。让发电机产生 200 V rms，60 Hz 的电压。此外假定发电机规定的最大功率输出为 1 kW。因此发电机有能力向电阻负载提供 5 A rms 电流。可是如果连接到发电机的负载在滞后功率因数为 0.5 下需求 1 kW，那么需要有 10 A rms 电流才行。随着 PF 值降低，为保持负载在 200 V 和 1 kW 下工作，所要提供的电流将越来越大。如果发电机是按照能安全提供最大 5 A 电流正确和经济地设计的，过大的电流会导致令人不满意的工作，比如使绝缘层过热并冒烟，这将损害电机的寿命。

按照以伏安为单位的视在功率给出发电机的额定值更有价值。这样额定 200 V 下 1 000 VA表明发电机可以在额定电压下提供的最大电流为 5 A；提供的功率取决于负载，极端情况下可能是零。在一定电压下，规定视在功率与规定电流是等价的。

练习

11.10　440 V rms 电源通过总电阻为 1.5 Ω 的传输线向负载 $Z_L=10+j2\ \Omega$ 提供功率。求(a)提供给负载的平均功率和视在功率；(b)传输线上平均和视在功率损失；(c)电源提供的平均功率和视在功率；(d)电源工作的功率因数。

答案：14.21 kW；14.49 kVA；2.131 kW；2.131 kVA；16.34 kW，16.59 kVA；0.985 滞后

11.8 小结与复习

- 元件吸收的瞬时功率为 $p(t)=v(t)i(t)$
- 正弦电压提供给阻抗的平均功率为 $\frac{1}{2}V_mI_m\cos(\theta-\phi)$，其中 θ = 电压相角，ϕ = 电流相角。
- 只有负载的电阻成分才吸收平均功率。提供给负载电抗成分的平均功率为零。
- 当满足条件 $\mathbf{Z}_L=\mathbf{Z}_{th}^*$ 时，将出现最大平均功率传输
- 正弦波的有效值或 rms 值是其幅值除以$\sqrt{2}$
- 负载的功率因数(PF)是其平均消耗功率与视在功率之比
- 纯电阻负载的功率因数为 1，纯电抗负载的功率因数为零
- 复功率定义为 $\mathbf{S}=P+jQ$，或 $\mathbf{S}=\mathbf{V}_{eff}\mathbf{I}_{eff}^*$。它的单位为伏安(VA)。
- 无功功率 Q 是复功率的虚部，是能量流进或流出负载电抗成分的速率，它的单位为乏(VAR)。
- 常常用电容改进工业负载的 PF 值，以减小对电力公司的无功功率要求。

习题

1. 电流源 $i_s(t)=2\cos 500t$ A 与 50 Ω 电阻、25 μF 电容并联连接。当 $t=\pi/2$ ms 时，求电源提供的功率，电阻吸收功率和电容吸收功率。
2. 电流 $i=2t^2-1$ A，$1\leqslant t\leqslant 3$，流经某一电路元件。(a)如果元件为 4 H 电感，求给定时间间隔内提供给它的能量；(b)如果元件为 0.2 F 电容，且 $v(1)=2$ V，求 $t=2$ s 时提供给它的功率。
3. 如果图 11.22 中 $v_c(0)=-2$ V，$i(0)=4$ A，求在 t 等于(a)0^+；(b) 0.2 s；(c) 0.4 s 时电容吸收的功率。
4. 如果 $v_S=20\cos(1\,000t+30°)$ V，求图 11.23 电路中每个无源元件在 $t=0$ 时吸收的功率。用 PSpice 证实你的答案。

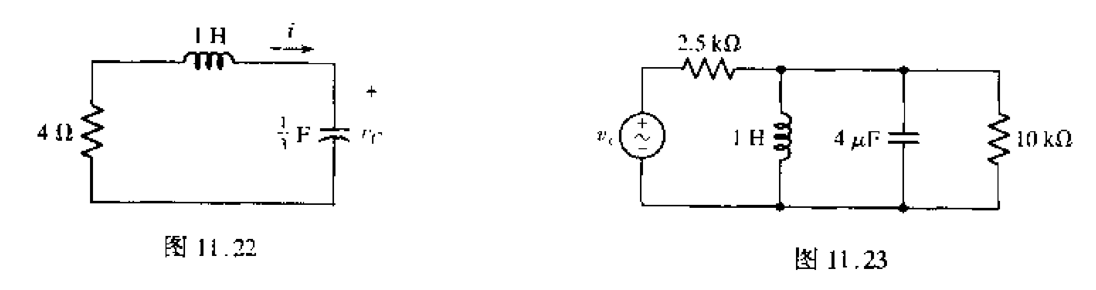


图 11.22　　图 11.23

5. 图 11.24 的电路已经达到稳态条件。求 $t=0.1$ s 时 4 个电路元件分别吸收的功率。
6. 求图 11.25 中 5 个电路元件分别吸收的平均功率。
7. 计算图 11.26 的电路中每个源产生的平均功率和提供给每个阻抗的平均功率。

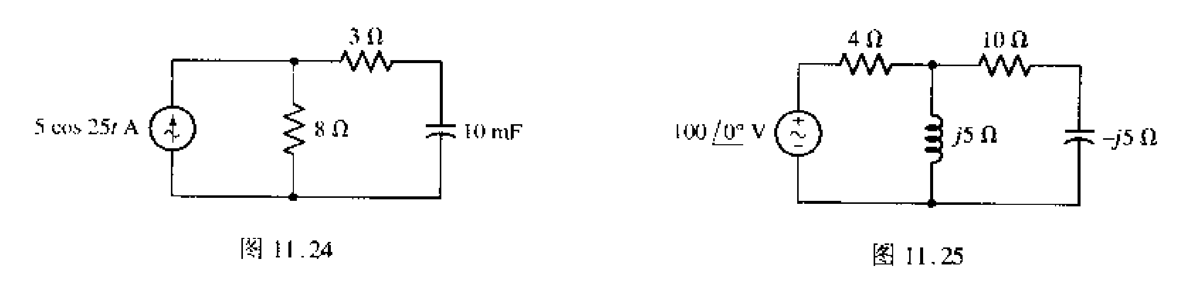


图 11.24　　图 11.25

8. 在图 11.27 所示的电路中求(a)3 Ω 电阻消耗的功率;(b)电源产生的功率。

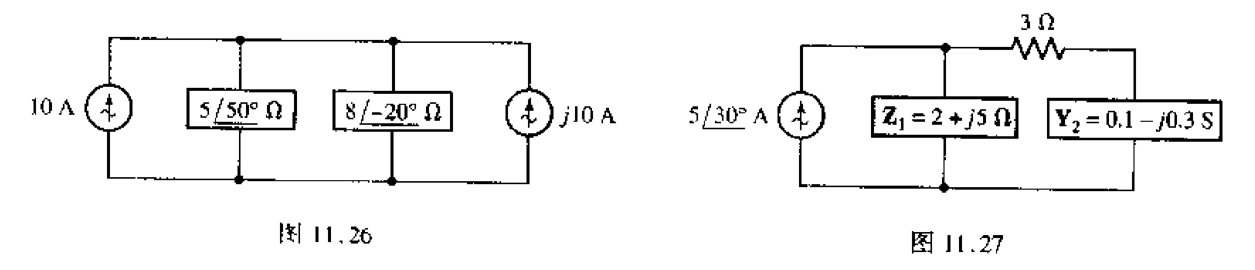


图 11.26　　图 11.27

9. 求图 11.28 所示的 5 个元件分别吸收的平均功率。

10. 确定图 11.29 的电路中受控源提供的平均功率

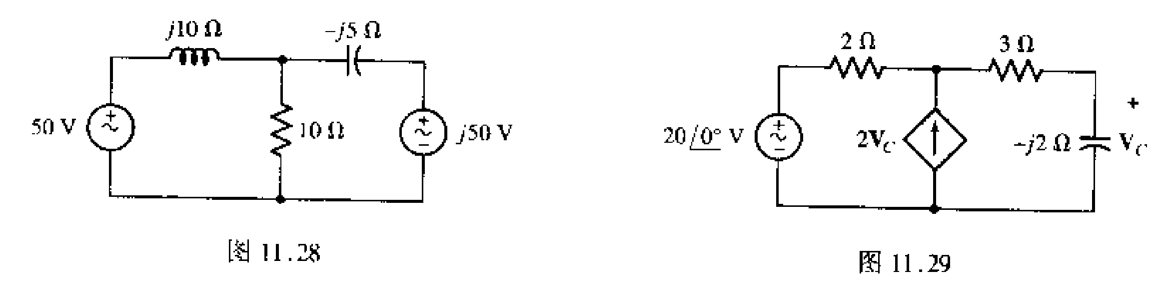


图 11.28　　图 11.29

11. 频域戴维南等效电路由正弦电源 $\mathbf{V}_{th}$ 与阻抗 $\mathbf{Z}_{th} = R_{th} + jX_{th}$ 组成。如果负载 $\mathbf{Z}_L = R_L + jX_L$ 在下列约束条件下得到最大平均功率:(a) $X_{th} = 0$;(b) R_L 和 X_L 可以独立选择;(c) R_L 固定(不等于 R_{th});(d) X_L 固定(独立于 X_{th});(e) $X_L = 0$,请确定相应条件。

12. 对图 11.30 的电路,(a)怎样的 Z_L 会吸收最大平均功率? (b)最大平均功率是多少?

13. 对图 11.30 的电路,要求负载为纯电阻 R_L,怎样的 R_L 会吸收最大平均功率? 最大平均功率是多少?

14. 求图 11.31 中受控源提供的平均功率。

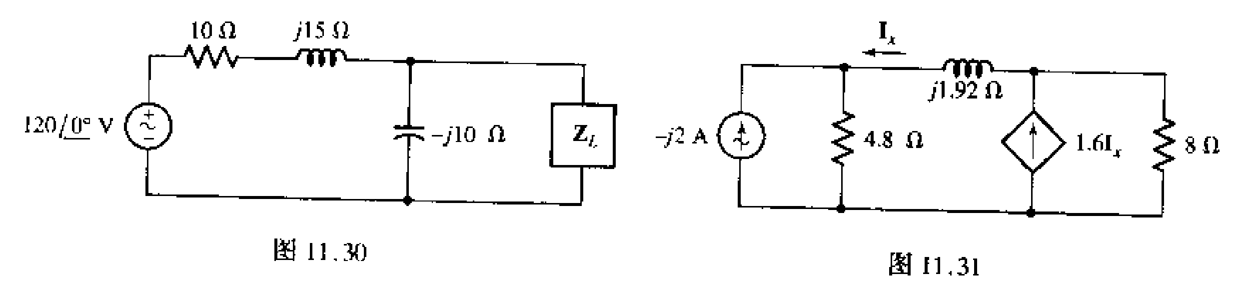


图 11.30　　图 11.31

15. 对图 11.32 的网络:(a)在 a 和 b 之间怎样的阻抗 Z_L 将吸收最大平均功率? (b)最大平均功率值是多少?

16. 在图 11.33 中用工作频率为 50 Hz 的 $5\angle -30°$ A 电源替换 $10\angle 0°$ A 电源，确定提供给每个方框网络的平均功率。

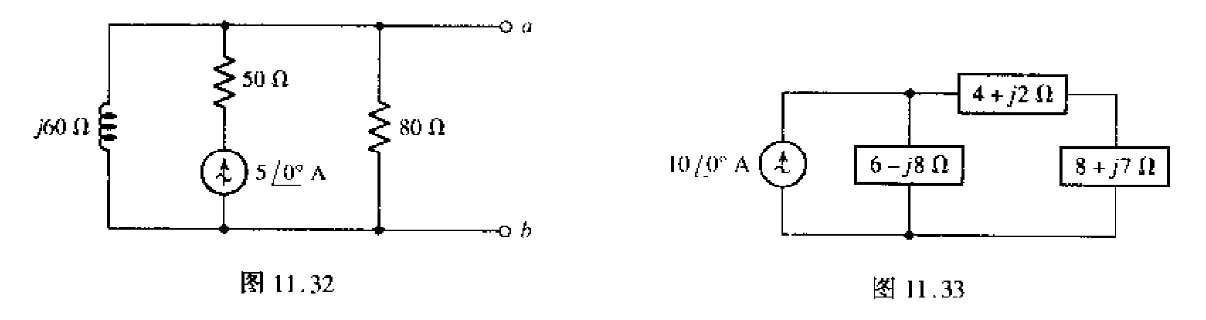


图 11.32　　图 11.33

17. 在图 11.34 电路中求吸收最大功率的 R_L 值，并确定该功率值。

18. 在图 11.35 中，如果(a)$\lambda = 0$；(b)$\lambda = 1$，确定提供给每个电阻的平均功率；(c)假定实际电路工作在 60 Hz，用 PSpice 证实你的答案

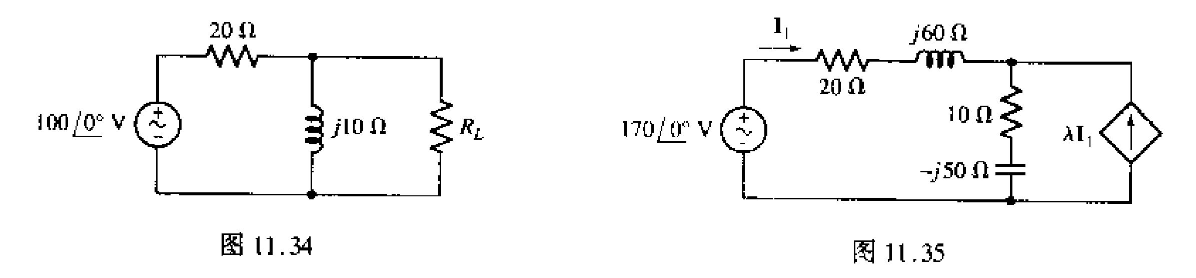
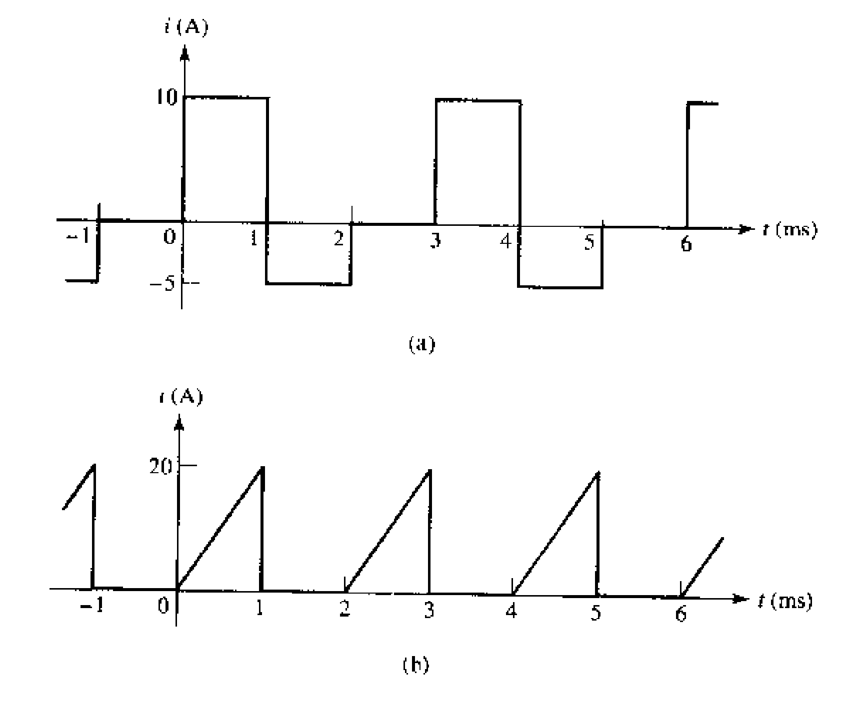
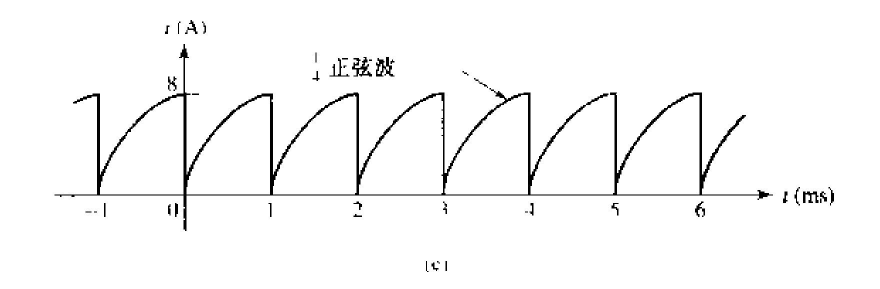


图 11.34　　图 11.35

19. (a)计算图 11.36 所示的每个波形的平均值；(b)如果每个波形都取平方，求这些新周期波形的平均值(单位：A^2)。





(c)

图 11.36

20. 在图 11.23 的电路中，如果 $v_s = 400\sqrt{2}\cos(120\pi t - 9°)$ V，求提供给每个元件的平均功率，用 PSpice 证实你的答案

21. (a)求 $v(t) = 10 + 9\cos 100t + 6\sin 100t$ 的有效值；(b)求图 11.37 所示波形的有效值；(c)它的平均值.

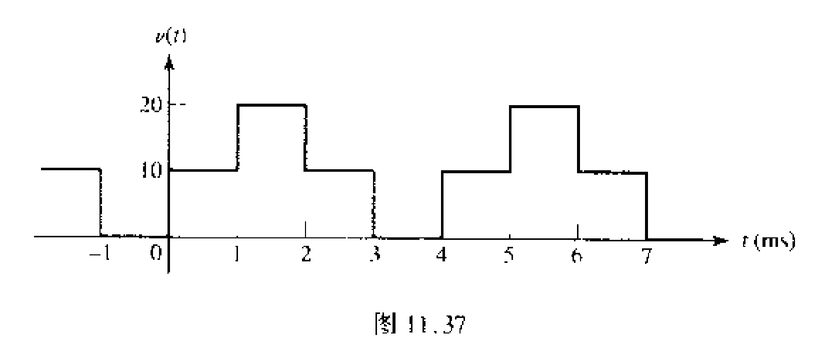


图 11.37

22. 求下列波形的有效值：(a) $g(t) = 2 + 3\cos 100t + 4\cos(100t - 120°)$；(b) $h(t) = 2 + 3\cos 100t + 4\cos(101t - 120°)$；(c)图 11.38 所示波形.

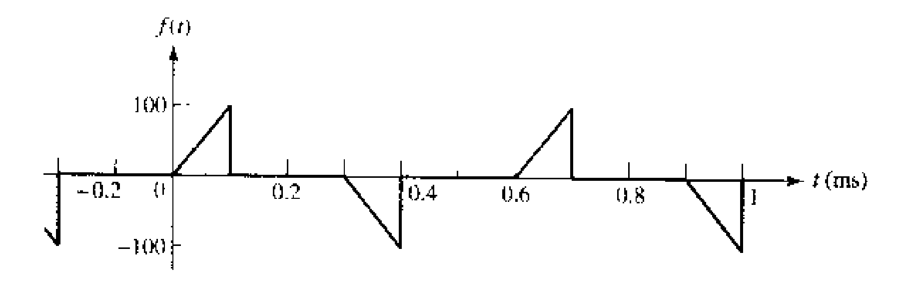


图 11.38

23. 给定周期函数 $f(t) = (2 - 3\cos 100t)^2$，求(a)它的平均值；(b)它的 rms 值。

24. 计算图 11.36 中所示的每个波形的有效值

25. 四个理想独立电压源，$A\cos 10t$、$B\sin(10t + 45°)$、$C\cos 40t$ 和常数 D，与一个 4 Ω 电阻相串联。如果(a) $A = B = 10$ V，$C = D = 0$；(b) $A = C = 10$ V，$B = D = 0$；(c) $A = 10$ V，$B = -10$ V，$C = D = 0$；(d) $A = B = C = 10$ V，$D = 0$；(e) $A = B = C = D = 10$ V，求电阻消耗的平均功率.

26. (a)在图 11.39 中 R 取何值可使两个电感上的 rms 电压相等？(b)该 rms 电压值是多少？(c)用 PSpice 证实你的答案。

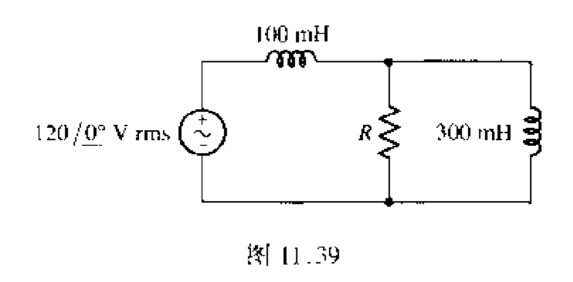


图 11.39

27. 在图 11.40 中每个波形的周期均为 3 s，它们有些类似。(a)计算每个波形的平均值；(b)确定它们的有效值；(c)用 PSpice 证实你关于锯齿波的答案。

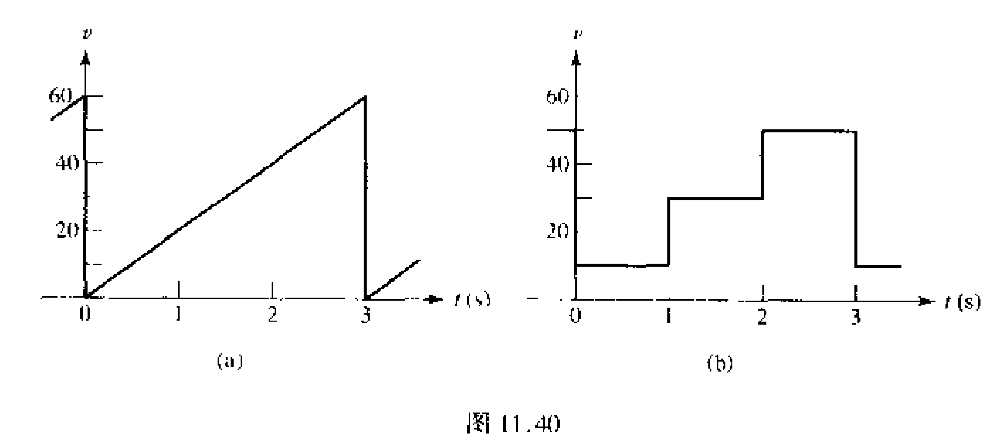


图 11.40

28. 在图 11.39 中用 1 μF 电容替换 100 mH 电感，用 3 μF 电容替换 300 mH 电感。(a) R 取何值可使流经两个电容的 rms 电流相等？(b)该 rms 电流值是多少？(c)用 PSpice 证实你的答案

29. 一电压波形的周期为 5 s，在时间间隔 $0 < t < 5$ s 内，波形表示为 $v(t) = 10t[u(t) - u(t-2)] + 16e^{-0.5(t-3)}[u(t-3) - u(t-5)]$ V。求波形的有效值。

30. 1 kΩ 电阻和 2 H 电感的串联组合，在任何时候消耗功率不允许超过 250 mW。假定正弦电流的 $\omega = 500$ rad/s，所允许的最大 rms 电流为多少？

31. 在图 11.41 中，让 $\mathbf{I} = 4\underline{/35^\circ}$ A rms。求(a)电源提供的平均功率；(b)提供给 20 Ω 电阻的平均功率；(c)提供给负载的平均功率；(d)求电源提供的视在功率；(e)提供给 20 Ω 电阻的视在功率；(f)提供给负载的视在功率；(g)负载 PF 值是多少？

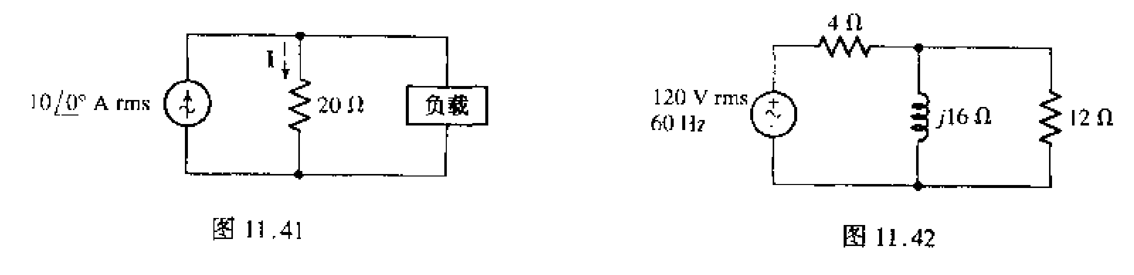


图 11.41

图 11.42

32. (a)求图 11.42 中电源工作的功率因数；(b)求电源提供的平均功率；(c)为使功率因数为 1，应使用多大的电容与电源并联？(d)用 PSpice 证实你的答案。

33. 在图 11.43 所示电路中，令 $\mathbf{Z}_A = 5 + j2\ \Omega$，$\mathbf{Z}_B = 20 - j10\ \Omega$，$\mathbf{Z}_C = 10\underline{/30^\circ}\ \Omega$，$\mathbf{Z}_D =$

$10\angle 60^\circ\ \Omega$。求提供给每个负载的视在功率和电源产生的视在功率。

34. 导出式(11.28)

35. 考虑一个工作频率为 $f=50$ Hz 的网络，它与负载串联，公共电流为 $10\angle 0^\circ$ A rms 这样的系统是具有并联负载和公共电压系统的对偶系统。在串联系统中，要取消负载需要将负载短路。开路将引发各种火灾。本系统有两个元件：$\mathbf{Z}_1=30\angle 15^\circ\ \Omega$ 和 $\mathbf{Z}_2=40\angle 40^\circ\ \Omega$。(a)电源工作的 PF 为多少？(b)为使功率因数达到 0.9 需要安装多大的串联电容？

36. 组合负载由三个并联负载组成。一个 PF 为 0.92 滞后，吸收 100 W 功率；另一个 PF 为 0.8 滞后，吸收 250 W 功率；第三个 PF 为 1，吸收 150 W 功率。电源为电压源 $\mathbf{V}_s$ 与 10 Ω电阻串联。所有负载都必须工作在 115 V rms 下。确定(a)流过电源的 rms 电流；(b)组合负载的 PF 值。

37. 图 11.44 中负载 PF = 0.8 滞后，吸收 10 kVA 功率。如果 $|\mathbf{I}_L|=40$ A rms，为使电源工作于 PF = 0.9 滞后，应安装多大的电容？

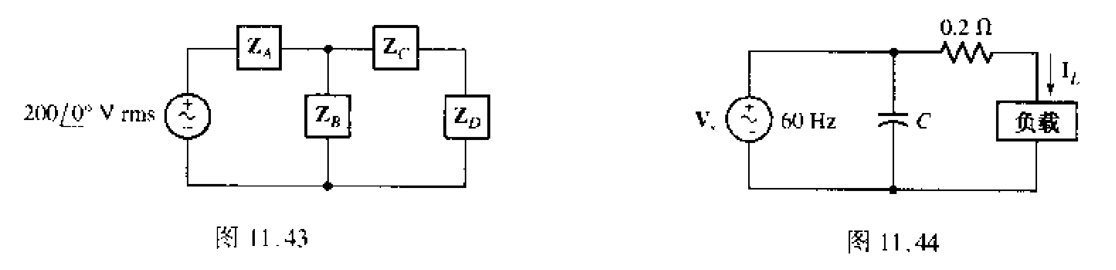


图 11.43　　图 11.44

38. 考虑图 11.45 电路。为使连接电源的总负载 PF 值提高到 0.92 滞后，应增加多大电容？(a)如果电容与 100 mH 电感串联；(b)与 100 mH 电感并联。用 PSpice 证实你对(a)和(b)的回答。

39. 250 V rms 系统对三个并联负载供电。第一个在单位功率因数下吸收 20 kW；第二个 PF = 0.8 滞后，用电 25 kVA；第三个 PF 为 0.75 滞后，吸收 30 kW 功率；(a)求电源提供的总功率；(b)电源提供的总视在功率；(c)电源工作的 PF 值。

40. 一个烤面包机月用电峰值 200 kW，月电抗需求为 280 kVAR。为补偿损失和鼓励用户提高 PF 值，某地方电力公司对超过标准的电抗用量罚款 \$0.22/kVAR，标准电抗用量按 0.65 乘以平均功率用量计算；(a)利用以上费率表计算用户与 PF 罚款有关的年度费用；(b)计算电力公司制定政策所根据的目标 PF 值；(c)如果电力公司提供补偿电容的花费为每增加 100 kVAR 为 200 美元，每增加 200 kVAR 为 395 美元，用户的最佳解决方案是什么？(d)校正功率因数所需的实际电容是多大(以法拉为单位)？

41. 分析图 11.46 的电路，求 5 个电路元件分别吸收的复功率。

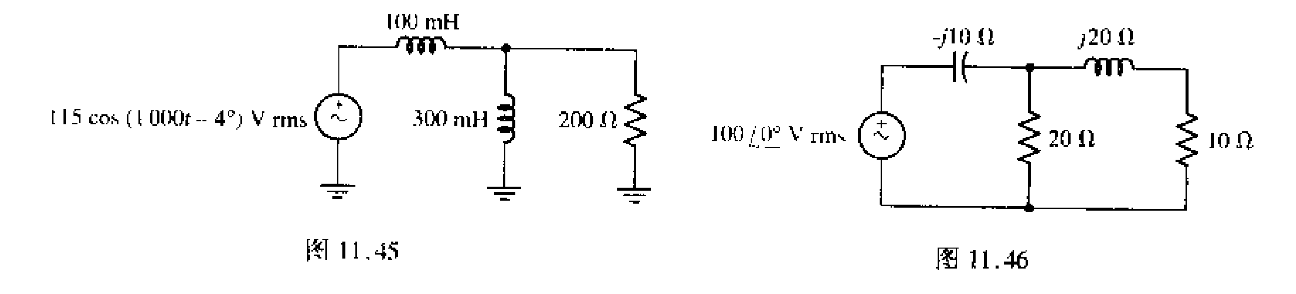


图 11.45　　图 11.46

42. 图 11.47 中的两个电源工作于同一频率。求每个电源产生的复功率和每个无源电路元件吸收的复功率。

43. 求向负载提供的复功率，负载(a)PF 为 0.75 超前，吸收 500 VA；(b)PF 为 0.75 超前，吸收 500 W；(c)PF 为 0.75，吸收 -500 VAR。

44. 电容阻抗 $\mathbf{Z}_C = -j120\ \Omega$ 与负载 $\mathbf{Z}_L$ 并联，它们与 $\mathbf{V}_s = 400\angle 0°$ V rms 电源并联，电源产生的复功率为 $1.6 + j0.5$ kVA。求(a)提供给 $\mathbf{Z}_L$ 的复功率；(b)$\mathbf{Z}_L$ 的 PF 值；(c)电源的 PF 值。

45. 230 V rms 电源向三个并联连接的负载供电：PF 为 0.8 滞后，吸收 1.2 kVA；PF 为 0.9 滞后，吸收 1.6 kVA 和单位 PF 吸收 900 W。求(a)电源电流的幅值；(b)电源工作的 PF 值；(c)电源提供的复功率。

46. 电压源 $339\cos(100\pi t - 66°)$ V 与 1 kΩ 纯电阻相连。(a)电压源的有效电压是多少？(b)负载吸收的峰值瞬时功率是多少？(c)负载吸收的最小瞬时功率是多少？(d)计算电源提供的视在功率；(e)计算电源提供的无功功率；(f)提供给负载的复功率是多少？

47. 电压源 $339\cos(100\pi t - 66°)$ V 与 150 mH 纯电感相连。(a)电路中的有效电流是多少？(b)负载吸收的峰值瞬时功率是多少？(c)负载吸收的最小瞬时功率是多少？(d)计算电源提供的视在功率；(e)计算电源提供的无功功率；(f)提供给负载的复功率是多少？

48. 对于图 11.23 的电路，$v_s = 5\cos t$ V。(a)提供给 10 kΩ 电阻的峰值瞬时功率是多少？(b)计算提供给 10 kΩ 电阻的无功功率；(c)求提供给 10 kΩ 电阻的视在功率；(d)电源提供的复功率是多少？

49. 在图 11.48 中，求(a)提供给每个无源元件的复功率；(b)指出上述功率之和等于电源产生的复功率；(c)这个结论对视在功率也适用吗？(d)电源提供的平均功率是多少？(e)电源提供的无功功率是多少？

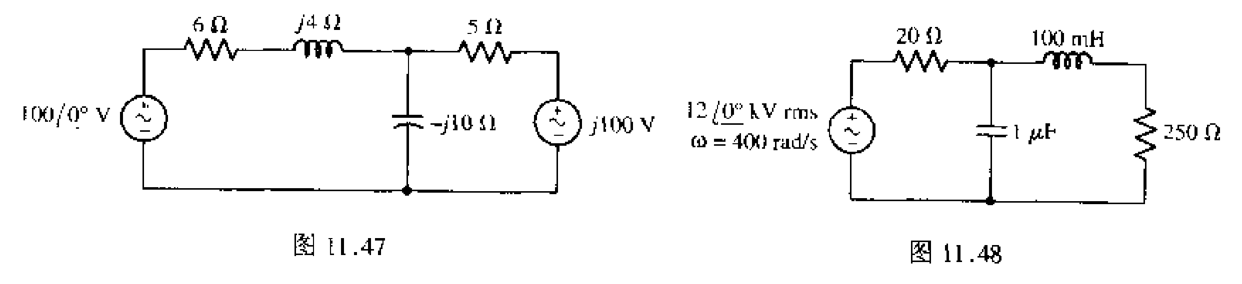


图 11.47　　图 11.48

50. 负载的工作电压为 2 300 V rms，功率因数为 0.812 滞后，吸收电流为 28 A rms。求(a)以安培为单位的峰值电流；(b)假定工作频率为 60 Hz，在 $t = 2.5$ ms 时的瞬时功率；(c)负载吸收的有功功率；(d)负载的复功率；(e)视在功率；(f)阻抗；(g)无功功率。

第12章　多相电路

本章要点：

- 理解单相和多相系统的区别
- 熟悉对Y形和Δ形三相电源的处理
- 熟悉对Y形和Δ形网络的处理
- 掌握三相系统的按相(per-phase)分析法

12.1　引言

电力部门向居民和工业部门提供的是正弦波形式的电流或电压，通常称为交流电(AC)。大多数北美居民使用的是频率为60 Hz，有效值为120 V的正弦交流电。在世界的其他地区，则是频率为50 Hz，有效值为240 V的正弦交流电。最初，托马斯·爱迪生提议电力部门采用直流方式来传输电能，但电力领域的先驱尼古拉·特斯拉和乔治·韦斯汀豪斯强烈提倡使用交流方式进行传输。最后，人们采纳了后者的建议。

家用电器的电压有效值通常是120 V，但也有110 V或115 V(美国标准)，这取决于生产厂商。在确定交流电功率需求的峰值时，交流电系统的瞬态响应是很重要的，因为大多数电器在启动时所需要的电流比稳定运转时大很多。然而，在大多数情况下，所关心的是稳定状态的运行，因此使用相量图分析的方法是很方便的。这里将介绍一种新型电压源——三相电源，它可以用三线或四线配置成Y形，也可以用三线配置成Δ形，如何配置，取决于设备需要。

12.2　多相系统

迄今为止，每当使用术语"正弦源"时，总可以想像一个单一的正弦电压或电流源，它具有一定的幅度、频率和相位。在这一章中，将介绍多相源的概念，主要集中介绍三相系统。利用旋转发电机产生三相电比单相电有其独特的优势，而且三相电的传输在经济效益上也比较高。虽然我们所接触的电器设备大部分都是使用单相电，然而使用三相电的设备也不少见，尤其是在制造业的设备中更为普遍。特别是，大型制冷系统以及机械设备中的电机线圈大多是按三相电要求绕制的。一旦熟悉了多相系统的原理就会发现，对于其他的应用，很容易从多相系统的一条"腿"获得单相电

现在考虑一种最常见的多相系统——三相系统。源有三个接线端(不计中线或地线)，用电压表测量，会发现任意两端的电压都是等幅度的正弦波，但是这些电压的相位不同；每一个电压与其他两个电压的相位都相差120°，相角符号依赖于电压的读取顺序。图12.1给出了一组可能的电压关系。平衡负载可以从三个相中取得相等的功率，但是如果其中的一相瞬时为零，由于相位关系，要求其他两相的幅度是原来的一半。任何时刻，总负载获得的瞬时功率均不为零；事实上，总负载上的瞬时功率是常数。这在旋转发电机中是很有利的，因为它保证了

转子上的转矩比单相电源中更稳定，这样就减少了振动

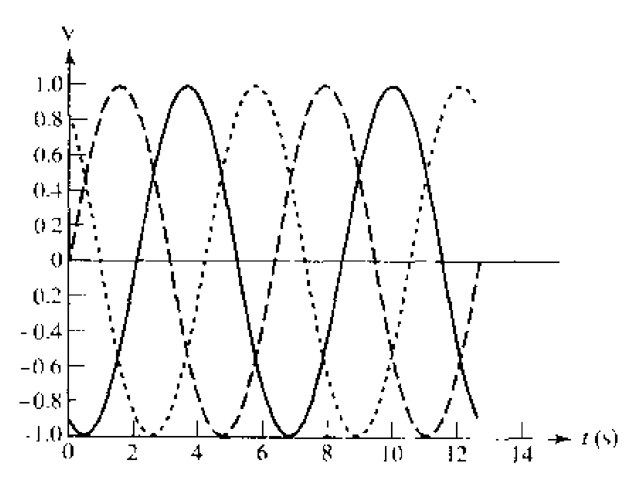


图 12.1 三相电的一个例子，任何一相与其他两相的相位相差为120°可以看出，在任意的瞬间，只可能有一相的电压为零

对于更多相的使用，例如六相和十二相系统，大多数只限于为大型整流器提供电源。整流器把交流电转变成直流电，使得流过负载的电流保持一个方向，这样负载上的电压符号保持不变。整流器的输出是直流，带有一些脉冲成分或纹波，这些脉冲和纹波随着相数的增多而减弱。

几乎所有的实际多相系统所含的电源都近似于理想电压源或者理想电压源与一个小内阻的串联，而三相电流源在实际中很少使用。

12.2.1 双下标符号

使用双下标符号来描述多相电压和电流是很方便的。使用这些符号，电压或电流，例如相量 $\mathbf{V}_{ab}$ 或 $\mathbf{I}_{aA}$，比简单地描述成 $\mathbf{V}_3$ 或 $\mathbf{I}_x$ 有更多的含义。一般这样来定义，a 点到 b 点的电压定义为 $\mathbf{V}_{ab}$。这样，正号就放在 a 点，如图 12.2(a)所示。所以可以认为双下标就等价于一个正负符号对，同时使用两者就多余了。例如，参考图 12.2(b)，可以看到 $\mathbf{V}_{ad}=\mathbf{V}_{ab}+\mathbf{V}_{bd}$。双下标符号的用处之一在于，基尔霍夫电压定律要求两点之间不管经过的路径有何不同，它们的电压一定相同，因此，$\mathbf{V}_{ad}=\mathbf{V}_{ab}+\mathbf{V}_{bd}=\mathbf{V}_{ac}+\mathbf{V}_{cd}=\mathbf{V}_{ab}+\mathbf{V}_{bc}+\mathbf{V}_{cd}$ 等等。这样做的好处是不必参考电路图就可以满足 KVL 条件；即使有一个点，或下标字母没有在图上标出也可以正确地写出方程。例如，可以这样写 $\mathbf{V}_{ad}=\mathbf{V}_{ax}+\mathbf{V}_{xd}$，这里的 x 可以表示任意一个点。

三相电压的一种表示方法如图 12.3 所示

假设电压 $\mathbf{V}_{an}$，$\mathbf{V}_{bn}$，$\mathbf{V}_{cn}$ 都是已知的：

$$\mathbf{V}_{an}=100\underline{/0^\circ}\ \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{bn}=100\underline{/-120^\circ}\ \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{cn}=100\underline{/-240^\circ}\ \text{V}$$

这样，电压 $\mathbf{V}_{ab}$ 就可以计算出来，需要注意它们的下标：

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{ab}&=\mathbf{V}_{an}+\mathbf{V}_{nb}=\mathbf{V}_{an}-\mathbf{V}_{bn}\\&=100\underline{/0^\circ}-100\underline{/-120^\circ}\ \text{V}\\&=100-(-50-j86.6)\ \text{V}\\&=173.2\underline{/30^\circ}\ \text{V}\end{aligned}$$

三个给定的电压和相量 $\mathbf{V}_{ab}$ 的构造可以从相量图12.4上看出来

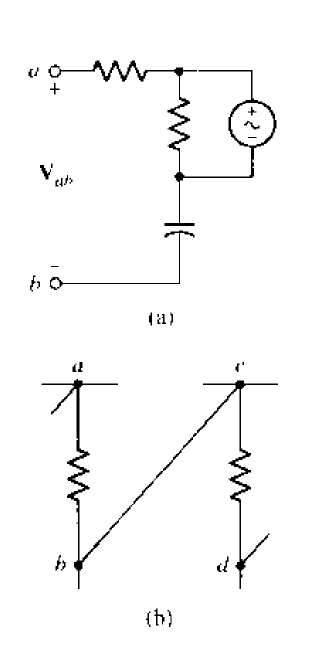


图 12.2　(a)电压 $\mathbf{V}_{ab}$ 的定义;(b) $\mathbf{V}_{ad} = \mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{bc} + \mathbf{V}_{cd} = \mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{cd}$

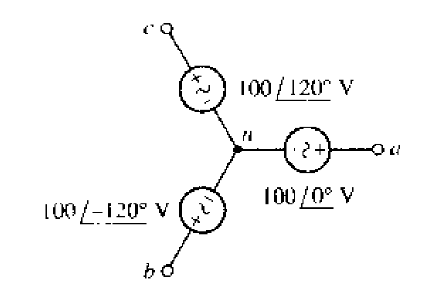


图 12.3　双下标符号电压网络的数值实例

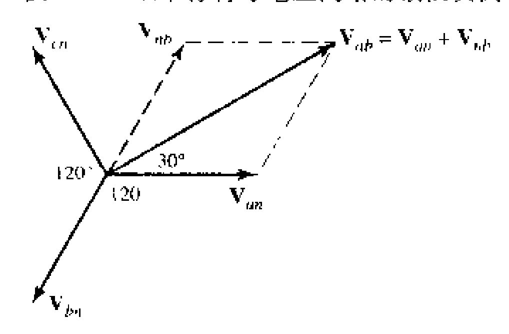


图 12.4　该相量图解释了双下标法的图解应用:在图12.3所示网络中如何获得 $\mathbf{V}_{ab}$

双下标符号也可以应用于电流上。定义电流 $\mathbf{I}_{ab}$ 是从 a 到 b 的最短路径的电流。在考虑的每个电路中,在 a 和 b 之间至少有两条路径,只有当一条路径明显比其他路径短,或更直接时,才使用双下标符号。通常这样的路径只通过一个元件,这样电流 $\mathbf{I}_{ab}$ 可以在图12.5上正确地表示出来。实际上,在讨论该电流时,甚至不需要箭头表示,下标已经指明其方向。但是,对图12.5电路中的电流 $\mathbf{I}_{cd}$ 的辨认会使人产生疑惑。

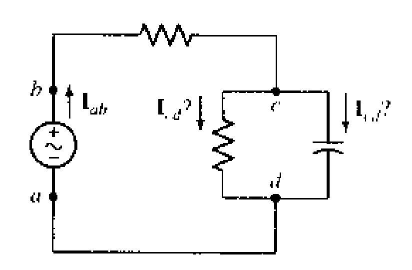


图 12.5　正确使用和错误使用电流双下标标记规则的说明

练习

12.1　令 $\mathbf{V}_{ab} = 100\,/0°$ V,$\mathbf{V}_{bd} = 40\,/80°$ V,$\mathbf{V}_{ca} = 70\,/200°$,求:(a)$\mathbf{V}_{ad}$;(b)$\mathbf{V}_{bc}$;(c)$\mathbf{V}_{cd}$。

12.2　参看图12.6中的电路图,令 $\mathbf{I}_{fj} = 3$ A,$\mathbf{I}_{de} = 2$ A,$\mathbf{I}_{hd} = -6$ A。求(a)$\mathbf{I}_{cd}$;(b)$\mathbf{I}_{ef}$;(c)$\mathbf{I}_{ij}$。

答案:12.1:114.0 /20.2° V;41.8 /145.0° V　12.2:−3 A;7 A;7 A

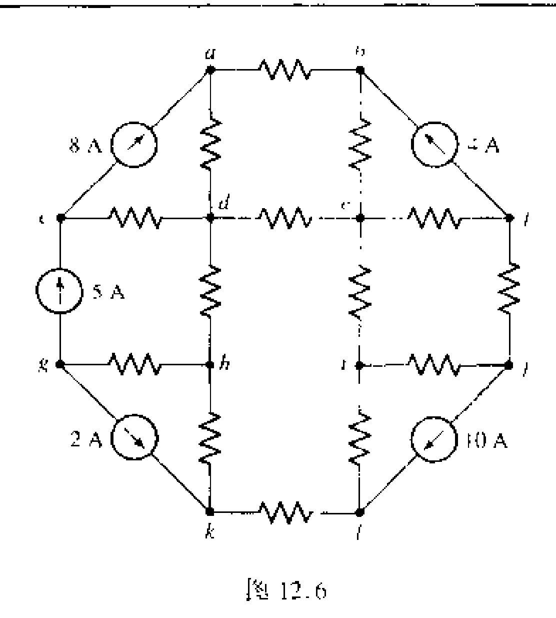


图 12.6

12.3 单相三线系统

单相三线电源是这样定义的，一个电源有三个输出端，如图 12.7(*a*)中的 a，n 和 b，在这里，相量电压 $\mathbf{V}_{an}$ 和 $\mathbf{V}_{nb}$ 是相等的。电源可以用两个相同的电压源组成；在图 12.7(b)中，$\mathbf{V}_{an}=\mathbf{V}_{nb}=\mathbf{V}_1$。很明显，$\mathbf{V}_{ab}=2\mathbf{V}_{an}=2\mathbf{V}_{nb}$。因此，这样的电源可以给负载提供两种电压。通常的家用电器都是单相三线制的，允许工作在 110 V 和 220 V。高电压的应用通常是那些需要较大功率的应用，相同的功率下，高电压工作时需要的电流小。这样，电器中、家庭中的电力布线以及发电厂的电力分配系统都可以安全地使用较细的导线。大电流应用必须使用较粗的导线，以降低由于导线电阻产生的热量。

之所以称之为单相，是因为电压 $\mathbf{V}_{an}$ 和 $\mathbf{V}_{nb}$ 是相等的，而且有相同的相角。然而，从另一个观点来看，边线和中线(通常称之为中性线)之间的电压，它们的相角恰好相差 180°。也就是说 $\mathbf{V}_{an}=-\mathbf{V}_{bn}$，即 $\mathbf{V}_{an}+\mathbf{V}_{bn}=0$。在后面的章节中将看到，平衡的多相系统就是由一组等幅度相等、相角之和为零的电压合成。从这个观点上看，单相三线系统实际上就是一个平衡的两相系统。然而，“两相”这个术语传统上是用于由两个相角相差 90°的电压源合成的不平衡系统。

下面考虑一个单向三线系统，每一条边线与中线之间都接一个相同的负载 $\mathbf{Z}_p$(图 12.8)。首先假设导线是理想导线。

既然：

$$\mathbf{V}_{an}=\mathbf{V}_{nb}$$

那么：

$$\mathbf{I}_{aA}=\frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_p}=\mathbf{I}_{Bb}=\frac{\mathbf{V}_{nb}}{\mathbf{Z}_p}$$

所以：

$$\mathbf{I}_{nN}=\mathbf{I}_{Bb}+\mathbf{I}_{Aa}=\mathbf{I}_{Bb}-\mathbf{I}_{aA}=0$$

这样，在中线里并没有电流流过，它可以省略掉而又不会改变系统的电流或电压。如果两个负

载相同，并且两个电源相同，就可以得出这一结果。

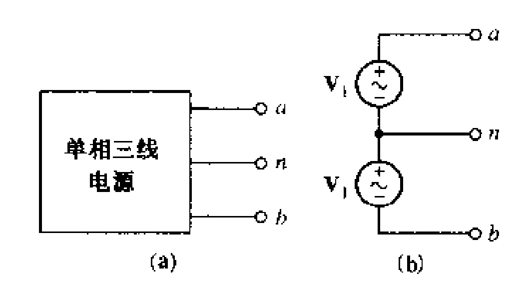


图 12.7　(a)单相三线电源；(b)用两个等同的电压源表示一个单相三线电源

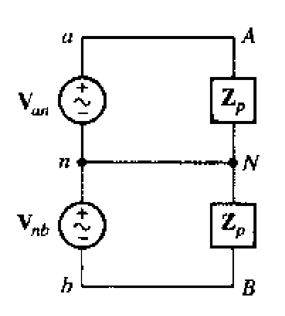


图 12.8　一个简单的单相三线系统。两个负载是相同的，中线电流为零

12.3.1　有限导线阻抗的影响

下面考虑导线具有有限阻抗的影响。如果导线 aA 和 bB 有相同的阻抗，该阻抗可被加到 $\mathbf{Z}_p$ 上，结果还是两个相同的负载，中线电流仍为零。现在让中线也有阻抗 $\mathbf{Z}_n$。不需要经过仔细分析就可以知道由于电路的对称性，中线电流仍为零。但是，由于该阻抗与每一个电源都形成一个回路，这样，对中线电流，它就是一个平衡的或对称的负载；中线上的非零阻抗不会破坏电路的对称性。

最通用的单相三线系统在每一个边线和中线之间以及两个边线之间有不等的负载；两个边线上的阻抗可以看做大致相等，但中线的阻抗通常很大。现在考虑这样的一个系统，该系统有不平衡的负载，我们关心流过中线的电流，以及系统传送功率到非平衡负载的总效率。

例题 12.1　分析图 12.9 所示的系统，求出三个负载中每个负载所消耗的功率，以及中线和两条边线的功率损耗

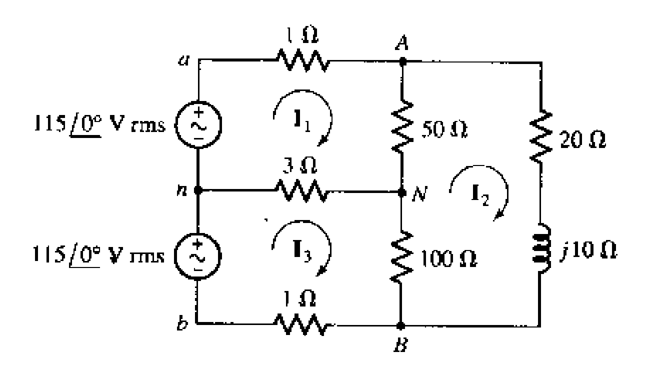


图 12.9　一个典型的单相三线系统

● 弄清问题的目标：

电路里的三个负载是：50 Ω 电阻、100 Ω 电阻、$(20+10j)\Omega$ 阻抗。两条边线上各有一个 1 Ω 电阻，中线有一个 3 Ω 电阻。需要求出通过每一个电阻或阻抗的电流才能求出功率来。

● 收集已知信息：

现在有一个单相三线的系统，在图 12.9 的电路图中做出了详细的标记，要计算的电流是有效电流。

● 选择最适合问题的已有方法：

该电路适合用网孔法来分析，因为它有三个非常明显的网孔。分析的结果将是一组网孔的电流，可以用它们来计算消耗的功率。

● 建立适当的方程组：

三个网孔方程是：

$$-115\angle 0^\circ + \mathbf{I}_1 + 50(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) + 3(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_3) = 0$$

$$(20 + j10)\mathbf{I}_2 + 100(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3) + 50(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) = 0$$

$$-115\angle 0^\circ + 3(\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_1) + 100(\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2) + \mathbf{I}_3 = 0$$

整理后可以得到下面的三个方程：

$$\begin{aligned} 54\mathbf{I}_1 \quad & -50\mathbf{I}_2 \quad & -3\mathbf{I}_3 \quad & = 115\angle 0^\circ \\ -50\mathbf{I}_1 \quad & +(170 + j10)\mathbf{I}_2 \quad & -100\mathbf{I}_3 \quad & = 0 \\ -3\mathbf{I}_1 \quad & -100\mathbf{I}_2 \quad & 104\mathbf{I}_3 \quad & = 115\angle 0^\circ \end{aligned}$$

● 确定是否还需其他信息：

这里有三个方程，三个未知数，所以可以进行求解。

● 试解：

使用科学计算器可以解出相电流 $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3$，得：

$$\mathbf{I}_1 = 11.24\angle -19.83^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_2 = 9.389\angle -24.47^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_1 = 10.37\angle -21.80^\circ \text{ A}$$

边线上的电流是：

$$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_1 = 11.24\angle -19.83^\circ \text{ A}$$

和

$$\mathbf{I}_{bB} = -\mathbf{I}_3 = 10.37\angle 158.20^\circ \text{ A}$$

中线上的电流是：

$$\mathbf{I}_{nN} = \mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_1 = 0.9459\angle -177.7^\circ \text{ A}$$

每个负载的平均功率是：

$$P_{50} = |\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2|^2 \times (50) = 206 \text{ W}$$

$$P_{100} = |\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2|^2 \times (100) = 117 \text{ W}$$

$$P_{20+j10} = |\mathbf{I}_2|^2 \times (20) = 1763 \text{ W}$$

总的负载功率消耗为 2 086 W，每条边线的损耗是：

$$P_{aA} = |\mathbf{I}_1|^2 \times (1) = 126 \text{ W}$$

$$P_{bB} = |\mathbf{I}_3|^2 \times (1) = 108 \text{ W}$$

$$P_{nN} = |\mathbf{I}_{nN}|^2 \times (3) = 3 \text{ W}$$

导线的总损耗为 237 W。显然，导线很长；否则，边线上如此高的功耗会导致导线过热。

● 证实所得解是否合理和满足要求：

总功耗为 206 + 117 + 1 763 + 237，即 2 323 W，可以通过计算出每一个电压源消耗的功率来检查答案是否正确：

$$P_{an} = 115 \times (11.24)\cos 19.83° = 1\ 216\ \text{W}$$

$$P_{bn} = 115 \times (10.37)\cos 21.80° = 1\ 107\ \text{W}$$

即 2 323 W。系统的传输效率为：

$$\eta = \frac{负载消耗的总功率}{电源发出的总功率} = \frac{2\ 086}{2\ 086 + 237} = 89.8\%$$

这个数值对于蒸汽机或内燃机来说是不可能达到的，但对于一个设计很好的分布式系统来说却是很低的。如果源和负载不能靠得很近的话，最好使用直径较大的导线来连接。图 12.10 给出了两个电压源、边线上的电流、中线上的电流的相量图。从图上可以看出，$\mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB} + \mathbf{I}_{nN} = 0$。

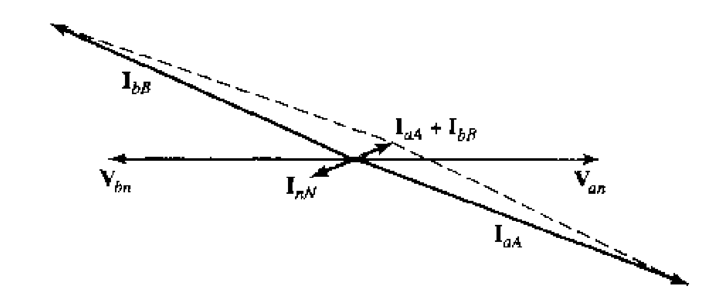


图 12.10　图 12.9 的电路图的电压源和三个电流的相量图。注意到，$\mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB} + \mathbf{I}_{nN} = 0$

练习

12.3　对图 12.9 稍做改动，在两条边线上分别加一个 1.5 Ω 电阻，在中线上加一个 2.5 Ω 电阻。求三个负载上的功率。

答案：153.1 W；95.8 W；1 347 W

12.4　三相 Y-Y 形接法

三相源有三个端点，称为线端，第四个端点，即中线（neutral）端可以使用也可以不使用。现在先讨论一个有中线的三相源，它可以用三个理想的电压源接成 Y 形，如图 12.11 所示；图中给出了端点 a，b，c 和 n。下面只考虑平衡三相源，定义为：

$$|\mathbf{V}_{an}| = |\mathbf{V}_{bn}| = |\mathbf{V}_{cn}|$$

和

$$\mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{bn} + \mathbf{V}_{cn} = 0$$

这三个电压，每个都连接在边线和中线之间，称为相电压。如果任选 $\mathbf{V}_{an}$ 作为参考，即定义：

$$\mathbf{V}_{an} = V_p \underline{/0°}$$

就可以使用 V_p 来表示任何一个相电压的均方根幅度，那么三相源的定义就可以是：

$$\mathbf{V}_{bn} = V_p \underline{/-120°} \qquad 和 \qquad \mathbf{V}_{cn} = \mathbf{V}_p \underline{/-240°}$$

或

$$\mathbf{V}_{bn} = \mathbf{V}_p \underline{/120°} \qquad 和 \qquad \mathbf{V}_{cn} = V_p \underline{/240°}$$

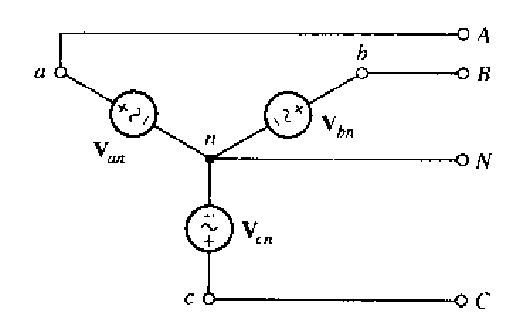


图 12.11 Y形接法的三相四线源

前者称为正相序列，或 *abc* 相序列，见图 12.12(a)；后者称为负相序列，或者 *cba* 相序列，它的相量图见图 12.12(b)。三相源的实际相序列依赖于对三个端点 a, b, c 的选择。可以按照总是保持正相序列的要求来选择它们，在我们所研究的大多数系统中都假定是正相位系统。

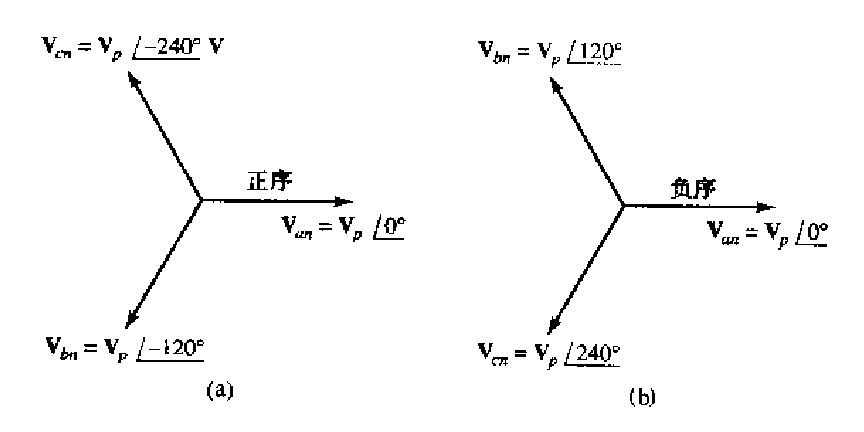


图 12.12 (a)正的或 *abc* 相序列；(b)负的或 *cba* 相序列

12.4.1 边线到边线的电压

接下来考虑边线到边线的电压(经常简称为线电压)，当相电压是图 12.12(a)所示的电压时，可以画出线电压。由于角度都是30°的倍数，所以使用相量图很容易做到这一点。它们的结构如图 12.13 所示。

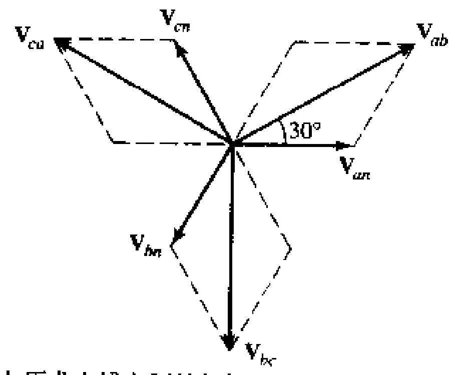


图 12.13 通过已知的相电压求出线电压的相量图，$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}_{an} - \mathbf{V}_{bn} = V_p \angle 0° - V_p \angle -120°$
$= V_p - V_p\cos(-120°) - jV_p\sin(-120°) = V_p\left(1 + \frac{1}{2} + j\sqrt{3}/2\right) = \sqrt{3}\,V_p \angle 30°$

结果为：

$$\mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3}V_p \underline{/30^\circ} \tag{12.1}$$

$$\mathbf{V}_{bc} = \sqrt{3}V_p \underline{/-90^\circ} \tag{12.2}$$

$$\mathbf{V}_{ca} = \sqrt{3}V_p \underline{/-210^\circ} \tag{12.3}$$

基尔霍夫电压定律要求，这三个电压的和应为零，读者可以把这个作为练习加以证明。

如果任何一个线电压的有效值用 V_L 表示，则 Y 形三相源的连接的一个重要特征可以表述为：

$$V_l = \sqrt{3}V_p$$

注意到在正相序列中，$\mathbf{V}_{an}$ 超前 $\mathbf{V}_{bn}$ 120°，$\mathbf{V}_{bn}$ 超前 $\mathbf{V}_{cn}$ 120°；同样，$\mathbf{V}_{ab}$ 到 $\mathbf{V}_{bc}$，$\mathbf{V}_{bc}$ 到 $\mathbf{V}_{ca}$，也是相差 120°。如果把超前换成滞后，该命题就适用于负相序列。

现在，把平衡的 Y 形接法的三相负载连接到电源上，使用三个边线和一个中线，如图 12.14 所示。负载用 $\mathbf{Z}_p$ 表示，连在每个边线与中线之间。三个边线的电流可以很容易求得，因为这就像三个单相电路，它们具有共同的导线[①]：

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_p}$$

$$\mathbf{I}_{bB} = \frac{\mathbf{V}_{bn}}{\mathbf{Z}_p} = \frac{\mathbf{V}_{an} \underline{/-120^\circ}}{\mathbf{Z}_p} = \mathbf{I}_{aA} \underline{/-120^\circ}$$

$$\mathbf{I}_{cC} = \mathbf{I}_{aA} \underline{/-240^\circ}$$

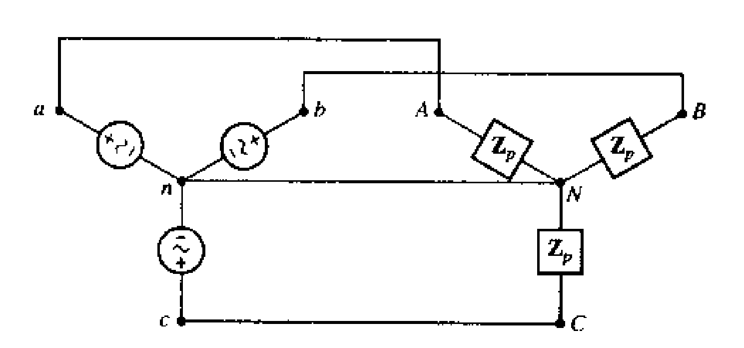


图 12.14　一个平衡的三相系统，使用 Y-Y 形接法，包含中线

所以：

$$\mathbf{I}_{Nn} = \mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB} + \mathbf{I}_{cC} = 0$$

这样，当源和负载都是平衡的，并且四根线都是零阻抗时，中线上没有电流通过。如果在每个边上都加一个阻抗 $\mathbf{Z}_L$，在中线上加一个阻抗 $\mathbf{Z}_n$，会有什么变化呢？边线上的阻抗可以和负载结合在一起；这些有效的负载仍是平衡的，中线就可以去掉。因此，如果 n 和 N 之间短路或断路时，系统都不会有什么变化，那么可以在中线上加上任意的阻抗，中线的电流始终保持为零。

由此，如果有平衡源、平衡负载以及平衡线阻抗，任意阻抗的中线都可以被其他任意阻抗所代替，包括断路或短路；替换不会影响系统的电压或电流。在两个中性点之间，不论是否有

① 应用叠加原理，每次考察一个相，就可以证实这一点。

中线的存在，把它想像成一条短路线是很有帮助的，这样问题就简化成三个单相的问题，它们除了相角不同外，其他都一样，可以说这是"按相"解决问题。

例题 12.2 对于图 12.15 所示的电路图，求通过整个电路的电流和电压，并计算负载消耗的总功率

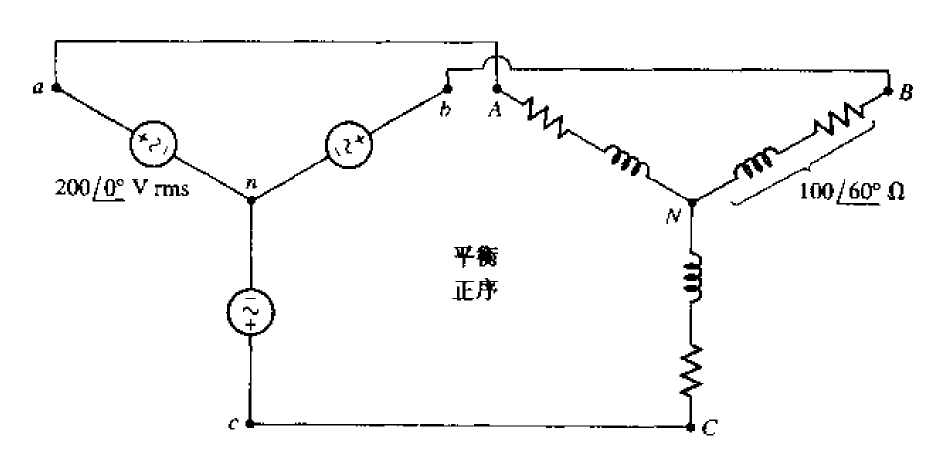


图 12.15 Y-Y 形接法的三相三线系统

既然其中一个电源的相电压已经给出，而且是正相序列，这三个相电压可以表示为：

$$\mathbf{V}_{an}=200\angle 0^\circ\ \text{V}\qquad \mathbf{V}_{bn}=200\angle -120^\circ\ \text{V}\qquad \mathbf{V}_{cn}=200\angle -240^\circ\ \text{V}$$

线电压为 $200\sqrt{3}=346$ V；每个线电压的相角可由相量图求出来，如图 12.13 所示（事实上，图 12.13 的相量图是一个比较适用的图），用计算器减去相电压，或者在式(12.3)引用式(12.1)。可以求得 $\mathbf{V}_{ab}=346\angle 30^\circ$ V，$\mathbf{V}_{bc}=346\angle -90^\circ$ V，$\mathbf{V}_{ca}=346\angle -210^\circ$ V。

现在来解相 A，它的线电流为：

$$\mathbf{I}_{aA}=\frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_p}=\frac{200\angle 0^\circ}{100\angle 60^\circ}=2\angle -60^\circ\ \text{A}$$

由于已知这是一个平衡的三相系统，根据 $\mathbf{I}_{aA}$ 很容易写出剩下的两个线电流：

$$\mathbf{I}_{bB}=2\angle(-60^\circ-120^\circ)=2\angle -180^\circ\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_{cC}=2\angle(-60^\circ-240^\circ)=2\angle -300^\circ\ \text{A}$$

相 A 消耗的功率为：

$$P_{AN}=200\times(2)\cos(0^\circ+60^\circ)=200\ \text{W}$$

因此，三相负载的总平均功率就是 600 W。

该电路的相量图如图 12.16 所示。一旦知道了任意一个线电压的大小和任意一个线电流的大小，则通过相量图，所有的三个电压和所有的三个电流的相角就很容易求出。

练习

12.4 一个平衡三相三线系统，有 Y 形接法的负载，每一个相都是三个负载的并联：$-j100\ \Omega$，$100\ \Omega$，和 $50+j50\ \Omega$。假设是正相序列，并有 $\mathbf{V}_{ab}=400\angle 0^\circ$。求：(a) $\mathbf{V}_{an}$；(b) $\mathbf{I}_{aA}$；(c)负载的总功率。

答案：$231\angle -30^\circ$ V；$4.62\angle -30^\circ$ A；3 200 W

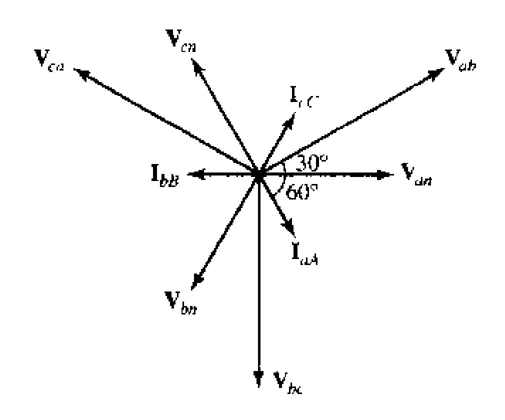


图 12.16　图 12.15 的电路图的相量图

在下一个例题之前,先分析一下 12.2 节的一个命题,即虽然相电压和相电流在某个时间瞬时为零(在美国,每 1/120 s 一次),但是总负载所消耗的瞬时功率从不为零。再一次考虑例题 12.2 的相 A,把相电压和相电流在时间域里写出来:

$$v_{AN} = 200\sqrt{2}\cos(120\pi t + 0°)\ \mathrm{V}$$

和

$$i_{AN} = 2\sqrt{2}\cos(120\pi t - 60°)\ \mathrm{A}$$

于是,相 A 的瞬时功率为:

$$\begin{aligned} p_A(t) = v_{AN}i_{AN} &= 800\cos(120\pi t)\cos(120\pi t - 60°) \\ &= 400\left[\cos(-60°) + \cos(240\pi t - 60°)\right] \\ &= 200 + 400\cos(240\pi t - 60°)\ \mathrm{W} \end{aligned}$$

同样的方法,可以得到:

$$p_B(t) = 200 + 400\cos(240\pi t - 300°)\ \mathrm{W}$$

和

$$p_C(t) = 200 + 400\cos(240\pi t - 180°)\ \mathrm{W}$$

所以总负载所消耗的瞬时功率为:

$$p(t) = p_A(t) + p_B(t) + p_C(t) = 600\ \mathrm{W}$$

它与时间无关,这与例题 12.2 所求出的平均功率相同。

例题 12.3　一个平衡的三相系统,线电压为 300 V,它给一个平衡的 1 200 W 的 Y 形接法的负载供电,其功率因数为 0.8(超前)。求线电流及每一相负载的阻抗

相电压是 $300/\sqrt{3}$ V,每一相的功率为 1 200/3 = 400 W。因此,线电流可以从功率的关系式求出:

$$400 = \frac{300}{\sqrt{3}}(I_L) \times (0.8)$$

得到线电流为 2.89 A。每相的阻抗由下式给出:

$$|\mathbf{Z}_p| = \frac{V_P}{I_L} = \frac{300/\sqrt{3}}{2.89} = 60\ \Omega$$

因为功率因数为超前的 0.8,阻抗的相角是 $-36.9°$,因此 $\mathbf{Z}_p = 60\underline{/-36.9°}\ \Omega$。

既然问题可以简化成较为简单的单相问题,所以可以方便地处理更为复杂的负载问题。

练习

12.5 一个平衡三相三线系统,线电压为 500 V。有两个平衡的 Y 形连接的负载。其中一个是容性负载,每相为 $7-j2\ \Omega$;另一个是感性负载,每一相为 $4+j2\ \Omega$。求:(a)相电压;(b)线电流;(c)负载消耗的总功率;(d)电源的功率因数。

答案:289 V; 97.5 A;83.0 kW; 0.983 (滞后)

例题 12.4 一个平衡的 600 W 照明负载并联在例题 12.3 的系统上。求线电流

首先画出适当的单相电路图,如图 12.17 所示。假设 600 W 负载是一个平衡负载,平均分布在三个相线上,则每一相消耗的功率为 200 W。

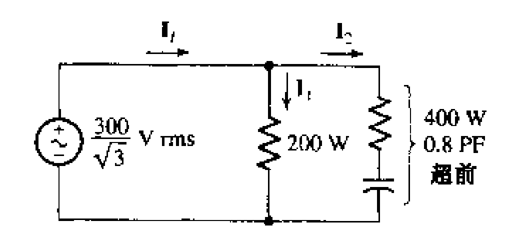


图 12.17 用来分析平衡三相系统每一相的电路

照明电流的幅度可以由下式求出:

$$200 = \frac{300}{\sqrt{3}} \mid \mathbf{I}_1 \mid \cos 0°$$

所以:

$$\mid \mathbf{I}_1 \mid = 1.155 \text{ A}$$

同理,因为加在容性负载两端的电压没有改变,所以流过它的电流幅度也没有变化:

$$\mid \mathbf{I}_2 \mid = 2.89 \text{ A}$$

如果假设所使用的相电压的相角为零,则:

$$\mathbf{I}_1 = 1.155 \underline{/0°} \text{ A} \qquad \mathbf{I}_2 = 2.89 \underline{/+36.9°} \text{ A}$$

线电流为:

$$\mathbf{I}_L = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 3.87 \underline{/+26.6°} \text{ A}$$

还可以得到电源的这一相所产生的功率为:

$$P_p = \frac{300}{\sqrt{3}} \times 3.87 \cos(+26.6°) = 600 \text{ W}$$

这与事实吻合,即各相为照明负载提供 200 W 功率,同时向原负载提供 400 W 功率。

练习

12.6 一个平衡三相四线系统,接有三个平衡 Y 形接法的负载。负载 1 消耗的功率为 6 kW,PF = 1;负载 2 需要 10 kVA,PF = 0.96(滞后);负载 3 需要 7 kW,PF = 0.85(滞后)。负载的相电压为 135 V,如果每边线的导线电阻为 0.1 Ω,中线的电阻为1 Ω,求:(a)负载的总功耗;(b)负载的总 PF;(c)四条线上的总功率损耗;(d)源的相电

压；(e)源的功率因数。

答案：22.6 kW；0.954(滞后)；1 027 W；140.6V；0.957(滞后)

如果非平衡 Y 形接法的负载接在原来平衡的三相系统上，有中线，且它的阻抗为零，则仍可用单相分析法来分析它。如果这两个条件中缺少任何一个，就必须使用其他的方法，如网孔或节点分析法。然而，长期与非平衡三相系统打交道的工程师发现，对称组件分析法是一个更为有效的方法，不过这里不介绍这种方法。

12.5　Δ 形接法

与 Y 形接法相对应，还有 Δ 形接法，见图 12.8 所示。这种接法很普遍，它不需要中线。

现在考虑一个平衡 Δ 形负载，每边上的阻抗是 $\mathbf{Z}_p$，参考图 12.18，假设知道了线电压：

$$V_L = |\mathbf{V}_{ab}| = |\mathbf{V}_{bc}| = |\mathbf{V}_{ca}|$$

或者知道了相电压：

$$V_p = |\mathbf{V}_{an}| = |\mathbf{V}_{bn}| = |\mathbf{V}_{cn}|$$

这里：

$$V_L = \sqrt{3}V_p \qquad 和 \qquad V_{ab} = \sqrt{3}V_p \underline{/30^\circ}$$

它们前面已经求出。

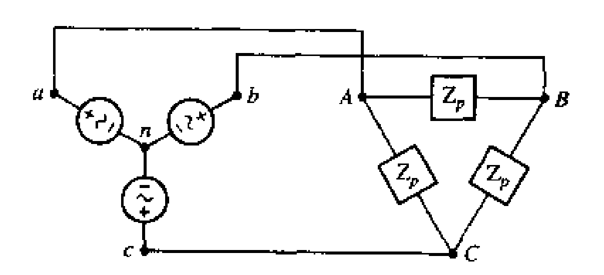


图 12.18　平衡的 Δ 形负载连在三相三线系统上，电源是 Y 形接法

因为已知 Δ 的每一支路的电压，很容易求出相电流：

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{ab}}{\mathbf{Z}_p} \qquad \mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{bc}}{\mathbf{Z}_p} \qquad \mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{ca}}{\mathbf{Z}_p}$$

它们的差就是线电流，例如：

$$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{CA}$$

因为处理的是平衡系统，因此相电流是等幅的：

$$\mathbf{I}_p = |\mathbf{I}_{AB}| = |\mathbf{I}_{BC}| = |\mathbf{I}_{CA}|$$

线电流也是等幅的，从图 12.19 的相量图明显看出它们的对称性。因此：

$$I_L = |\mathbf{I}_{aA}| = |\mathbf{I}_{bB}| = |\mathbf{I}_{cC}|$$

和

$$I_L = \sqrt{3}I_p$$

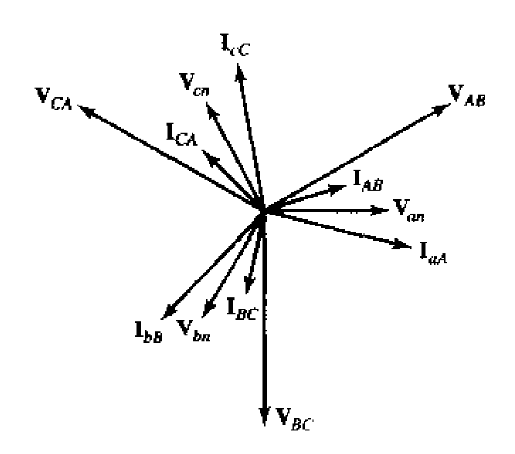


图 12.19　一个用于图 12.18 电路的相量图,假定 $\mathbf{Z}_p$ 为电感阻抗

现在暂时忽略电源,仅考虑平衡负载。如果负载是 Δ 形接法,则相电压和线电压是没有区别的,但是线电流却是相电流的$\sqrt{3}$倍;对于 Y 形负载,相电流和线电流是相同的,而线电压是相电压的$\sqrt{3}$倍。

例题 12.5　一个三相系统中,线电压是 300 V,向一个 Δ 形负载供电,0.8(滞后)。求线电流的幅度

同样,先来考虑单个相。它的功率为 400 W,PF = 0.8(滞后),线电压为 300 V。因此:

$$400 = 300(I_p) \times (0.8)$$

和

$$I_p = 1.667 \text{ A}$$

根据相电流和线电流的关系可知:

$$I_L = \sqrt{3} \times (1.667) = 2.89 \text{ A}$$

另外,负载的相角是 $\cos^{-1}(0.8) = 36.9°$,所以每相的阻抗就是:

$$\mathbf{Z}_p = \frac{300}{1.667}\underline{/36.9°} = 180\underline{/36.9°}\ \Omega$$

练习

12.7　平衡三相 Δ 形负载的每一相由一个 0.2 H 的电感,一个 5 μF 的电容和一个 200 Ω 的电阻组成,其中电容与电阻并联,然后再与电感串联。假设导线的电阻为零,并且相电压为 200 V,ω = 400 rad/s。求:(a)相电流;(b)线电流;(c)负载的总功率。

答案:1.158 A;2.01 A;693 W

例题 12.6　一个三相系统,线电压为 300 V,向一个 PF = 0.8(滞后)的 Y 形负载提供1 200 W的功率。求三相系统的线电流的幅度(这与例题 12.5 的电路一样,只不过负载是 Y 形负载)

对于某个单相,可以得到相电压为 $300/\sqrt{3}$ V,功率为 400 W,PF 为 0.8(滞后)。因此:

$$400 = \frac{300}{\sqrt{3}}(I_p) \times (0.8)$$

和

$$I_p = 2.89 \qquad \text{或} \qquad I_L = 2.89 \text{ A rms}$$

负载的相角仍为 36.9°，因此 Y 形负载每相的阻抗是：

$$\mathbf{Z}_p = \frac{300/\sqrt{3}}{2.89}\,\underline{/36.9^\circ} = 60\,\underline{/36.9^\circ}\ \Omega$$

因子$\sqrt{3}$不仅将各相的量与各线的量联系起来，而且还出现在平衡三相负载总功率的公式中。如果假设 Y 形负载的功率因数的相角为 θ，则各相的功率为：

$$P_p = V_p I_p \cos\theta = V_p I_L \cos\theta = \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \cos\theta$$

总功率为：

$$P = 3P_p = \sqrt{3}V_L I_L \cos\theta$$

同样的方法，Δ 形负载每一相的功率为：

$$P_p = V_p I_p \cos\theta = V_L I_p \cos\theta = V_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cos\theta$$

总功率为：

$$P = 3P_p$$
$$P = \sqrt{3}V_L I_L \cos\theta \tag{12.4}$$

借助于方程(12.4)，再根据线电压的大小、线电流的大小以及负载阻抗(或导纳)的相角就可以计算出平衡负载的功率，而不论负载是 Y 形还是 Δ 形。现在可以通过简单的两步解出例题 12.5 和例题 12.6 的线电流：

$$1\,200 = \sqrt{3} \times (300) \times (I_L) \times (0.8)$$

所以：

$$I_L = \frac{5}{\sqrt{3}} = 2.89\ \text{A}$$

练习

12.8　一个平衡的三相三线系统，端接两个并联的 Δ 形负载。负载 1 吸收的功率是 40 kVA，PF 为 0.8(滞后)；负载 2 为 24 kW，PF 为 0.9(超前)。假设没有线电阻，令 $\mathbf{V}_{ab} = 440\,\underline{/30^\circ}$ V。求：(a)负载的总功率；(b)滞后负载的相电流 $\mathbf{I}_{AB1}$；(c)$\mathbf{I}_{AB2}$；(d)$\mathbf{I}_{aA}$。

答案：56.0 kW；$30.3\,\underline{/-6.87^\circ}$ A；$20.2\,\underline{/55.8^\circ}$ A；$75.3\,\underline{/-12.46^\circ}$ A

12.5.1　Δ 形电源

电源也可以连接成 Δ 形。但这不是典型的，因为电源相位的轻微不同，就会导致 Δ 环内有大的电流循环。例如，假设三个单相电源是 $\mathbf{V}_{ab}$，$\mathbf{V}_{bc}$ 和 $\mathbf{V}_{cd}$。在把 d 和 a 连接以前，通过测量 $\mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{bc} + \mathbf{V}_{ca}$的总和来确定是否不平衡。假设结果的幅度是线电压的 1%。那么循环电流就约是线电压的 1/3% 除以源内阻。这个内阻会有多大呢？它取决希望电源在可忽略的端电压下降时提供的电流。如果假设最大的电流导致了端电压 1% 的下降，那么循环电流就是最大电流的 1/3！这就减少了有效电流的能力，并且也增加了系统的损耗。

还需要指出的是、平衡的三相源可以从 Y 形转换成 Δ 形、反之亦然，而又不会影响负载的电流或电压。线电压和相电压的关系如图 12.13 所示，这里的 $\mathbf{V}_{an}$ 参考相角为 0°。这种转换使得可以使用任何接法的电源，而负载关系都是正确的。当然，在知道电源如何连接以前，不会知道电源的任何电压或电流。平衡三相负载可以在 Y 形和 Δ 形之间转换，它们的关系是：

$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3}$$

这个公式值得记住。

实际应用

发电系统

有很多方法可以用来产生电能。例如，使用光电转换技术把太阳能直接转变成电能（太阳能电池），就可以产生直流电源。尽管光电转换技术是一项非常环保的技术，但是光电转换方法成本太高，并且需要转换器把直流变成交流。其他方法，例如风力涡轮、地热、水力发电、原子能以及燃油发电机，相比较而言，都是很经济的。在这些系统中，一个轴在原动力，如风力推进器、水力或蒸汽的涡轮片（见图 12.20）的推动下旋转。



图 12.20 加州 Altamont Pass 的风力发电机，包括了 7 000 个独立的风车

一旦原动力用于驱动轴旋转，有几种方式可以把机械能转变成电能。一种是同步发电机，如图 12.21 所示。这种机械包括两个主要的部分：一个是固定部分，称为定子；一个是转动部分，称为转子。线圈里流过直流的时候就会使得转子产生磁场。围绕定子的第二组线圈就会感应出一组三相电压。同步发电机名字的由来是因为交流电压产生的频率与机械转子的转动同步。

因为各种负载的增加和减少，对一个孤立发电机的实际电能需求是变化的，例如空调机的启动、电灯的开关等。理想情况下，发电机的输出电压与负载无关，但实际上并非如此。任意定子的相产生的电压 $\mathbf{E}_A$（起源于内部产生的电压）的大小为：

$$\mathbf{E}_A = K\phi\omega$$

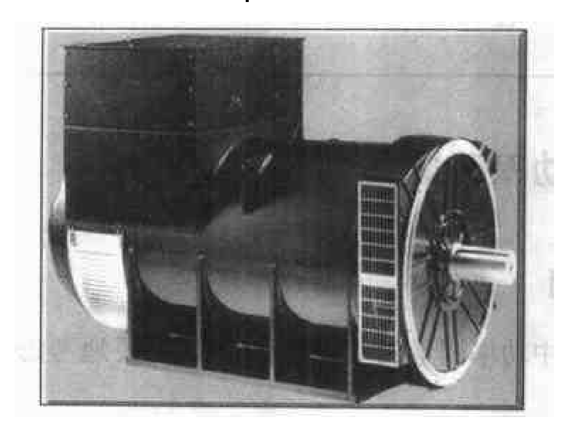


图12.21 同步发电机的一个例子

这里的 K 是一个常数，由机器构造决定；ϕ 是围绕在定子上的磁场所产生的磁通量(因此与负载无关)；ω 是转速，它依赖于原动力而与负载无关。因此，改变负载不会影响 $\mathbf{E}_A$ 的大小。内部产生的电压与相电压 $\mathbf{V}_\phi$ 和相电流 $\mathbf{I}_A$ 的关系为：

$$\mathbf{E}_A = \mathbf{V}_\phi + jX_S\mathbf{I}_A$$

这里的 X_S 是发电机的同步电抗。如果负载增加，就会需要发电机输出更大的电流 $\mathbf{I}'_A$。如果功率因数不变(即 $\mathbf{V}_\phi$ 和 $\mathbf{I}_A$ 间的角度不变)，由于 $\mathbf{E}_A$ 不变，那么 $\mathbf{V}_\phi$ 就会减少。

例如，考虑图12.22(a)的相量图，它描述了一个发电机的单相电压-电流关系，其负载功率因数为滞后的 $\cos\theta$。内部生成的电压 $\mathbf{E}_A$ 也表示了出来。如果不改变功率因数，再加上一个负载，如图12.22(b)所示，则电流 $\mathbf{I}_A$ 增加到 $\mathbf{I}'_A$。但是由相量 $jX_S\mathbf{I}_A$ 和 $\mathbf{V}'_\phi$ 之和产生的内部电压必须保持不变。因此 $\mathbf{E}'_A = \mathbf{E}_A$，发电机的输出电压($\mathbf{V}'_\phi$)稍微有所减少，如图12.22(b)所示。

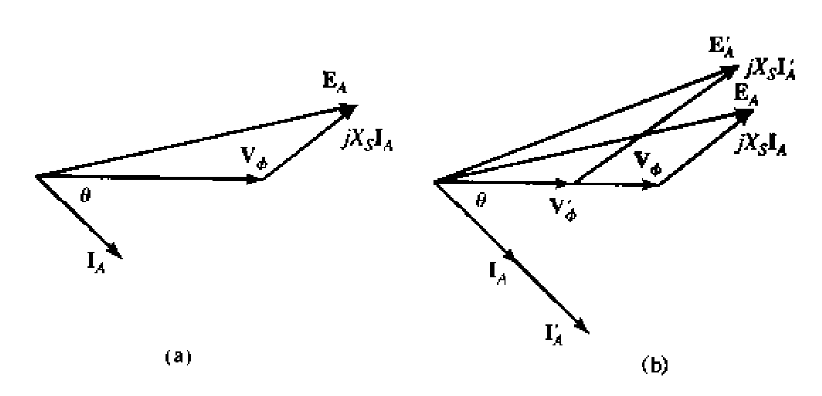


图12.22 负载对独立的同步发电机影响的相量图：(a)发电机接在滞后功率因数为 $\cos\theta$ 的负载上；(b)增加负载但不改变功率因数。内部产生的电压大小保持不变，而输出电流增加，因此输出电压减少

发电机的电压调整率定义为：

$$\text{调整率}(\%) = \frac{V_{\text{no load}} - V_{\text{full load}}}{V_{\text{full load}}} \times 100$$

理想情况下，该值应尽可能的接近零，但是只有在改变控制磁通量 ϕ 的直流电流以补偿负载的条件下才能达到这个要求，这显然是很麻烦的。因此，当设计发电设备时，几个小的发电机并联比一个大的发电机能容纳更大的负载。每一个发电机都可以全负载或接近全负载的工

作，因此电压的输出基本上就是连续的；根据需求，单个的发电机可以在整个系统中加入或取消。

12.6 三相系统的功率测量

12.6.1 瓦特计的使用

在着手讨论三相系统中功率测量的专门技术以前，简要地考虑一下瓦特计如何在单相电路中使用，是很有帮助的。

功率的测量通常是在频率低于几百赫兹的时候，使用有两个分离线圈的瓦特计来进行。其中一个线圈是用粗线绕成，电阻非常低，称为电流线圈；第二个线圈由很多圈细线绕成，有相对较高的电阻，称为电压线圈。当然也可以在内部或外部与电压线圈串联别的电阻。转矩加在转动系统上，指针与流过两个线圈的瞬时电流的乘积成正比。但是，由于转动系统的机械惯性，使得所产生的偏转与转矩的平均值成正比。

功率计连接在网络里的方法是，使流过电流线圈的电流就是流过网络的电流，电压线圈的电压就是网络的两个端点的电压。这样，电压线圈里的电流就是输入的电压除以电压线圈电阻得到的。

很明显，瓦特计有四个可使用的端子，为了在表上读出比较准确的数值，必须使这些端子正确连接。更详细地说，假设要测量一个无源网络吸收的功率，电流线圈串联在与负载相连的两根导线之一上，电压线圈接在两根导线之间，通常在电流线圈的靠负载一边。电压线圈的终端通常有箭头指示，如图 12.23(a)所示。每个线圈有两个终端，要仔细观察电压和电流的正确关系。每个线圈的终端一头标为正(+)，如果正电流流过电流线圈的正(+)端，而电压线圈的正端与没有符号的端相连，就可以得到正确的读数。图 12.23(a)所示的网络里，当网络右边吸收功率时，瓦特计就会给出偏向高刻度端的偏量。任何一个线圈反接(不是两个同时)，都会使表针向低刻度端偏转；两个线圈都反接，不会影响读数。

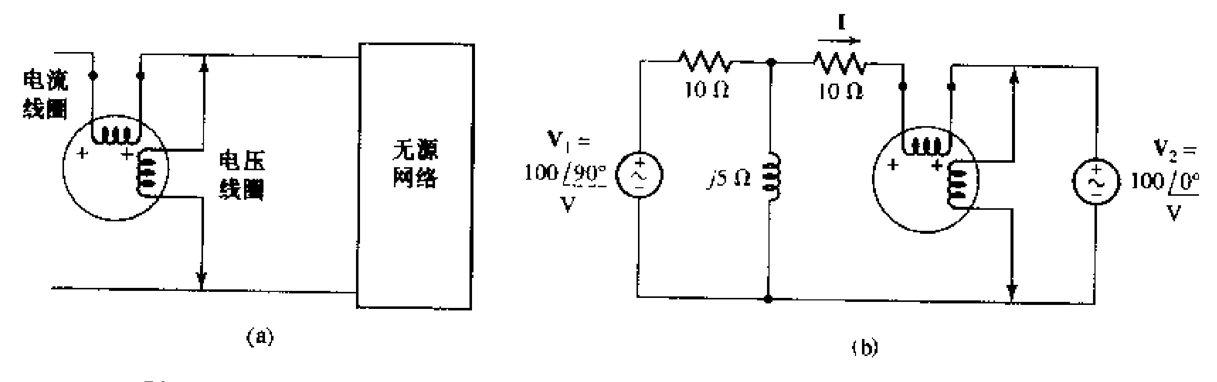


图 12.23 (a)一种瓦特计的连接方法，可以保证在测量无源网络吸收的功率时，是偏向高刻度的读数；(b)用瓦特计来正向指示右边电源吸收功率的例子

作为瓦特计测量平均功率的一个例子，考虑图 12.23(b)所示的电路。瓦特计的接法使得高刻度偏向的读数对应瓦特计右边的网络，即右边电源的吸收功率。右边电源吸收的功率为：

$$P = |\mathbf{V}_2||\mathbf{I}|\cos(\text{ang }\mathbf{V}_2 - \text{ang }\mathbf{I})$$

利用网孔分析或叠加原理，可以求出电流：

$$\mathbf{I} = 11.18\,\underline{/153.4^\circ}\ \text{A}$$

因此，吸收的功率为：

$$P = (100)\times(11.18)\cos(0^\circ - 153.4^\circ) = -1\,000\ \text{W}$$

因此，指针就停在负刻度处。实际上，电压线圈的反接比电流线圈快得多，这种反接可以提供一个 1 000 W 的正向读数。

练习

12.9　确定图 12.24 的瓦特计的读数，要获得瓦特计的正向读数，说明电压线圈是否需要反接，并确定消耗或产生该功率的设备。瓦特计的正(+)端应该接在(a)x；(b)y；(c)z。

答案：1 200 W，$P_{6\Omega}$(吸收)；2 200 W，$P_{4\Omega}+P_{6\Omega}$(吸收)；500 W(反接，由 100 V 电源吸收)

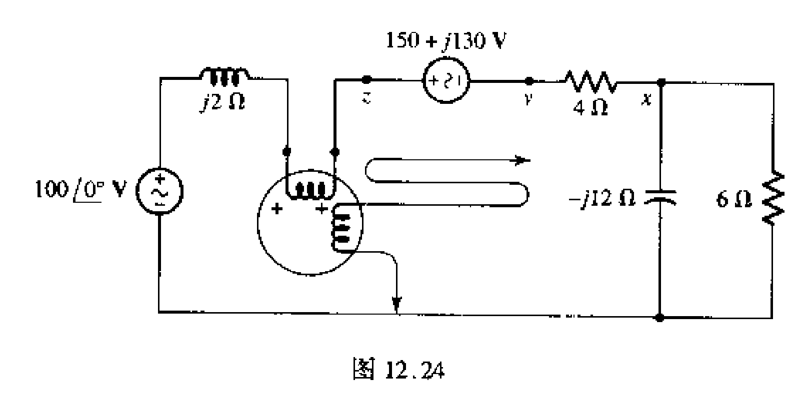


图 12.24

12.6.2　三相系统中的瓦特计

初看之下，三相负载吸收功率的测量好像是很容易的问题。只需在每一相上接一个瓦特计，最后把它们的结果相加。例如，图 12.25(a)所示的 Y 形负载的接法。每一个瓦特计的电流线圈串入一相的负载，电压线圈并接在中线和边线上。同样，瓦特计也可以如图12.25(b)所示的接法来测量 Δ 形负载。这种方法在理论上是正确的，但在实际中是不可行的，因为 Y 形的中线和 Δ 形的相并不总是给出的。例如，一个三相旋转电机只有三个可用的终端，称之为 A，B，C。

显然，需要一种方法来测量只有三个终端的三相负载所吸收的总功率，测量可以在这些终端的"线"的一侧，而不是"负载"侧。这样的方法是很有用的，可以测量不平衡负载从不平衡的电源吸收的功率。把瓦特计连接起来，每个电流线圈串在一条边上，电压线圈接在该边和某一公共点 x 上，如图 12.26 所示。虽然是用 Y 形负载做的图解，其实这对于 Δ 形负载同样适用。点 x 可以是三相系统中一些没有指定的点，或者可以仅仅是空间中的一点，在这里三个电压线圈有一个公共的交点。

瓦特计 A 所指示的平均功率为：

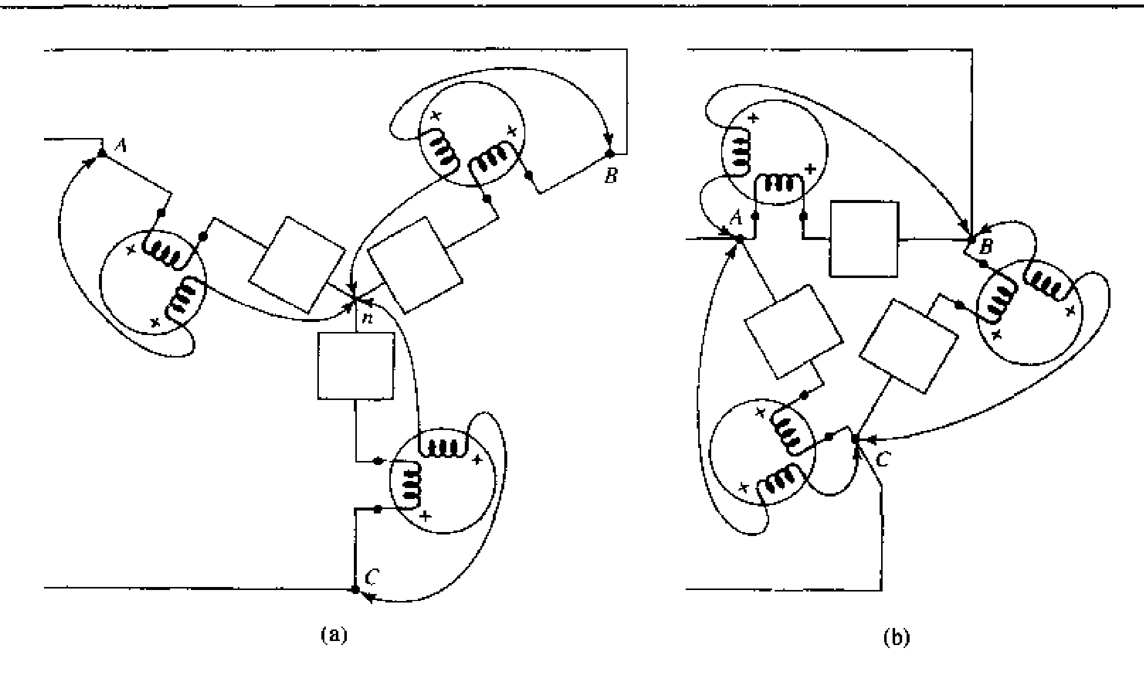


图 12.25 三个瓦特计,每个测量三相负载的单相吸收功率,它们的总和就是总功率。(a)Y形负载,电(b)Δ形负载,电源和负载不必是平衡的

$$P_A = \frac{1}{T}\int_0^T v_{Ax} i_{aA} dt$$

这里的 T 是电源电压的周期。其余两个瓦特计的读数可以用相同的表达式给出,所以,负载吸收的总平均功率为:

$$P = P_A + P_B + P_C = \frac{1}{T}\int_0^T (v_{Ax} i_{aA} + v_{Bx} i_{bB} + v_{Cx} i_{cC}) dt$$

上式中三个电压的每一个都可以用相电压以及点 x 和中线之间的电压表示出来:

$$v_{Ax} = v_{AN} + v_{Nx}$$

$$v_{Bx} = v_{BN} + v_{Nx}$$

$$v_{Cx} = v_{CN} + v_{Nx}$$

所以:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T (v_{AN} i_{aA} + v_{BN} i_{bB} + v_{CN} i_{cC}) dt + \frac{1}{T}\int_0^T v_{Nx}(i_{aA} + i_{bB} + i_{cC}) dt$$

然而,整个三相负载可以看做一个大的节点,根据基尔霍夫电流定律,要求:

$$i_{aA} + i_{bB} + i_{cC} = 0$$

因此:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T (v_{AN} i_{aA} + v_{BN} i_{bB} + v_{CN} i_{cC}) dt$$

参照电路图可知,这个和数确实是负载的每个相所吸收的功率之和,因此三个瓦特计的读数就代表了整个负载的总功率。

把这个过程用数值例子来解释一下,将发现这三个瓦特计中的一个其实是多余的。假设有一个平衡电源:

$$\mathbf{V}_{ab} = 100\underline{/0^\circ}\ \text{V}$$

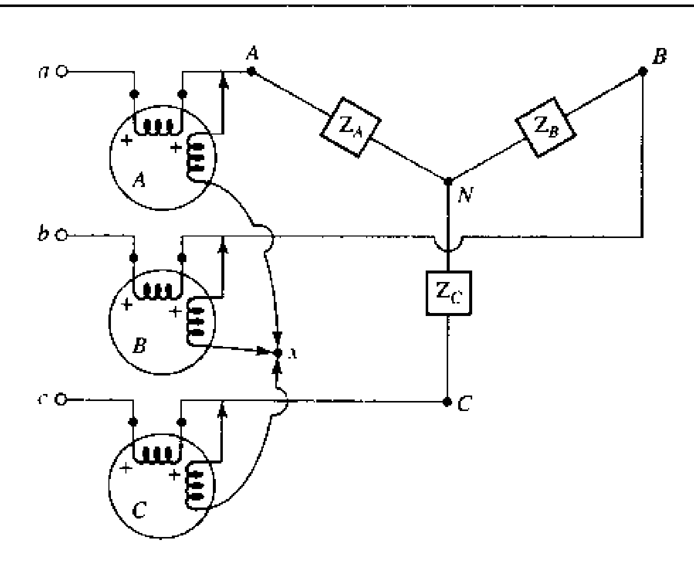


图 12.26　测量三相负载总功率的一种瓦特计接法。仅仅提供了三个负载的终端

$$\mathbf{V}_{bc} = 100\underline{/-120^\circ}\ \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{ca} = 100\underline{/-240^\circ}\ \text{V}$$

或

$$\mathbf{V}_{an} = \frac{100}{\sqrt{3}}\underline{/-30^\circ}\ \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{bn} = \frac{100}{\sqrt{3}}\underline{/-150^\circ}\ \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{cn} = \frac{100}{\sqrt{3}}\underline{/-270^\circ}\ \text{V}$$

和一个非平衡的负载：

$$\mathbf{Z}_A = -j10\ \Omega$$
$$\mathbf{Z}_B = j10\ \Omega$$
$$\mathbf{Z}_C = 10\ \Omega$$

假设瓦特计为理想的，连接方法如图 12.26 所示，点 x 在源 n 的中线上。用网孔分析法可以求出三个线电流：

$$\mathbf{I}_{aA} = 19.32\underline{/15^\circ}\ \text{A}$$
$$\mathbf{I}_{bB} = 19.32\underline{/165^\circ}\ \text{A}$$
$$\mathbf{I}_{cC} = 10\underline{/-90^\circ}\ \text{A}$$

两个中线的电压为：

$$\mathbf{V}_{nN} = \mathbf{V}_{nb} + \mathbf{V}_{BN} = \mathbf{V}_{nb} + \mathbf{I}_{bB}(j10) = 157.7\underline{/-90^\circ}$$

每个瓦特计所指示的平均功率可以算出来为：

$$P_A = V_p I_{aA}\cos(\text{ang}\ \mathbf{V}_{an} - \text{ang}\ \mathbf{I}_{aA})$$
$$= \frac{100}{\sqrt{3}} \times 19.32\cos(-30^\circ - 15^\circ) = 788.7\ \text{W}$$

$$P_B = \frac{100}{\sqrt{3}} \times 19.32 \cos(-150° - 165°) = 788.7 \text{ W}$$

$$P_C = \frac{100}{\sqrt{3}} \times 10 \cos(-270° + 90°) = -577.4 \text{ W}$$

即总功率为 1 kW。既然电阻负载中流过了 10 A 的有效电流，负载所消耗的总功率就是：

$$P = 10^2 \times (10) = 1 \text{ kW}$$

两个方法得出的结果是吻合的。

注意到其中一个瓦特计的读数是负的。前面的关于瓦特计的基本使用中已指出，只有在电流线圈或电压线圈反接时，表头上才能得到有效的读数。

12.6.3 双瓦特计的方法

已经证明了三个电压线圈的公共交点 x 可以取在任意的地方而又不影响三个瓦特计读数的代数和。下面考虑一下把点 x 直接取在一个边上会有什么影响。例如，如果每个电压线圈的一端都接在 B 点，那么瓦特计 B 的电压线圈里就不会有压降，该指针就会指零，因此它就可以移去，其余两个剩下的瓦特计读数的代数和仍然是负载所吸收的总功率。当这样取点 x 时，则称这种测量功率的方法为双瓦特计法。读数的总和表示了总功率，以下的情况均适合：(1)负载不平衡；(2)源不平衡；(3)瓦特计不同；(4)周期性源的波形不同。所做的惟一的假设就是瓦特计的误差很小，以至于可以忽略。例如，在图 12.26 中，每一个瓦特计的电流线圈通过的是负载吸收的线电流加上电压线圈上流过的电流。由于后者的电流非常小，由电压线圈的电阻和它两端的电压可以估计出它的影响。根据这两个量的大小可以对电压线圈的功率损耗做精确地估计。

在上面数值例子的描述里，假设使用两个瓦特计、一个的电流线圈在线 A，而它的电压线圈在线 A 和线 B 之间，另一个的电流线圈在线 C、电压线圈在线 C 和线 B 之间。那么第一个瓦特计的读数为：

$$\begin{aligned} P_1 &= V_{AB} I_{aA} \cos(\text{ang } \mathbf{V}_{AB} - \text{ang } \mathbf{I}_{aA}) \\ &= 100 \times (19.32) \cos(0° - 15°) \\ &= 1\,866 \text{ W} \end{aligned}$$

第二个读数为：

$$\begin{aligned} P_2 &= V_{CB} I_{cC} \cos(\text{ang}\mathbf{V}_{CB} - \text{ang}\mathbf{I}_{cC}) \\ &= 100 \times (10) \cos(60° + 90°) \\ &= -866 \text{ W} \end{aligned}$$

所以：

$$P = P_1 + P_2 = 1\,866 - 866 = 1\,000 \text{ W}$$

该结果与前面给出的结果一样。

在平衡负载的情况下，双瓦特计法既可以求出 PF 角，也可以求出负载的总功率。假设一个负载阻抗具有相角 θ；可以是一个 Y 形或 Δ 形的接法，在这里假设是 Δ 形接法的负载，如图 12.27 所示。

如图 12.19 所示的标准的相量图，可以求出线电压和线电流之间的相角。得到读数为：

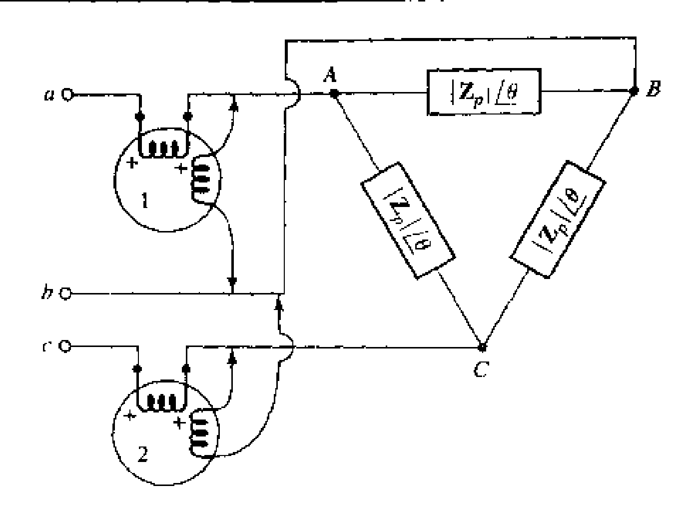


图12.27　用两个瓦特计来读取平衡三相负载吸收的总功率

$$P_1 = |\mathbf{V}_{AB}||\mathbf{I}_{aA}|\cos(\text{ang }\mathbf{V}_{AB} - \text{ang }\mathbf{I}_{aA}) = V_L I_L \cos(30° + \theta)$$

和

$$P_2 = |\mathbf{V}_{CB}||\mathbf{I}_{cC}|\cos(\text{ang }\mathbf{V}_{CB} - \text{ang }\mathbf{I}_{cC}) = V_L I_L \cos(30° - \theta)$$

两个瓦特计读数的比值为：

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\cos(30° + \theta)}{\cos(30° - \theta)} \tag{12.5}$$

如果把余弦函数展开，这个等式就可以用简单的 tan θ 来表示：

$$\tan\theta = \sqrt{3}\,\frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1} \tag{12.6}$$

这样，相等的瓦特计读数说明负载的 PF 为1，数值相等而符号相反的读数则说明是纯电抗性负载；P_2 的读数比 P_1 大，说明是感性负载；P_2 的读数比 P_1 小，说明是容性负载。怎样知道哪一个瓦特计的读数是 P_1，哪一个是 P_2 呢？事实上，P_1 在线 A 上，P_2 在线 C 上，正相序列系统使得 V_{an} 滞后于 V_{cn}。这就足可以区分两个瓦特计了，但在实际应用中却不是这么容易。即使不能区分出它们两个来，但已经知道了相角的大小，只是不知它们的符号。这个信息已经足够了；如果负载是一个感应式电动机，相角必定是正的，不需要做任何测试来确定哪个读数是哪一个。如果没有前面关于负载的假设，有几种方法来解决这个模糊的信息。最简单的方法是，包括并联一个高阻抗的电抗性负载（一个三相电容在未知负载上）。负载就会变得更显容性。这样，如果 tan θ 的大小（或 θ 的大小）减少，那么负载就是感性负载，如果 tan θ 的大小增加，说明原先的负载是容性的。

例题 12.7　图12.28所示的平衡负载，由一个平衡的三相系统供电，有效电压 $\mathbf{V}_{ab} = 230\,\underline{/0°}$ V 且是正相序列。求每个瓦特计的读数和负载吸收的总功率

瓦特计1的电压线圈用来测电压 $\mathbf{V}_{ac}$，它的电流线圈用来测量相电流 $\mathbf{I}_{aA}$。已知是正相序列，所以线电压为：

$$\mathbf{V}_{ab} = 230\underline{/0^\circ}\ \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{bc} = 230\underline{/-120^\circ}\ \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{ca} = 230\underline{/120^\circ}\ \text{V}$$

注意，$\mathbf{V}_{ac} = -\mathbf{V}_{ca} = 230\underline{/-60^\circ}\ \text{V}$。

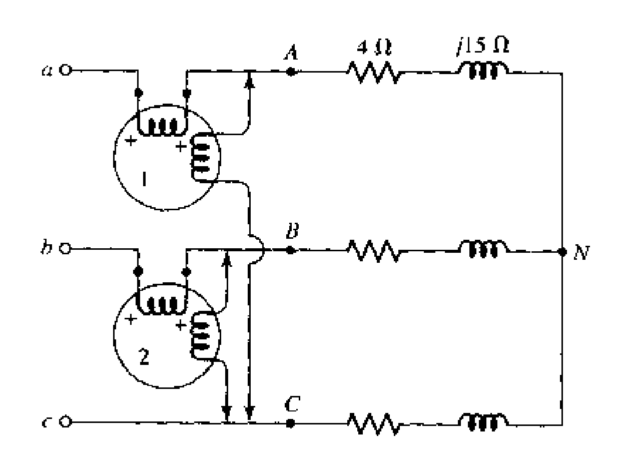


图 12.28　平衡三相系统连接在平衡三相负载上，负载的功率使用双瓦特计方法测量

相电流 $\mathbf{I}_{aA}$ 可以由相电压 $\mathbf{V}_{an}$ 除以相阻抗 $4+j15\ \Omega$ 给出：

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_{an}}{4+j15} = \frac{(230/\sqrt{3})\underline{/-30^\circ}}{4+j15}\ \text{A}$$
$$= 8.554\underline{/-105.1^\circ}\ \text{A}$$

现在计算瓦特计 1 所测量的功率：

$$P_1 = |\mathbf{V}_{ac}||\mathbf{I}_{aA}|\cos(\text{ang}\ \mathbf{V}_{ac} - \text{ang}\ \mathbf{I}_{aA})$$
$$= (230)\times(8.554)\cos(-60^\circ + 105.1^\circ)\ \text{W}$$
$$= 1\ 389\ \text{W}$$

用同样的方法，可以求出：

$$P_2 = |\mathbf{V}_{bc}||\mathbf{I}_{bB}|\cos(\text{ang}\ \mathbf{V}_{bc} - \text{ang}\ \mathbf{I}_{bB})$$
$$= (230)\times(8.554)\cos(-120^\circ - 134.9^\circ)\ \text{W}$$
$$= -512.5\ \text{W}$$

因此，负载吸收的总功率为：

$$P = P_1 + P_2 = 876.5\ \text{W}$$

练习

12.10　在如图 12.26 所示电路中，设负载 $Z_A = 25\underline{/60^\circ}\ \Omega$，$Z_B = 50\underline{/-60^\circ}\ \Omega$，$Z_C = 50\underline{/60^\circ}\ \Omega$，$\mathbf{V}_{AB} = 600\underline{/0^\circ}$ V rms 且为正相序列，点 x 设在 C 处，求：(a) P_A；(b) P_B；(c) P_C。

答案：0; 7 200 W; 0

12.7　小结与复习

- 大部分的发电厂都是以三相电的形式提供电能。
- 北美的大多数居民用电是以单相交流电的形式，频率为 60 Hz，电压的有效值为 115 V。
- 三相电源可以是 Y 形或 Δ 形连接。两种类型都有三个终端，每个终端是一个相，Y 形接法的源可以有一个中线。
- 在一个平衡的三相系统中，每个相电压数值相等，但是相角与其他两个都相差 120°。
- 三相系统中的负载既可以是 Y 形连接也可以是 Δ 形连接。
- 在一个平衡的 Y 形连接的正相序列（abc）的电源中，线电压为：

$$\mathbf{V}_{ab}=\sqrt{3}V_p\angle 30^\circ \qquad \mathbf{V}_{bc}=\sqrt{3}V_p\angle 90^\circ$$

$$\mathbf{V}_{ca}=\sqrt{3}V_p\angle -210^\circ$$

相电压为：

$$\mathbf{V}_{an}=V_p\angle 0^\circ \qquad \mathbf{V}_{bn}=V_p\angle -120^\circ \qquad \mathbf{V}_{cn}=V_p\angle -240^\circ$$

- 在带有 Y 形负载的系统里，线电流与相电流相等。
- 在 Δ 形接法的电源中，线电压与相电压相等。
- 具有正相序列和平衡 Δ 形负载的平衡系统中，线电流为：

$$\mathbf{I}_a=\mathbf{I}_{AB}\sqrt{3}\angle -30^\circ \qquad \mathbf{I}_b=\mathbf{I}_{BC}\sqrt{3}\angle -150^\circ \qquad \mathbf{I}_c=\mathbf{I}_{CA}\sqrt{3}\angle +90^\circ$$

相电流是：

$$\mathbf{I}_{AB}=\frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_\Delta}=\frac{\mathbf{V}_{ab}}{\mathbf{Z}_\Delta} \qquad \mathbf{I}_{BC}=\frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_\Delta}=\frac{\mathbf{V}_{bc}}{\mathbf{Z}_\Delta} \qquad \mathbf{I}_{CA}=\frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_\Delta}=\frac{\mathbf{V}_{ca}}{\mathbf{Z}_\Delta}$$

- 大多数功率计算都是建立在单相的基础上，假定系统为平衡的；此外，节点和网孔分析法也是有效的方法。

习题

1. 用伏特计测量一个电路，其结果是 $V_{be}=0.7$ V，$V_{ce}=10$ V。求：V_{bc}，V_{eb}，V_{cb}。
2. 用 SPICE 工具模拟一个共源场效应管放大器。(a)如果 $V_{gs}=-1$ V 且 $V_{ds}=5$ V，求 V_{gd}；(b)如果 $V_{ds}=4$ V 且 $V_{gd}=2.5$ V，求 V_{sg}。
3. 一个六相的电源系统给一个大电流的直流磁铁供电。写出下列情况的相电压：(a)正相序列；(b)负相序列。
4. 如果 $\mathbf{V}_{xy}=110\angle 20^\circ$ V，$\mathbf{V}_{zx}=160\angle -50^\circ$ V，$\mathbf{V}_{ay}=80\angle 130^\circ$ V，求：(a) V_{yz}；(b) V_{az}；(c) V_{zx}/V_{xy}。
5. 在一个特殊的电路里，已知 $\mathbf{V}_{12}=100\angle 0^\circ$，$\mathbf{V}_{45}=60\angle 75^\circ$，$\mathbf{V}_{42}=80\angle 120^\circ$，$\mathbf{V}_{35}=-j120$，单位都是 V。求：(a)$\mathbf{V}_{25}$；(b)$\mathbf{V}_{13}$。
6. 有效值为 230/460 V，频率为 60 Hz 的三相系统如图 12.29 所示，给三个负载供电：负载 AN 吸收的功率是 $10\angle 40^\circ$ kVA，负载 NB 吸收的功率是 $8\angle 10^\circ$ kVA，负载 AB 吸收的功率是 $4\angle -80^\circ$ kVA。求两个线电流和中线电流。

7. 一个平衡三线单相系统,负载是 $\mathbf{Z}_{AN}=\mathbf{Z}_{NB}=10\ \Omega$, $\mathbf{Z}_{AB}=16+j12\ \Omega$。三线电阻可以忽略不计,令 $\mathbf{V}_{an}=\mathbf{V}_{nb}=120\angle 0^\circ$ V。(a)求 I_{aA} 和 I_{nN};(b)在 $\mathbf{Z}_{AN}$ 上并联一个 $10\ \Omega$ 电阻,则系统就不平衡了。求:I_{aA}, I_{nN} 和 I_{bB}。
8. 一个低效率的三线单相系统,源电压是 $\mathbf{V}_{an}=\mathbf{V}_{nb}=720\angle 0^\circ$ V。线电阻是 $R_{aA}=R_{bB}=1\ \Omega$, $R_{nN}=10\ \Omega$,负载 $\mathbf{Z}_{AN}=10+j3\ \Omega$, $\mathbf{Z}_{NB}=8+j2\ \Omega$, $\mathbf{Z}_{AB}=18+j0\ \Omega$。求:(a)$\mathbf{I}_{aA}$;(b)$\mathbf{I}_{nN}$;(c)$P_{\text{wiring,total}}$;(d)$P_{\text{gen,total}}$。
9. 如图 12.30 所示的平衡三线单相系统里,令 $V_{AN}=220$ V,频率 60 Hz。(a)电容 C 为多大时,可以使负载的功率因数为 1;(b)C 要处理多少 kVA 的功率?

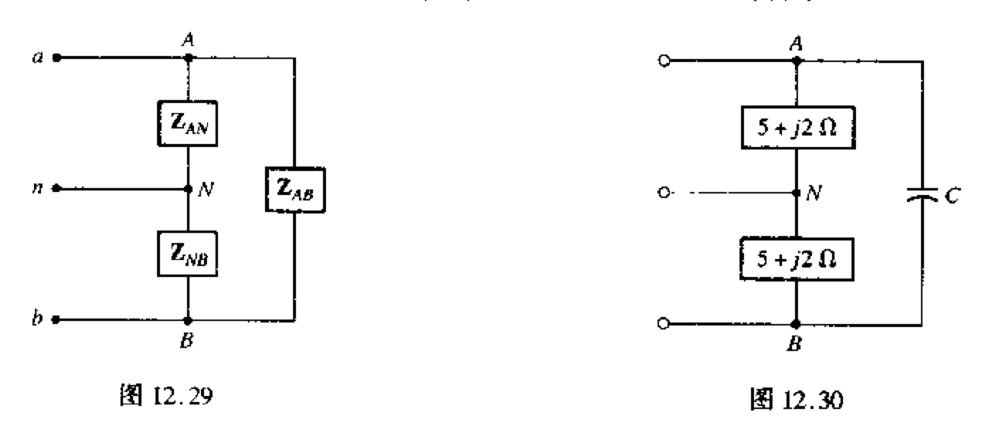


图 12.29 图 12.30

10. 如图 12.29 所示的平衡三线单相系统中,源电压 $\mathbf{V}_{an}=\mathbf{V}_{nb}=200\angle 0^\circ$ V。线与中线的电阻为零,负载 $\mathbf{Z}_{AN}=\mathbf{Z}_{NB}=12+j3\ \Omega$。求:$\mathbf{Z}_{AB}$ 使得(a)$X_{AB}=0$ 且 $I_{aA}=30$ A rms;(b)$R_{AB}=0$ 和相角 $\mathbf{I}_{aA}=0^\circ$。
11. 图 12.31 给出了一个正相序列的平衡三相三线系统,$\mathbf{V}_{BC}=120\angle 60^\circ$ V, $R_w=0.6\ \Omega$。如果总负载(包括导线电阻)吸收 5 kVA 的功率,设 PF = 0.8(滞后)。求:(a)线电阻所消耗的总功率;(b)$\mathbf{V}_{an}$。

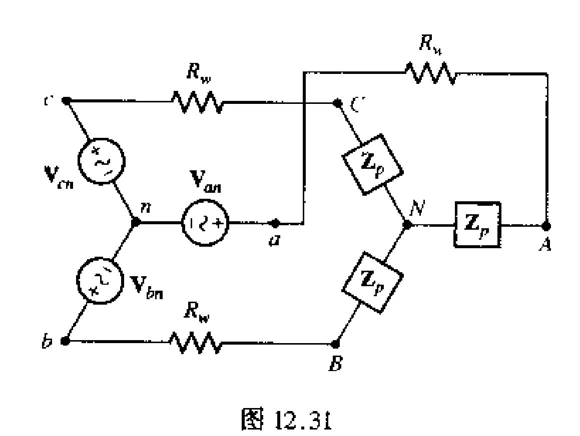


图 12.31

12. 设图 12.31 所示的平衡系统中,$\mathbf{V}_{an}=2\,300\angle 0^\circ$, $R_w=2\ \Omega$。假设为正相序列,提供的复总功率为 $\mathbf{S}=100+j30$ kVA。求:(a)$\mathbf{I}_{aA}$;(b)$\mathbf{V}_{AN}$;(c)$\mathbf{Z}_p$;(d)传输效率。
13. 如图 12.31 所示的平衡三相系统,令 $\mathbf{Z}_p=12+j5\Omega$, $\mathbf{I}_{bB}=20\angle 0^\circ$ A,为正相序列。如果电源的功率因数为 0.935,求:(a)R_w;(b)$\mathbf{V}_{bn}$;(c)$\mathbf{V}_{AB}$;(d)电源所提供的复功率。

14. 三相三线系统有一个平衡的Y形负载，负载为一个75 Ω的电阻、一个125 mH的电感和一个55 μF的电容分别串连在一个边与中点之间。假设正相序列 $V_p = 125$ V，频率60 Hz，求线电流、负载的总功率和负载的功率因数。

15. 一个无损耗的中线导体接在图12.31所示的三相系统的 n 和 N 之间，假设是平衡的正相序列系统，但负载是不平衡的：$\mathbf{Z}_{AN} = 8 + j6\ \Omega$，$\mathbf{Z}_{BN} = 12 - j16\ \Omega$，$\mathbf{Z}_{CN} = 5\ \Omega$。如果 $\mathbf{V}_{an} = 120\,\underline{/0^\circ}$ V，$R_w = 0.5\ \Omega$。求 $\mathbf{I}_{nN}$。

16. 如图12.31所示的平衡电路，$\mathbf{V}_{an} = 40\,\underline{/0^\circ}$ V（正相序列）。若相阻抗 $\mathbf{Z}_p = 5 + j10\ \Omega$ 求在下列情况下的线电流和负载的总功率：(a) $R_w = 0\ \Omega$；(b) $R_w = 3\ \Omega$。

17. 如图12.31所示的系统的相阻抗 $\mathbf{Z}_p$ 为一个 $75\,\underline{/25^\circ}\ \Omega$ 的阻抗和一个25 μF的电容的并联。令 $\mathbf{V}_{an} = 240\,\underline{/0^\circ}$ V，频率60 Hz，$R_w = 2\ \Omega$。求：(a) $\mathbf{I}_{aA}$；(b) P_{wires}；(c) P_{load}；(d)电源的功率因数。

18. 图12.31所示的电路的每一个负载包含一个 $100\,\underline{/28^\circ}\ \Omega$ 的感抗和一个500 μF的电容的并联，电阻 $R_w = 1\ \Omega$。使用正相序列 $\mathbf{V}_{ab} = 240\,\underline{/0^\circ}$ V，频率 $f = 50$ Hz，求出线电流的有效值、负载的总功率以及导线上损失的功率。用适当的PSpice仿真验证你的答案。

19. 图12.31所示的平衡三相系统，每个相的 $R_w = 0$，$\mathbf{Z}_p = 10 + j5\ \Omega$。(a)该电源的功率因数是多少？(b)假设 $f = 60$ Hz，要使PF达到0.93并滞后，要选择多大的电容与每一相的阻抗并联？(c)如果负载的相电压是440 V，每一个电容的功率是多少？

20. 图12.31所示的电路的每一个负载是由一个1.5 H的电感与100 μF的电容和1 kΩ的电阻并联而成，$R_w = 0\ \Omega$。正相序列，$\mathbf{V}_{ab} = 115\,\underline{/0^\circ}$ V，$f = 60$ Hz。求线电流的有效值以及负载的总功率。使用适当的PSpice仿真验证你的答案。

21. 图12.32给出一个平衡的三相三线电路。令 $R_w = 0$，$\mathbf{V}_{an} = 200\,\underline{/60^\circ}$ V。负载每个相吸收的功率是复数，$\mathbf{S}_p = 2 - j1$ kVA。假设是正相序列，求：(a) $\mathbf{V}_{bc}$；(b) $\mathbf{Z}_p$；(c) $\mathbf{I}_{aA}$。

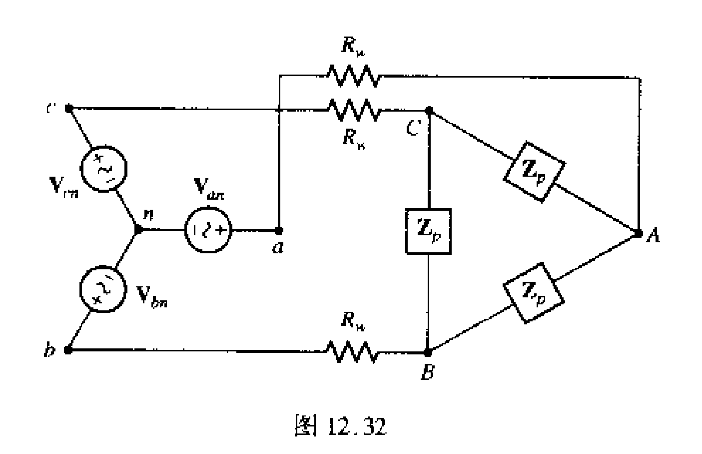


图12.32

22. 图12.32所示的平衡Δ形负载要求15 kVA，功率因数为0.8（滞后）。假设正相序列，$\mathbf{V}_{BC} = 180\,\underline{/30^\circ}$ V。如果 $R_w = 0.75\ \Omega$。求：(a) $\mathbf{V}_{bc}$；(b)电源所提供的总的复功率。

23. 如图12.33所示的平衡三相系统，负载吸收的总的复功率为 $3 + j1.8$ kVA，而电源产生 $3.45 + j1.8$ kVA的功率。如果 $R_w = 5\ \Omega$。求：(a) I_{aA}；(b) I_{AB}；(c) V_{an}。

24. 如图12.33所示的电路，Δ形负载吸收1 800 W的功率，功率因数为 $\sqrt{2}/2$（滞后），导线

电阻损耗 240 W 功率。$R_w=2.3\ \Omega$。求电源的相电压有效值以及负载相电流有效值。

25. 图 12.33 的电源是平衡的且是正相序列。求：(a)$\mathbf{I}_{aA}$；(b)$\mathbf{I}_{bB}$；(c)$\mathbf{I}_{cC}$；(d)电源所提供的总复功率。

26. 对于图 12.32 所描述的电路，$\mathbf{V}_{AB}=200\,\underline{/0°}$ V，正相序列，$R_w=200\ \text{m}\Omega$，相阻抗 $\mathbf{Z}_p$ 为一个 10 Ω 的电阻与一个感抗为 30 Ω 的电感的并联。求电源所提供的总功率，功率因数以及传输效率。

27. 图 12.32 所示的平衡三相 Y 形连接的电源，它的 $\mathbf{V}_{an}=140\,\underline{/0°}$ V，且是正相序列。令 $R_w=0$。平衡三相负载吸收的功率为 15 kW 和正的 9 kVAR。求：(a)$\mathbf{V}_{AB}$；(b)$\mathbf{I}_{AB}$；(c)$\mathbf{I}_{aA}$。

28. 对于图 12.34 所示的平衡三相系统，假设是一个正相序列的平衡电源。如果工作频率是 60 Hz，求下列值的大小，(a)$\mathbf{V}_{AN}$；(b)$\mathbf{V}_{BN}$；(c)$\mathbf{V}_{CN}$。用适当的 Pspice 仿真验证你的答案。

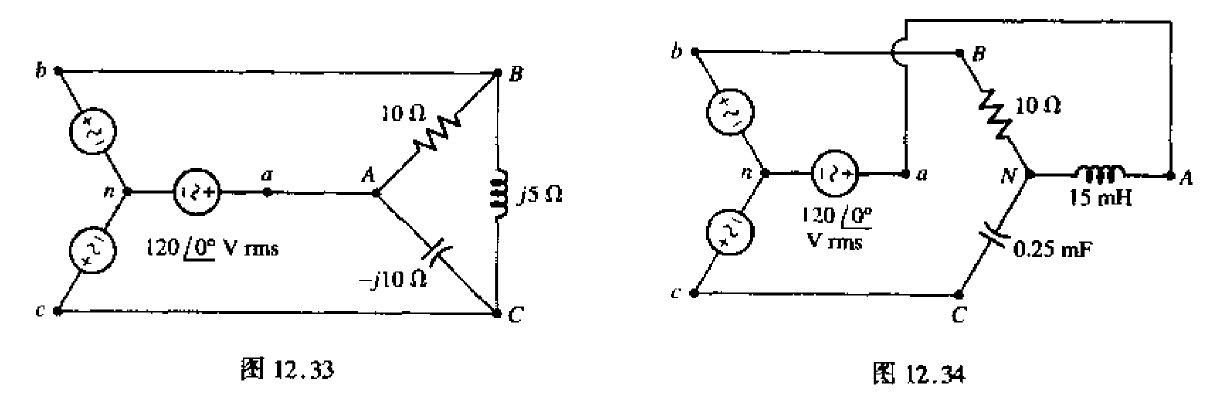


图 12.33　　图 12.34

29. (a)在图 12.33 的每一边串入一个 1 Ω 的电阻，重新计算习题 25；(b)用适当的 Pspice 仿真验证你的结果。

30. 一个平衡的三相系统，线电压有效值为 240 V，包含一个每相负载为 $12+j$ kΩ 的 Δ 形负载以及一个每相为 $5+j3$ kΩ 的 Y 形负载。求线电流，复合负载的总功率以及负载的功率因数。

31. 在图 12.35 所示的电路中，如果端点 A，B 分别连在(a)x 和 y；(b)x 和 z；(c)y 和 z。确定瓦特计的读数(指出是否需要反接两个接点)。

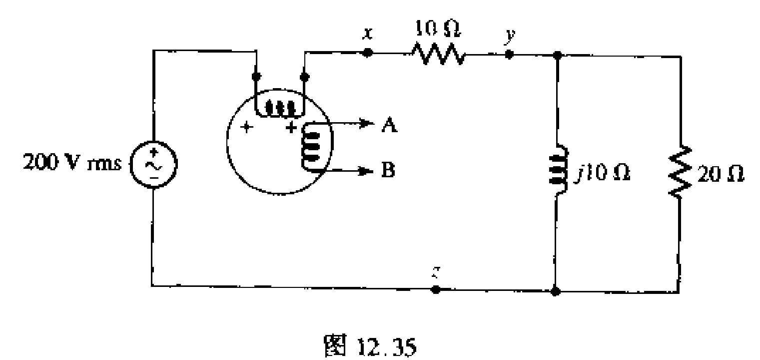


图 12.35

32. 一个瓦特计接入如图 12.36 所示的电路里，使得 $\mathbf{I}_1$ 进入电流线圈的正端，$\mathbf{V}_2$ 是电压线圈两端的电压。求瓦特计的读数，并用适当的 PSpice 仿真验证你的结果。

33. 确定图 12.37 所示电路的瓦特计读数。

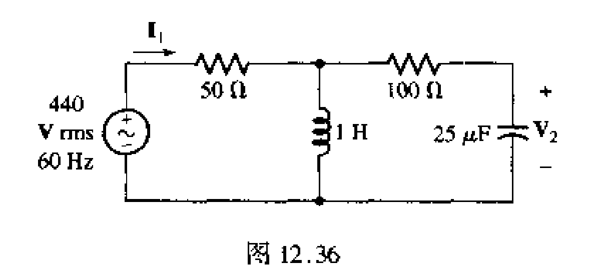


图 12.36

34.(a)确定图 12.38 所示的两个瓦特计的读数,其中 $\mathbf{V}_A = 100\ \underline{/0°}$ V rms, $\mathbf{V}_B = 50\ \underline{/90°}$ V rms, $\mathbf{Z}_A = 10 - j10\ \Omega$, $\mathbf{Z}_B = 8 + j6\ \Omega$, $\mathbf{Z}_C = 30 + j10\ \Omega$;(b)它们读数的和是否等于三个负载获取的总功率? 用适当的 PSpice 仿真验证你的答案。

35.图 12.39 所示的电路中的各值如下:$\mathbf{V}_{ab} = 200\ \underline{/0°}$, $\mathbf{V}_{bc} = 200\ \underline{/120°}$, $\mathbf{V}_{ca} = 200\ \underline{/240°}$ V rms, $\mathbf{Z}_4 = \mathbf{Z}_5 = \mathbf{Z}_6 = 25\ \underline{/30°}\ \Omega$, $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_3 = 50\ \underline{/-60°}\ \Omega$。求每个瓦特计的读数。

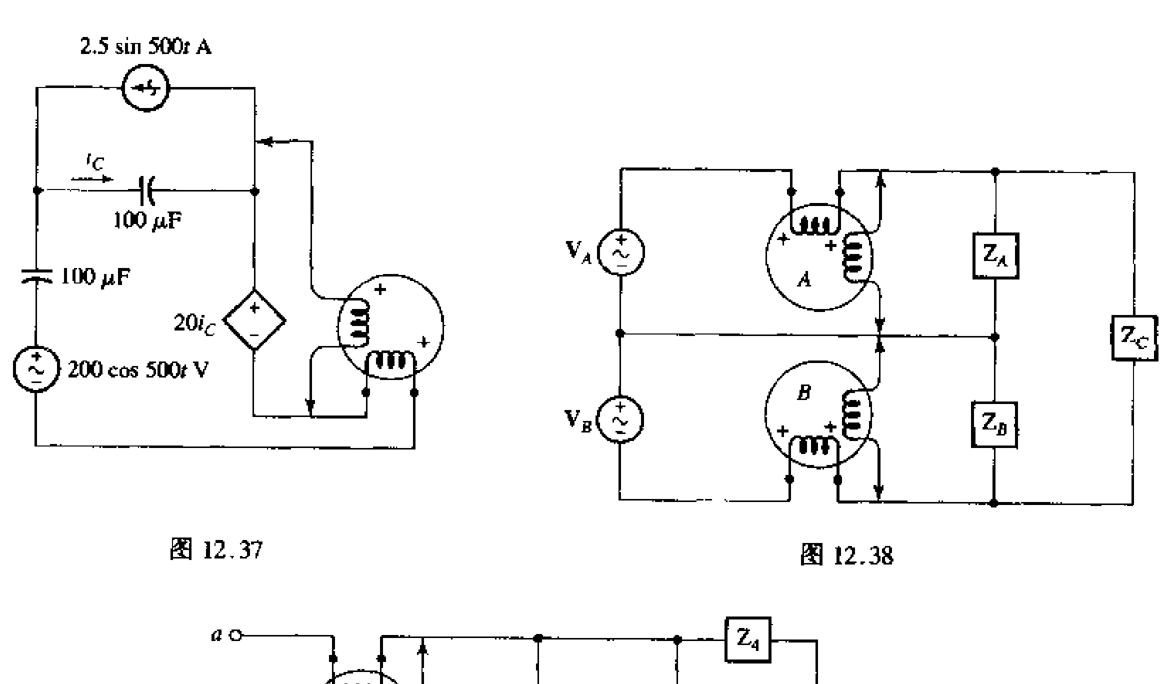


图 12.37　　图 12.38

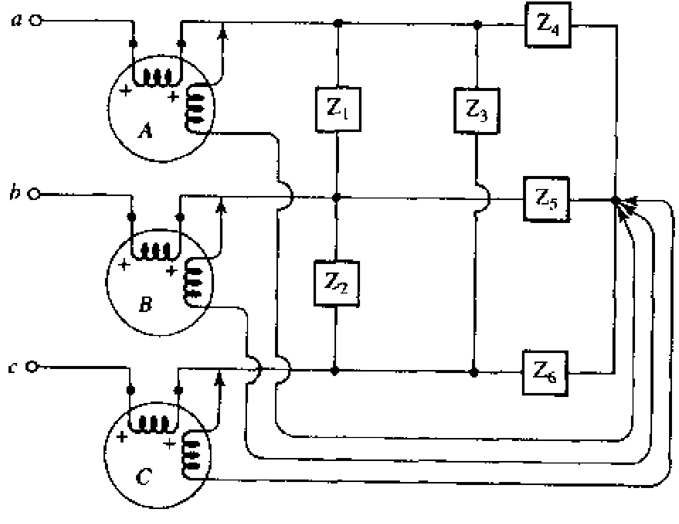


图 12.39

36. 对于图 12.32 中的电路，如何用下面的两种方法测量负载所吸收的功率：(a)三瓦特计法；(b)双瓦特计法。

37. 对于图 12.31 中的电路，如何用下面的两种方法测量负载所吸收的功率：(a)三瓦特计法；(b)双瓦特计法。

第 13 章　磁耦合电路

本章要点：

- 理解互感和自感
- 学会正确使用同名端规则
- T 形网络和Π形网络的相互转换
- 学会分析包含理想变压器的电路
- 利用 PSpice 仿真变压器电路

13.1　引言

当电流流过电感时，不管是直流还是交流，电感周围均会产生磁场。在电路领域中，通常称之为穿过线圈的磁通，它等于线圈磁场垂直分量的平均值与线圈截面积的乘积。当线圈中的一个环产生的时变磁场穿过另一个环时，第二个环的导线两端将会产生电压。为了将这种现象和前面介绍的“电感”区别开来，下面定义一个新的概念，称为“互感”，而将前面介绍的“电感”称为“自感”。

不存在“互感”这样的设备，但却有一种源于这个概念的非常重要的设备——变压器。变压器由两组间隔很近的线圈组成，通常用来升高或降低交流电压的幅度，根据实际需要而定。所有需要在直流电流下工作但却使用市电进行供电的电器，在进行整流之前要先用变压器进行变压，以将电压调整到合适的范围。通常采用二极管来进行整流，所有电子学导论的教材中都会有关于二极管的介绍。

13.2　互感

在第 7 章中，用端电压和电流的关系来定义电感：

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

上式使用了无源符号规则。这个电流 - 电压特性建立在以下两个假定的基础上：

1. 磁通是由线性电感中的电流产生的，且与此电流成正比。
2. 电压是由时变磁场产生的，且与磁场随时间的变化率或磁通随时间的变化率成正比。

13.2.1　互感系数

互感是在电感的基础上稍做推广而得到的。当一个线圈有电流流过时，该线圈周围将出现磁通，同时，该线圈附近的另一个线圈也会出现磁通。第二个线圈周围的时变磁通将使得此线圈的两端产生电压，该电压与流过第一个线圈的电流随时间的变化率成正比。图 13.1(a)画出了两个线圈 L_1 和 L_2 的简单模型，它们之间的距离足够近，使得流过 L_1 的电流 $i_1(t)$产生的

磁通在 L_2 的两端产生开路电压 $v_2(t)$。这时先不考虑符号关系，定义互感系数（或简称为互感）M_{21} 为：

$$v_2(t)=M_{21}\frac{di_1(t)}{dt} \tag{13.1}$$

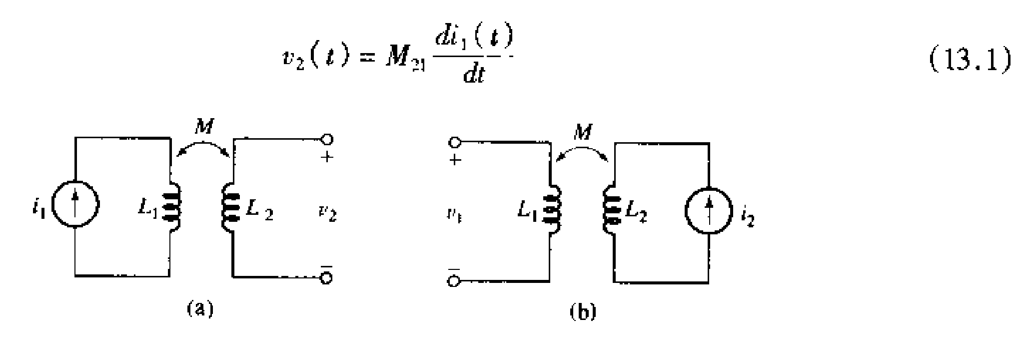


图 13.1 (a) L_1 上的电流 i_1 在 L_2 上产生开路电压 v_2；(b) L_2 上的电流 i_2 在 L_1 上产生开路电压 v_1

M_{21} 的下标排列顺序表示 L_1 上的电流源在 L_2 上产生的电压响应。如果将系统反过来，如图 13.1(b)所示，这时可以得到：

$$v_1(t)=M_{12}\frac{di_2(t)}{dt} \tag{13.2}$$

不过，并不需要两个互感系数，后面将使用能量关系来证明 M_{12} 和 M_{21} 是相等的，即 $M_{12}=M_{21}=M$。两个线圈之间的互耦关系可以用双向箭头来表示，如图 13.1(a)和图 13.1(b)所示。

互感的单位为亨利（henry），和电阻、电感和电容一样，也是一个正的量[①]。不过，电压 $M\,di/dt$ 则是可正可负的，这要看在某一特定时刻的电流是增大还是减小。

13.2.2 同名端规则

电感是一个双端元件，因此可以用无源符号规则来确定电压 $L\,di/dt$ 或 $j\omega L\mathbf{I}$ 的符号。如果电流从正的电压参考端流入，则取其符号为正。不过，这种规则却不适合于互感，因为互感含有四个端子。有几种方法可以用于选取正确的符号，其中包括同名端规则，或者通过考察每个线圈的缠绕方向来判断。下面将使用同名端规则来选取符号，只是简单考虑线圈的物理结构、对于只有两个线圈的情况，没有必要使用其他的特殊符号。

同名端规则使用两个粗点来表示相互耦合的两个线圈的相对极性，每个线圈的一端各标一个点。采用下面的方法来确定互感电压的符号：

从一个线圈的同名端流入的电流在另一个线圈的（同名端）产生的开路电压的参考极性为正。

因此，图 13.2(a)中，i_1 从 L_1 的同名端流入，L_2 中产生的感应电压 v_2 在同名端为正，且 $v_2=M\,di_1/dt$。以前曾经遇到过这样的情况，在选取电路中的电压和电流参考极性时，并不总是能满足无源符号规则，在互感中也存在相同的情况。例如，将 v_2 的正参考极性取在非同名端可能更方便一些，如图 13.2(b)所示，此时有 $v_2=-M\,di_1/dt$。同样，电流也不总是从端同名端

① 并不总是假定互感为正，当含有三个或者更多个线圈，且每个线圈与其他所有的线圈均相关时，使用带有符号的互感则特别方便。不过，本书主要讨论两个线圈这种更重要的情况。

流入，比如图 13.2(c)和图 13.2(d)所示的情况。这时，可以得到：

从一个线圈的非同名端流入的电流在另一个线圈的非同名端产生的开路电压的参考极性为正。

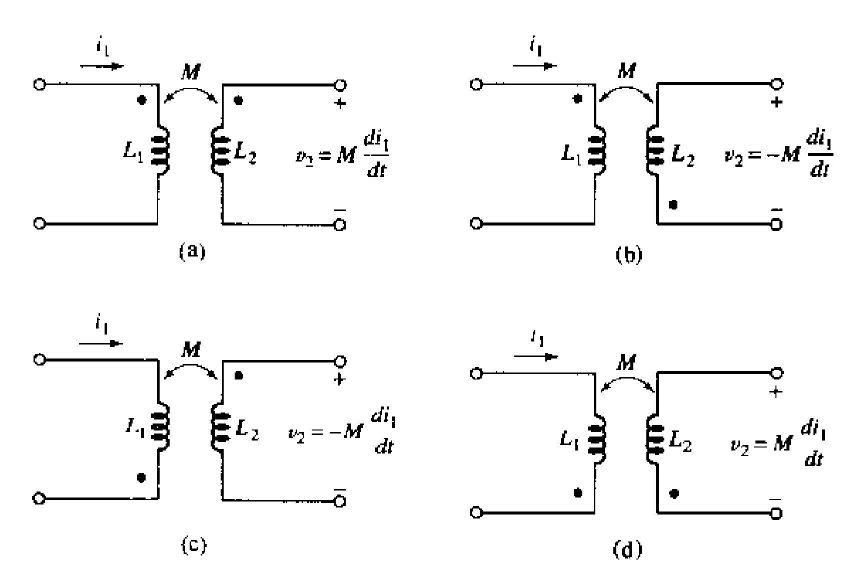


图 13.2　从一个线圈的同名端流入的电流在第二个线圈的同名端产生正的感应电压。从一个线圈的非同名端流入的电流在第二个线圈的非同名端产生正的感应电压

例题 13.1　对于图 13.3 所示电流，(a)如果 $i_2 = 5\sin 45t$ A，$i_1 = 0$，求 v_1；(b)如果 $i_1 = -8e^{-t}$A，$i_2 = 0$

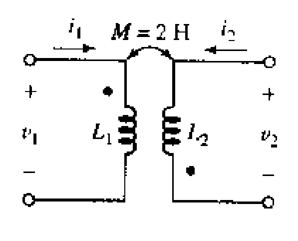


图 13.3　同名端

(a)因为电流 i_2 从右线圈的非同名端流入，于是左线圈中感应的正电压参考极性为非同名端。因此，可以得到左线圈两端的开路电压为：

$$v_1 = -(2)\times(45)\times(5\cos 45t) = -450\cos 45t \text{ V}$$

这是由于 i_2 在右线圈产生的时变磁通在左线圈感应产生的。因为左线圈中没有电流流过，因此，左线圈的自感对 v_1 没有贡献。

(b)现在电流是从同名端流入的，但 v_2 的正的参考端为非同名端，因此：

$$v_2 = -(2)\times(-1)\times(-8e^{-t}) = -16e^{-t} \text{ V}$$

练习

13.1 假定 $M = 10$ H，$i_1 = -2e^{-5t}$ A，对于(a)图 13.2(a)；(b)图 13.2(b)分别求出电压 v_2。

答案：$100e^{-5t}$ V；$-100e^{-5t}$ V

13.2.3 组合的互感和自感电压

前面只考虑了开路线圈两端的互感电压。通常情况下，两个线圈的电流均不为零，于是每个线圈中均会产生互感电压，这是由另一个线圈中的电流所产生的。这个互感电压与自感电压无关，但却和自感电压叠加在一起。换句话说，L_1 两端的电压将包含两项，$L_1\ di_1/dt$ 和 $M\ di_2/dt$，每一项均带有符号，这个符号与电流方向和取定的电压参考方向以及同名端的位置均有关。图 13.4(a)所示的电路中，画出了电流 i_1 和 i_2，假定它们均从同名端流入。于是，L_1 两端的电压由两部分组成：

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

类似地，L_2 两端的电压为：

$$v_2 = L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

在图 13.4(b)中，电流和电压的选取使得 v_1 和 v_2 的某些项为负。只考察 i_1 和 v_1 的参考方向，很显然，这里不满足无源符号规则，因此 $L_1\,di_1/dt$ 的符号必须取为负。同样，对于 $L_2\,di_2/dt$ 也是如此。v_2 的互电压项的符号可以通过考察 i_1 和 v_2 的方向而定，因为 i_1 从同名端流入，且 v_2 的同名端为正参考极性，于是 $M\,di_1/dt$ 的符号必然为正。最后，i_2 从 L_2 的非同名端流入，且 v_2 的非同名端为正参考极性，于是 v_1 的互电压项 $M\,di_2/dt$ 的符号也必然为正。因此，有：

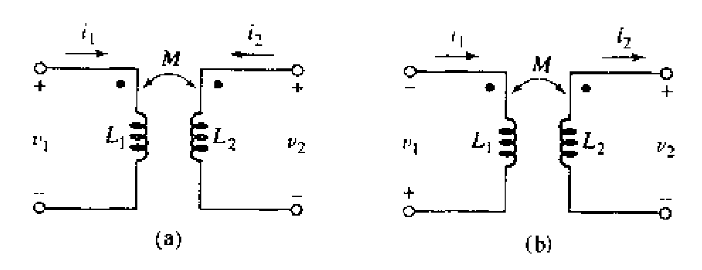


图 13.4 (a)因为 v_1、i_1 和 v_2、i_2 均符合无源符号规则，因此自感电压均取正号；因为 i_1 和 i_2 均从同名端流入，且 v_1 和 v_2 在同名端均产生正的感应电压，因此互感项也取正号；(b)由于 v_1，i_1 和 v_2，i_2 均不符合无源符号规则，因此自感电压均取负号；由于 i_1 从同名端流入，v_2 在同名端产生正的感应电压，因此 v_2 的互感项取正号；由于 i_2 从非同名端流入，v_1 在非同名端产生正的感应电压，因此 v_1 的互感项也取正号

$$v_1 = -L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \qquad v_2 = -L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

当激励源是频率为 ω 的正弦信号时，采用同样的分析方法，可以得到：

$$\mathbf{V}_1 = -j\omega L_1\mathbf{I}_1 + j\omega M\mathbf{I}_2 \qquad \mathbf{V}_2 = -j\omega L_2\mathbf{I}_2 + j\omega M\mathbf{I}_1$$

13.2.4 同名端规则的物理根据

下面来看一下同名端规则的物理根据，这样有助于更深刻地理解它。在这里，可以将同名端理解为磁通。图 13.5 中画出了缠绕在一根圆柱上的两个线圈，从图中可以清楚地看出

它们的缠绕方向。现在假定电流 i_1 为正并且随时间逐渐增大，可以用右手定则来确定 i_1 在圆柱内产生磁通的方向：用右手绕在线圈上，并且使手指指向电流方向，则大拇指所指的方向即为线圈内磁通的方向。因此 i_1 产生向下的磁通，因为 i_1 随时间逐渐增大，于是磁通（正比于 i_1）也随时间增大。现在来看第二个线圈，同样假定 i_2 为正且随时间逐渐增大，使用右手定则可知 i_2 也产生向下并且逐渐增大的磁通。换句话说，电流 i_1 和 i_2 产生相加的磁通。

两个相互耦合的电感的物理结构。考虑每个线圈产生的磁通，可以发现既可以将两个点放置在每个线圈的上端，也可以放在每个线圈的下端。

任何一个线圈两端产生的电压都是由于线圈内的时变磁通所引起的。第一个线圈两端的电压在 i_2 大于零时要比 i_2 等于零时大，即 i_2 在第一个线圈上感应产生的电压与此线圈上的自感电压极性相同。根据无源符号规则可以确定自感电压的符号，于是就可以知道互感电压的符号。

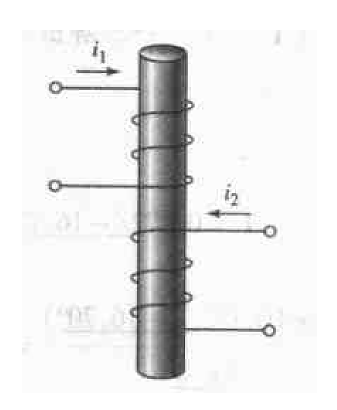


图 13.5　两个相互耦合电感的物理结构。考虑每个线圈产生的磁通，可以发现既可将两个点放置在每个线圈的上端，也可以放在每个线圈的下端

同名端规则仅仅通过在每个线圈的其中一端分别用一个点来表示两个线圈的极性关系，从两个同名端流入的电流会产生相加的磁通，因而不必考虑线圈的物理构造。很显然，总是有两种可能的选取同名端的方法，因为同时将两个线圈一端的同名端移到它们的另一端，这种磁通相加关系仍然成立。

例题 13.2　如图 13.6 所示电路，求 400 Ω 电阻两端的电压与电源电压的比值

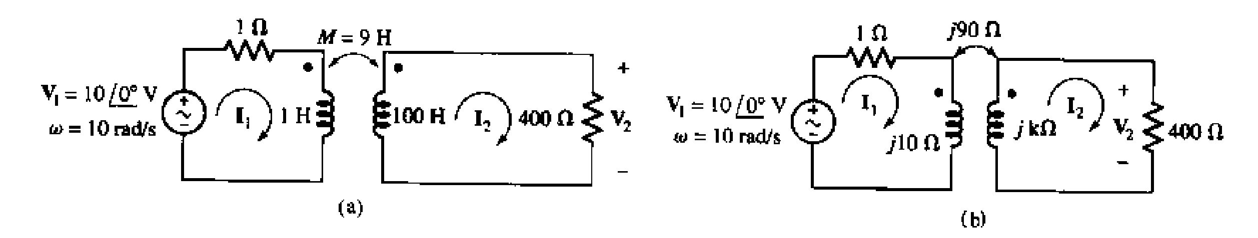


图 13.6　(a)含有互感的电路，求电压比 V_2/V_1；(b)将自感和互感用与它们相应的阻抗替换

- 弄清问题的目标：

这里需要根据已知量求出 $\mathbf{V}_2$，然后将它除以 $10\angle 0°$ V。

- 收集已知信息：

首先将 1 H 和 100 H 的电感用相应的阻抗形式表示，分别为 $j10\,\Omega$ 和 $j\,\text{k}\Omega$[如图 13.6(b) 所示]。同时将 9 H 的互感表示为 $j\omega M = j90\,\Omega$。

- 选择最适合问题的已有方法：

很明显该电路有两个网孔，因此采用网孔分析是一个不错的选择。

- 建立适当的方程组：

对于左边的网孔，根据同名端规则容易确定互感项的符号。因为 $\mathbf{I}_2$ 从 L_2 的非同名端流入，因此 L_1 上的互感电压在非同名端为正。因此：

$$(1+j10)\mathbf{I}_1 - j90\mathbf{I}_2 = 10\underline{/0^\circ}$$

采用类似的方法可以确定第二个网孔的互感项的符号。因为 $\mathbf{I}_1$ 从同名端流入，于是右边网孔互感项的(+)参考端在 100 H 电感的同名端。因此，可以得到：

$$(400+j1\,000)\mathbf{I}_2 - j90\mathbf{I}_1 = 0$$

- 确定是否需要其他信息：

这里有两个方程与两个未知数 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$。一旦解出这两个电流，然后将 $\mathbf{I}_2$ 乘以 $400\,\Omega$ 即可得到 $\mathbf{V}_2$。

- 试解：

求解这两个方程，可以得到：

$$\mathbf{I}_2 = 0.172\underline{/-16.70^\circ}\,\text{A}$$

因此：

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{400\times(0.172\underline{/-16.70^\circ})}{10\underline{/0^\circ}} = 6.880\underline{/-16.70^\circ}$$

- 证实所得解是否合理和满足要求：

可以看到，输出电压 $\mathbf{V}_2$ 的幅度要比输入电压 $\mathbf{V}_1$ 的幅度大。但是不是总是如此呢？答案是否定的，在后面的章节中将看到，变压器既可以降低电压，也可以升高电压。不过可以做一个简单的估计，以求得此解答的上下限。如果将 $400\,\Omega$ 的电阻用短路线替代，则 $\mathbf{V}_2 = 0$；如果将它替换为开路，则 $\mathbf{I}_2 = 0$，因此：

$$\mathbf{V}_1 = 1 + j\omega L_1\mathbf{I}_1$$

以及：

$$\mathbf{V}_2 = j\omega M\mathbf{I}_1$$

解之，可以得到 $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1$ 的最大值为 $8.955\underline{/5.711^\circ}$。因此，求得的解答看来至少是合理的。

图 13.6(a)所示电路的输出电压的幅度比输入电压的幅度大，因此，这种电路可以产生电压增益。将这个电压比值看做是关于 ω 的函数也是很有趣的。

为了求出这个电路的 $\mathbf{I}_2(j\omega)$，列出关于角频率 ω 的网孔方程：

$$(1+j\omega)\mathbf{I}_1 - j\omega 9\mathbf{I}_2 = 10\underline{/0^\circ}$$

以及

$$-j\omega 9\mathbf{I}_1 + (400+j\omega 100)\mathbf{I}_2 = 0$$

用代入法解之，可以得到：

$$\mathbf{I}_2 = \frac{j90\omega}{400+j500\omega-19\omega^2}$$

因此，得到输出电压和输入电压的比值用 ω 表示的形式：

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1}=\frac{400\mathbf{I}_2}{10}=\frac{j\omega 3\,600}{400+j500\omega-19\omega^2}$$

有时将这个比值称为电路传输函数，图 13.7 画出了该曲线，它在频率 4.6 rad/s 附近有一个幅度约为 7 的峰值。当频率非常低或者非常高时，传输函数的幅度均小于 1。

除了电压源外，这个电路仍属于无源电路，因此不能将电压增益看做是功率增益。当 $\omega=10$ rad/s 时，电压增益为 6.88，但理想电压源的端电压为 10 V，传递的功率为 8.07 W，其中只有 5.94 W 传给了 400 Ω 的电阻。可以将输出功率与电源功率的比值定义为功率增益，它等于 0.736。

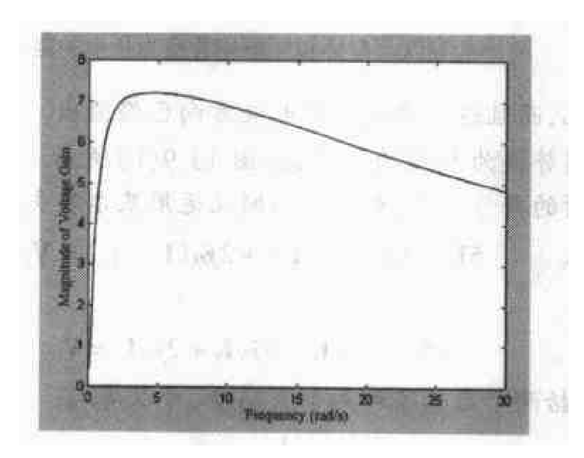


图 13.7　图 13.6(a)所示电路的电压增益 $|\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1|$ 随着 ω 变化的曲线，该曲线由下面的MATLAB语句画出：

```
EDU >> w = linspace(0,30,1 000);
EDU >> num = j * w * 3 600;
EDU >> for indx = 1:1 000
den = 400 + j * 500 * w(indx) - 19 * w(indx) * w(indx);
gain(indx) = num(indx)/den;
end
EDU >> plot(w,abs(gain));
EDU >> xlabe('Frequency(rad/s)');
EDU >> ylabe('Magnitude of Voltage Gain');
```

练习

13.2　如图 13.8 所示电路，设 $v_s=20e^{-1000t}$ V，分别列出左网孔和右网孔的网孔方程。

答案：$20e^{-1000t}=3i_1+0.002di_1/dt-0.003di_2/dt$；　$10i_2+0.005di_2/dt-0.003di_1/dt=0$

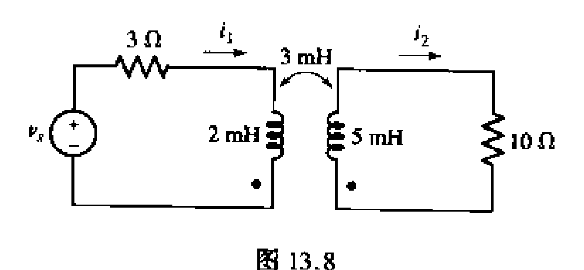


图 13.8

例题 13.3 对于图 13.9(a)所示电路，列出正确的方程组

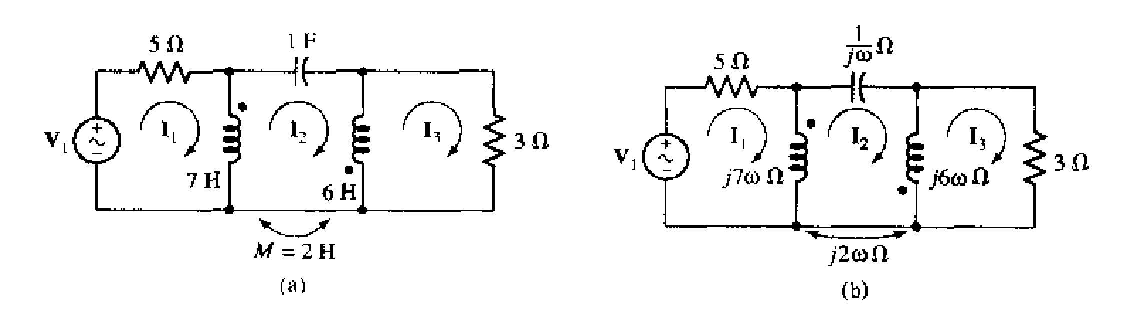


图 13.9 (a)含有互感的三网孔电路；(b)1 F 的电容以及自感和互感均替换为相应的阻抗

该电路含有三个网孔，而且这三个网孔的电流方向已经给出。同样地，第一步要做的是将互感和两个自感分别替换为相应的阻抗，如图 13.9(b)所示。设流过第二个线圈的电流为$(\mathbf{I}_3-\mathbf{I}_2)$，则互感项的符号为正，对第一个网孔运用基尔霍夫电压定律，有：

$$5\mathbf{I}_1+7j\omega(\mathbf{I}_1-\mathbf{I}_2)+2j\omega(\mathbf{I}_3-\mathbf{I}_2)=\mathbf{V}_1$$

或

$$(5+7j\omega)\mathbf{I}_1-9j\omega\mathbf{I}_2+2j\omega\mathbf{I}_3=\mathbf{V}_1 \qquad (13.3)$$

注意，第二个方程包括两个自感项和两个互感项，可以得到：

$$7j\omega(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_1)+2j\omega(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3)+\frac{1}{j\omega}\mathbf{I}_2+6j\omega(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3)+2j\omega(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_1)=0$$

或

$$-9j\omega\mathbf{I}_1+\left(17j\omega+\frac{1}{j\omega}\right)\mathbf{I}_2-8j\omega\mathbf{I}_3=0 \qquad (13.4)$$

最后，对于第三个网孔，有：

$$6j\omega(\mathbf{I}_3-\mathbf{I}_2)+2j\omega(\mathbf{I}_1-\mathbf{I}_2)+3\mathbf{I}_3=0$$

或

$$2j\omega\mathbf{I}_1-8j\omega\mathbf{I}_2+(3+6j\omega)\mathbf{I}_2=0 \qquad (13.5)$$

可以用任何常规的办法来求解方程(13.3)到方程(13.5)。

练习

13.3 对于图 13.10 所示电路，以 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$ 为自变量，分别对左网孔和右网孔列出合适的网孔方程。

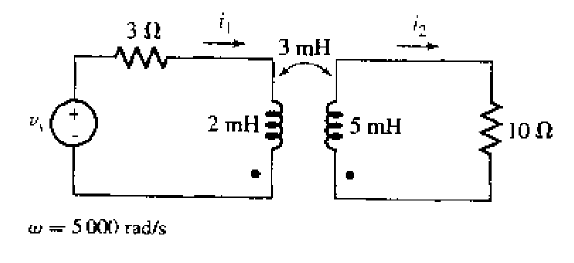


图 13.10

答案：$\mathbf{V}_1 = (3+j10)\mathbf{I}_1 - j15\mathbf{I}_2$；　$0 = -j15\mathbf{I}_1 + (10+j25)\mathbf{I}_2$

13.3 能量考虑

现在来考虑储存在一对相互耦合的电感中的能量，这个结论很有用。下面首先来验证 $M_{12} = M_{21}$ 的假定，然后来求两个给定电感之间的互感的最大可能值。

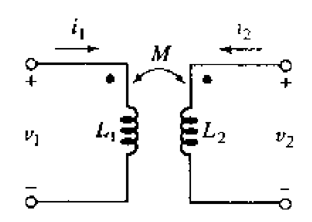


图 13.11　一对耦合线圈，其互感为 $M_{12} = M_{21} = M$

13.3.1 M_{12} 和 M_{21} 之间的同一性

如图 13.11 所示的互耦电感，已经标出了电流、电压和表示极性关系的点。为了证明 $M_{12} = M_{21}$，首先令所有的电流和电压均为零，因此网络存储的初始能量为零。然后将右边的两个端点开路，从零开始增大 i_1，在 $t = t_1$ 时增加到某个（直流）定值 I_1。在任何时刻，从左边网络输入的功率为：

$$v_1 i_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} i_1$$

从右边网络输入的功率为：

$$v_2 i_2 = 0$$

这是因为 $i_2 = 0$。

因此，当 $i_1 = I_1$ 时存储在网络中的能量为：

$$\int_0^{t_1} v_1 i_1\, dt = \int_0^{I_1} L_1 i_1\, di_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

现在让 i_1 保持为定值，$i_1 = I_1$，然后在 $t = t_1$ 时从零逐渐增加 i_2，在 $t = t_2$ 时增加到某个定值 I_2。因此，从右边的电源输入的能量为：

$$\int_{t_1}^{t_2} v_2 i_2\, dt = \int_0^{I_2} L_2 i_2\, di_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

在这段时间内，虽然 i_1 保持不变，左边的电源也同样给网络提供了能量：

$$\int_{t_1}^{t_2} v_1 i_1\, dt = \int_{t_1}^{t_2} M_{12} \frac{di_2}{dt} i_1\, dt = M_{12} I_1 \int_0^{I_2} di_2 = M_{12} I_1 I_2$$

当 i_1 和 i_2 均增长到相应的定值时，存储在网络中的总能量为：

$$W_{\text{total}} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$

现在，采用相反的顺序，让两个电流分别达到与前面一样的最大值，也就是说，首先将 i_2 从 0

增加到 I_2，然后保持 i_2 不变，让 i_1 从 0 增加到 I_1。采用同样的办法，可以计算出存储的总能量为：

$$W_{total} = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M_{21} I_1 I_2$$

这两个总能量公式的惟一的不同之处是 M_{21} 和 M_{12}，但是，由于网络的初态和终态是一样的，因此，所求的这两个能量必然是相同的，于是：

$$M_{12} = M_{21} = M$$

以及：

$$W = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + MI_1 I_2 \tag{13.6}$$

如果其中一个电流从同名端流入，而另一个电流则从同名端流出，则互感能量项要取相反的符号：

$$W = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 - MI_1 I_2 \tag{13.7}$$

虽然式(13.6)和式(13.7)是通过将两个电流的终止值取为定值来得到的，但是这两个"定值"可以为任何值，因此，这两个能量表达式就分别表示了 i_1 和 i_2 的瞬时值为 I_1 和 I_2 时系统所存储的能量。换句话说，可以用小写字母来表示它们：

$$w(t) = \frac{1}{2}L_1[i_1(t)]^2 + \frac{1}{2}L_2[i_2(t)]^2 \pm M[i_1(t)][i_2(t)] \tag{13.8}$$

式(13.8)所隐含的惟一的假定是当两个电流为零时能量为零。

13.3.2 M 的上界

现在可以根据式(13.8)来推导 M 的上界。因为 $w(t)$ 表示无源网络所存储的能量，因此，不管 i_1, i_2, L_1, L_2 或 M 为任何值，$w(t)$ 均为非负值。假定 i_1 和 i_2 同为正值或同为负值，因此它们的积为正值。根据式(13.8)，能量可能取负值的情况是：

$$w = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 - Mi_1 i_2$$

配方得：

$$w = \frac{1}{2}\left(\sqrt{L_1}\, i_1 - \sqrt{L_2}\, i_2\right)^2 + \sqrt{L_1 L_2}\, i_1 i_2 - Mi_1 i_2$$

实际的能量不能为负值，因此等式的右边不能为负。不过，上式第一项最小可以为 0，因此，后面两项的和不能为负。于是可以得到：

$$\sqrt{L_1 L_2} \geqslant M$$

或

$$M \leqslant \sqrt{L_1 L_2} \tag{13.9}$$

因此，互感的取值有一个上界，它不会大于该互感所在的两个线圈的自感的几何平均值。虽然上面是通过假定 i_1 和 i_2 取相同的符号来得到上述关系的，但是如果假定 i_1 和 i_2 符号相反，采用类似的方法，只需要在开始的时候取式(13.8)中的正号，同样可以得到这个关系。

还可以从物理角度出发来考虑磁耦合情况下的不等关系式(13.9)的正确性。如果认为 i_2

为 0，而电流 i_1 建立磁通把 L_1 和 L_2 联系起来，很显然 L_2 中的磁通不会大于 L_1 中的磁通，因为总磁通等于 L_1 中的磁通。因此，从数值上看，两个线圈之间可能存在的互感会有一个上界。

13.3.3 耦合系数

M 与其最大值相接近的程度可以用耦合系数来描述，耦合系数定义为：

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \tag{13.10}$$

因为：

$$M \leqslant \sqrt{L_1 L_2}, \quad 0 \leqslant k \leqslant 1$$

当两个线圈相距较近，或者由于采用某种缠绕方法使它们的公共磁通较大时，或者由于采用特殊的材料（高导磁率材料）使磁通集中通过该材料，这时耦合系数就比较大。耦合系数接近 1 的两个线圈称为紧耦合。

例题 13.4　如图 13.12，设 $L_1 = 0.4$ H，$L_2 = 2.5$ H，$k = 0.6$，$i_1 = 4i_2 = 20\cos(500t - 20°)$ mA。计算 $t = 0$ 时下列参数的值：(a) i_2；(b) v_1；(c) 系统中存储的总能量

(a) $i_2(t) = 5\cos(500t - 20°)$ mA，因此 $i_2(0) = 5\cos(-20°) = 4.698$ mA。

(b) v_1 的值包含线圈 1 自感的贡献和线圈 2 互感的贡献。使用同名端规则可得：

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

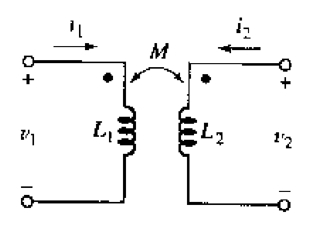


图 13.12

为了求出这个量，需要知道 M 的值，这可以根据式（13.10）求得：

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0.6\sqrt{(0.4)\times(2.5)} = 0.6\ \text{H}$$

因此，$v_1(0) = 0.4[-10\sin(-20°)] + 0.6[-2.5\sin(-20°)] = 1.881$ V。

(c) 将两个电感中所存储的能量相加即可以求得总能量，由于这两个线圈相互耦合，因此总能量由三部分组成。电流从同名端流入，于是：

$$w(t) = \frac{1}{2}L_1[i_1(t)]^2 + \frac{1}{2}L_2[i_2(t)]^2 + M[i_1(t)][i_2(t)]$$

将 (a) 中求得的结果 $i_2(0) = 4.698$ mA 以及 $i_1(0) = 4i_2(0) = 18.79$ mA 代入，可以求出这两个线圈在 $t = 0$ 时所存储的能量为 151.2 μJ。

练习

13.4　图 13.13 电路中 $i_s = 2\cos 10t$ A，如果 $k = 0.6$，分别求出 $t = 0$ 时，在下列情况下该无源网络中所存储的能量：(a) x 和 y 开路；(b) x 和 y 短路。

答案:0.8 J； 0.512 J

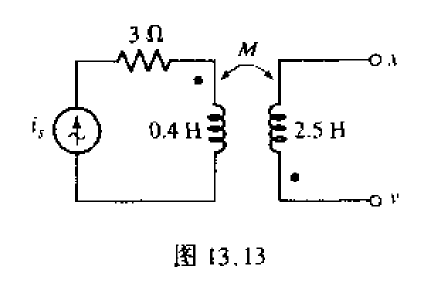


图 13.13

13.4 线性变压器

现在将应用前面所学的关于磁耦合的知识来分析两种实际的设备，它们都可以用含有互感的模型来表示。这两种设备都属于变压器，可以将变压器定义为包含两个或多个耦合线圈的网络。这一节将分析线性变压器，这是实际的线性变压器的非常好的模型，线性变压器主要工作于射频或者更高的频率。下一节将分析理想变压器，这是一种含有磁芯的实际变压器的理想模型，其耦合系数为 1，其中磁芯由某种磁性材料制成，通常是铁合金。

图 13.14 画出了一个变压器并标出了它的两个网孔电流。第一个网孔通常含有电源，称为初级，第二个网孔通常含有负载，称为次级。标为 L_1 和 L_2 的线圈也分别称为变压器的初级和次级。如果变压器是线性的，意味着它不含磁性材料(磁性材料会导致非线性的"磁通 - 电流"关系)。不过，因为不含磁性材料，其耦合系数很难大于十分之几。图中的两个电阻用来表示初级和次级线圈的导线电阻以及其他任何损耗。

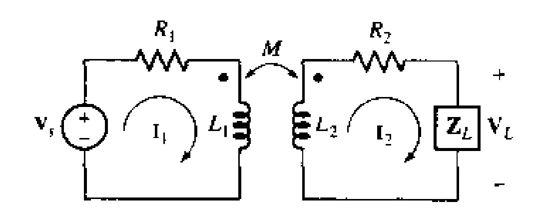


图 13.14 一个线性变压器，其初级接有电源，次级接有负载，同时也画出了初级和次级的电阻

13.4.1 反射阻抗

下面来看初级回路的输入阻抗。列出两个网孔方程为：

$$\mathbf{V}_s = (R_1 + j\omega L_1)\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2 \tag{13.11}$$

$$0 = -j\omega M\mathbf{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2 + \mathbf{Z}_L)\mathbf{I}_2 \tag{13.12}$$

为了将其简化，定义为：

$$\mathbf{Z}_{11} = R_1 + j\omega L_1 \quad 和 \quad \mathbf{Z}_{22} = R_2 + j\omega L_2 + \mathbf{Z}_L$$

因此：

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{Z}_{11}\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2 \tag{13.13}$$

$$0 = -j\omega M\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{22}\mathbf{I}_2 \tag{13.14}$$

从第二个方程中解出 $\mathbf{I}_2$，然后将该结果代入第一个方程中，可以得到输入阻抗为：

$$\mathbf{Z}_{in}=\frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{I}_1}=\mathbf{Z}_{11}-\frac{(j\omega)^2M^2}{\mathbf{Z}_{22}} \tag{13.15}$$ ①

在对这个表达式进行进一步处理之前，可以事先得到几个有趣的结论。首先，上面这个结果与两个线圈上同名端的位置无关，因为如果将这两个同名端中的一个移到另一端，只会改变方程(13.11)到方程(13.14)中 M 符号。将 M 替换为$(-M)$可以产生同样的结果，这并不会改变式(13.15)所表示的输入阻抗。从式(13.15)也可以看到，如果线圈的耦合为零，则输入阻抗只有一项 $\mathbf{Z}_{11}$，当耦合从零开始增加时，输入阻抗与 $\mathbf{Z}_{11}$ 之差变为 $\omega^2M^2/\mathbf{Z}_{22}$，这个差称为反射阻抗。为了更容易看出这一变化趋势的特性，将下面的表达式展开为：

$$\mathbf{Z}_{in}=\mathbf{Z}_{11}+\frac{\omega^2M^2}{R_{22}+jX_{22}}$$

然后对反射阻抗进行有理化，得到：

$$\mathbf{Z}_{in}=\mathbf{Z}_{11}+\frac{\omega^2M^2R_{22}}{R_{22}^2+X_{22}^2}+\frac{-j\omega^2M^2X_{22}}{R_{22}^2+X_{22}^2}$$

因为 $\omega^2M^2R_{22}/(R_{22}^2+X_{22}^2)$ 必为正，所以，很显然由于第二项的存在增加了初级回路的损耗。换句话说，可以将第二项的存在看做是初级回路中 R_1 的增大。同时，次级回路反射到初级回路的阻抗的符号与次级回路的净阻抗 X_{22} 符号相反。其中，阻抗 X_{22} 为 ωL_2 和 X_L 的和，对于感性负载其符号为正，而对于容性负载其符号可正可负，视负载的阻抗的幅度而定。

练习

13.5　某线性变压器的参数为 $R_1=3\,\Omega$，$R_2=6\,\Omega$。$L_1=2\,\text{mH}$，$L_2=10\,\text{mH}$，$M=4\,\text{mH}$。如果 $\omega=5\,000\,\text{rad/s}$，分别求出当 $\mathbf{Z}_L$ 等于下列值时 $\mathbf{Z}_{in}$的值：(a)$10\,\Omega$；(b)$j20\,\Omega$；(c)$10+j20\,\Omega$；(d)$-j20\,\Omega$。

答案：$5.32+j2.74\,\Omega$；　$3.49+j4.33\,\Omega$；　$4.24+j4.57\,\Omega$；　$5.56-j2.82\,\Omega$

13.4.2　T 形和 Π 形等效网络

为方便起见，通常需要将变压器变换为 T 形和 Π 形等效网络。如果将初级和次级的电阻从变压器中分离出来，则只留下一对相互耦合的电感，如图 13.15 所示。注意到变压器的下端连接在一起，形成一个三端网络，这么做是因为这两种等效网络均为三端网络。再次列出描述此电路的微分方程：

$$v_1=L_1\frac{di_1}{dt}+M\frac{di_2}{dt} \tag{13.16}$$

图 13.15　求给定变压器的 T 形或 Π 形等效网络

① $\mathbf{Z}_{in}$为往变压器的初级线圈看过去的阻抗。

以及：

$$v_2 = M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt} \tag{13.17}$$

现在已经很熟悉这两个方程的形式了，可以把它们看成网孔方程。与图 13.15 一致，取 i_1 为顺时针流方向的电流和 i_2 为逆时针方向的电流。方程(13.16)中的 $M\,di_2/dt$ 和方程(13.17)中的 $M\,di_1/dt$ 说明这两个网孔必然有一个公共的“自感”M。因为左网孔的总电感为 L_1，所以必须在左网孔中（而不在右网孔中）插入自感 $L_1 - M$。类似地，取右网孔的自感为 $L_2 - M$。最后所得到的网络如图 13.16 所示，该网络与原网络完全等效，因为可以用关于变量 v_1, i_1, v_2 和 i_2 同样的方程组来描述它们。

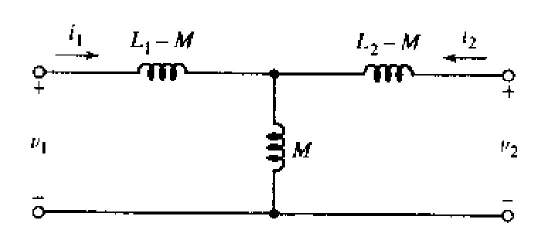


图 13.16 图 13.15 所示的变压器的 T 形等效网络

如果将图中的变压器中的一个线圈的同名端放到该线圈的另一端，则方程(13.16)和方程（13.17）的互感项取相反的符号，这相当于将 M 替换为 $-M$，对图 13.16 所示的网络做这样的替换后，就得到这时正确的等效电路。这时，这三个自感分别变为 $L_1 + M$，$-M$ 和 $L_2 + M$。

T 形等效网络中的电感均为自感，没有互感。对于这种等效电路，其中的电感可能取负值，如果只是为了做数学上的分析，这并不会有什么关系。当然，如果要做实际的等效网络，则电感无论如何不能取负值。不过，在进行网络综合的时候，可能会遇到一些传输函数，这些传输函数使得所求得的 T 形网络中含有负电感，这时就可以使用合适的变压器来实现。

例题 13.5 求图 13.17(a)所示的线性变压器的 T 形等效电路

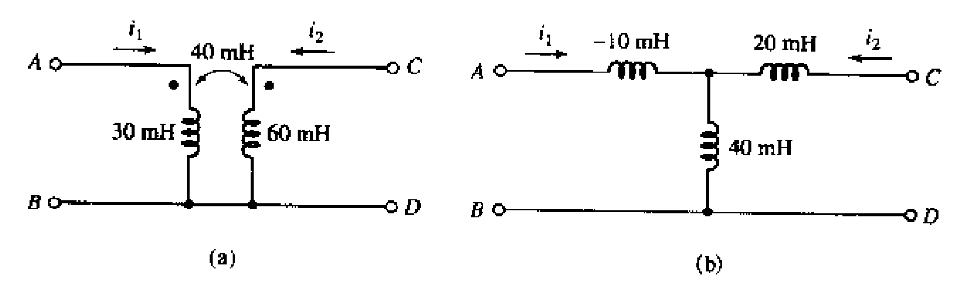


图 13.17 (a)一个线性变压器的例子；(b)该变压器的 T 形等效网络

可以看到 $L_1 = 30$ mH，$L_2 = 60$ mH，$M = 40$ mH，同时注意到图 13.15 的电路中，线圈的两个点均在上端。于是可以得到，电感 $L_1 - M = -10$ mH 处于等效电路的“左上臂”，$L_2 - M = 20$ mH 在“右上臂”，而位于中间的电感为 $M = 40$ mH。完整的 T 形等效电路如图13.17(b)所示。

为了验证这个等效电路，将图 13.17(a)中的 C 端和 D 端开路，然后在输入端输入 $v_{AB} =$

10 cos 100t V。于是：

$$i_1 = \frac{1}{30 \times 10^{-3}}\int 10\cos(100t)\,dt = 3.33 \sin 100t \text{ A}$$

以及：

$$v_{CD} = M\frac{di_1}{dt} = 40 \times 10^{-3} \times 3.33 \times 100 \cos 100t$$
$$= 13.33 \cos 100t \text{ V}$$

将同样的电压加到 T 形等效网络中，同样可以得到：

$$i_1 = \frac{1}{(-10+40)10^{-3}}\int 10\cos(100t)\,dt = 3.33 \sin 100t \text{ A}$$

C 端和 D 端的电压也等于 40 mH 电感两端的电压。因此：

$$v_{CD} = 40 \times 10^{-3} \times 3.33 \times 100 \cos 100t = 13.33 \cos 100t \text{ V}$$

可以看到，这两个网络得到的结果相同。

练习

13.6 (a)如果图 13.18 所示的两个网络互相等效，求 L_x，L_y 和 L_z 的值；(b)如果将图 13.19(b)中次级线圈的点放到下端，重做(a)。

答案： −1.5, 2.5, 3.5 H；　5.5, 9.5, −3.5 H

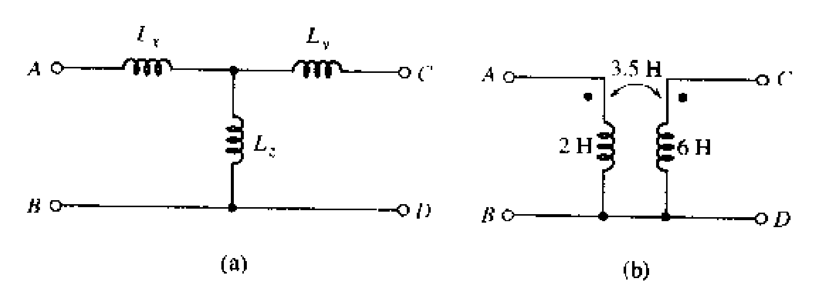


图 13.18

Π 形等效网络没有 T 形等效网络那么容易求得，而且比较复杂，用途也没有那么广。从方程(13.17)中解出 di_2/dt，然后将其代入方程(13.16)中，得：

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_2}v_2 - \frac{M^2}{L_2}\frac{di_1}{dt}$$

所以：

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{L_2}{L_1L_2 - M^2}v_1 - \frac{M}{L_1L_2 - M^2}v_2$$

如果将上式从 0 到 t 进行积分，可以得到：

$$i_1 - i_1(0)u(t) = \frac{L_2}{L_1L_2 - M^2}\int_0^t v_1\,dt - \frac{M}{L_1L_2 - M^2}\int_0^t v_2\,dt \tag{13.18}$$

采用类似的方法，同样可以得到：

$$i_2 - i_2(0)u(t) = \frac{-M}{L_1L_2 - M^2}\int_0^t v_1\,dt + \frac{L_1}{L_1L_2 - M^2}\int_0^t v_2\,dt \tag{13.19}$$

对于方程(13.18)和方程(13.19),可以将它们看成一对节点方程。为了提供合适的初始条件,必须在两个节点上放置阶跃电流。和积分相乘的各因子具有等效电感的倒数形式,因此,方程(13.18)中的第二个系数 $M/(L_1L_2-M^2)$ 为 $1/L_B$,即节点1和节点2之间的电感的倒数,Π形等效网络如图13.19所示,即:

$$L_B=\frac{L_1L_2-M^2}{M}$$

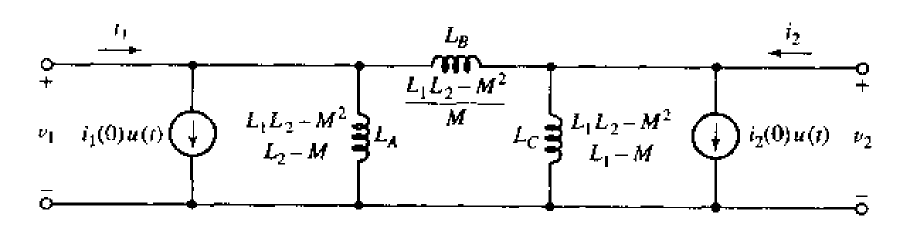


图13.19　图13.15所示变压器的Π形等效网络

方程(13.18)的第一个系数 $L_2/(L_1L_2-M^2)$ 为 $1/L_A+1/L_B$。因此:

$$\frac{1}{L_A}=\frac{L_2}{L_1L_2-M^2}-\frac{M}{L_1L_2-M^2}$$

或

$$L_A=\frac{L_1L_2-M^2}{L_2-M}$$

最后,有:

$$L_C=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1-M}$$

Π形等效网络中不存在磁耦合,且三个自感中的初始电流为零。

如果将所给的变压器的任何一个同名端颠倒过来,则只需要改变等效网络中的 M 的符号即可。和T形等效网络一样,同样可以看到Π形等效网络的自感也可以为负值。

例题 13.6　求图13.17(a)所示的变压器的Π形等效网络,假定初始电流为零

因为 $L_1L_2-M^2$ 为 L_A, L_B 和 L_C 的公因式,于是首先计算它:

$$30\times10^{-3}\times60\times10^{-3}-(40\times10^{-3})^2=2\times10^{-4}\ \text{H}^2$$

因此:

$$L_A=\frac{(L_1L_2-M^2)}{(L_2-M)}=\frac{2\times10^{-4}}{(20\times10^{-3})}=10\ \text{mH}$$

$$L_C=\frac{(L_1L_2-M^2)}{(L_1-M)}=-20\ \text{mH}$$

以及:

$$L_B=\frac{(L_1L_2-M^2)}{M}=5\ \text{mH}$$

等效网络如图13.20所示。

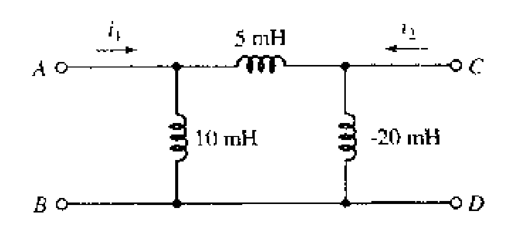


图 13.20　图 13.17(a)所示的线性变压器的Π形等效网络。假定 $i_1(0)=0, i_2(0)=0$

为了检验这个结果，同样取 $v_{AB}=10\cos 100t$ V，同时让 C 端和 D 端开路，根据分压原理，很容易求得输出电压为：

$$v_{CD}=\frac{-20\times10^{-3}}{5\times10^{-3}-20\times10^{-3}}10\cos 100t=13.33\cos 100t\ \text{V}$$

这和以前求得的结果一致。因此，图 13.20 所示的网络在电气特性上和图 13.17(a)和图(13.17b)所示的网络等效。

练习

13.7　如果图 13.21 所示的两个网络等效，求 L_A，L_B 和 L_C 的值(单位为 mH)。

答案：$L_A=169.2$ mH；$L_B=129.4$ mH；$L_C=-314.3$ mH

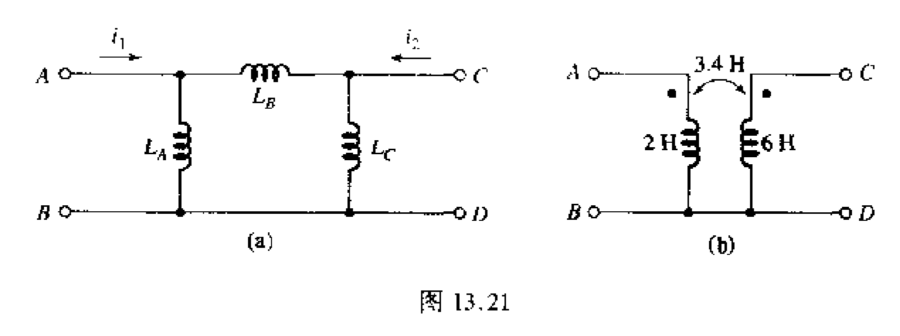


图 13.21

计算机辅助分析

对含有磁耦合电感的电路进行仿真是一项很有用的技能，特别是随着现代电路规模的不断增加，这种技能更显得重要。在现代电路设计中，当各种各样的回路或者部分回路变得非常靠近时，由于寄生磁场的影响，使得原本是相互分开的电路或者支电路不可避免地产生耦合，从而产生相互作用。使用 PSpice，可以将这种影响合并到 K_Linear 部件中，它可以将原理图中的一对电感的耦合关系用耦合系数 k 表示出来，其中 $0\leqslant k\leqslant 1$。

比如，下面来对图 13.17(a)所示的电路进行仿真，它含有两个互感系数为 $M=40$ mH 的线圈，相应的耦合系数为 $k=0.9428$，其电路原理图如图 13.22 所示，注意到电感符号旁边没有画"点"。将电感符号水平放置到原理图上的时候，默认的同名端在左端，同名端也是该符号旋转的中心，可以根据需要将电感符号绕该点移动。同时注意到 K_Linear 器件没有接到电路中，可以将其放到任何地方，而两个耦合电感 L1 和 L2 则和耦合系数一起填到该器件的对话框中(图 13.23)。

该电路与 100 rad/s(15.92 Hz)的正弦电压源相连，可以看做是交流单频扫描电路。为了让

PSpice能进行仿真而不出错，还需要在原理图中添加两个电阻。首先将一个很小的电阻插入到电压源与L1之间，为了使它的影响尽量小，取该电阻的值为1 pΩ。然后，用一个1 000 MΩ(实际上是无穷大)的电阻接到L2上。仿真的结果是输出电压的幅度为13.33 V，相角为 -3.819×10^{-8}(实际上是零)度，这和手算的结果一致。

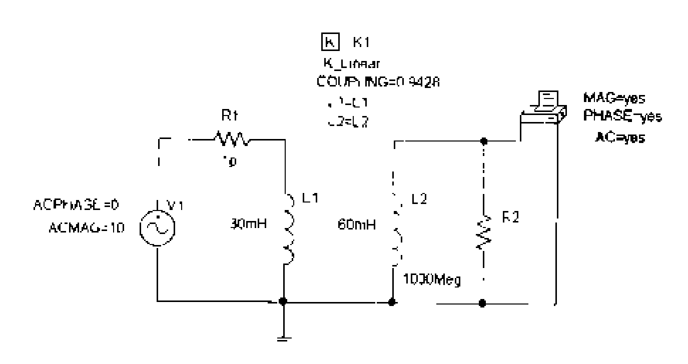


图13.22 要进行仿真的电路原理图

PSpice也提供了两种不同的变压器模型，一种是线性变压器XFRM_LINEAR，另一种是理想变压器XFRM_NONLINEAR，将在下节讨论它。线性变压器需要指明耦合系数和两个线圈的电感。理想变压器同样也需要指明耦合系数，但下面将看到，理想变压器的电感值为无穷大或者几乎为无穷大。因此，器件XFRM_NONLINEAR还需要的额外的参数是每个线圈的导线缠绕圈数。



图13.23 K_Linear对话框

13.5 理想变压器

理想变压器是紧耦合变压器非常有用的近似，紧耦合变压器的耦合系数接近1，而且，与终端阻抗相比，初级和次级电抗非常大。许多设计得好的铁心变压器，在一定的频率范围内，并且终端的阻抗也在一定的范围内时，可以很好地满足紧耦合变压器的特性。对于含有铁心变压器的电路，可以用理想变压器来替换此变压器，做这样的近似可能会大大地简化计算。可以将理想变压器看做是铁心变压器的一阶近似模型。

13.5.1 理想变压器的匝数比

为了描述理想变压器，需要引入一个新的概念：匝数比 a。线圈的自感与该线圈所缠绕的导线数目的平方成正比，不过，只有当线圈中的电流所建立的磁通穿过所有的匝时，这个关系才成立。这个关系的定量推导，需要用到磁场的概念（但在电路分析课程中不讨论它）。不过，可以通过定性的分析来推导。设电流 i 流过匝数为 N 的线圈，它产生的磁通为单匝线圈产生的磁通的 N 倍。如果将 N 匝线圈看做是重叠的，则全部磁通穿过所有的匝。当电流和磁通随时间变化时，每匝线圈上产生的电压将为单匝线圈的 N 倍。因此，N 匝线圈的总电压将为单匝线圈的 N^2 倍。这样可以得到电感与匝数平方的比例关系，可以将其描述为：

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{N_2^2}{N_1^2} = a^2 \tag{13.20}$$

或

$$a = \frac{N_2}{N_1} \tag{13.21}$$

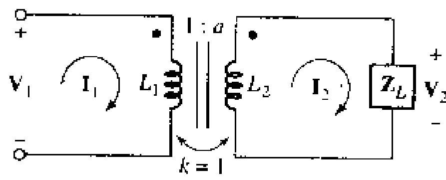


图 13.24　接有负载的理想变压器

图 13.24 画出了一个理想变压器，其次级带了一个负载。理想变压器可以用一些约定的符号来表示：用两个线圈之间垂直线表示铁心变压器上的铁心片，用 k 表示耦合系数，用符号 $1:a$ 表示匝数比 N_1 比 N_2。

为了将上面得到的结论用最简单的形式解释清楚，下面来分析正弦稳态情况。列出两个网孔方程如下：

$$\mathbf{V}_1 = j\omega L_1 \mathbf{I}_1 - j\omega M \mathbf{I}_2 \tag{13.22}$$

$$0 = -j\omega M \mathbf{I}_1 + (\mathbf{Z}_L + j\omega L_2)\mathbf{I}_2 \tag{13.23}$$

首先求理想变压器的输入阻抗。从方程(13.23)中解出 $\mathbf{I}_2$，然后将其代入方程(13.22)中，可以得到：

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 j\omega L_1 + \mathbf{I}_1 \frac{\omega^2 M^2}{\mathbf{Z}_L + j\omega L_2}$$

因此：

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\mathbf{Z}_L + j\omega L_2}$$

由于 $k = 1, M^2 = L_1 L_2$，因此：

$$\mathbf{Z}_{in} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 L_1 L_2}{\mathbf{Z}_L + j\omega L_2}$$

除了耦合系数为 1 以外，理想变压器的另一个特性是，不管工作频率为多少，其初级和次级的阻抗都非常大，这说明理想情况下 L_1 和 L_2 均趋于无穷大，不过它们的比值却必须为有限值，

由匝数比给出，即：

$$L_2 = a^2 L_1$$

因此：

$$\mathbf{Z}_{in} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 a^2 L_1^2}{\mathbf{Z}_L + j\omega a^2 L_1}$$

现在，如果令 L_1 为无穷大，则右边的两项均变成无穷大，这时其结果是不确定的。因此，首先要将这两项合并：

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{j\omega L_1 \mathbf{Z}_L - \omega^2 a^2 L_1^2 + \omega^2 a^2 L_1^2}{\mathbf{Z}_L + j\omega a^2 L_1} \tag{13.24}$$

或

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{j\omega L_1 \mathbf{Z}_L}{\mathbf{Z}_L + j\omega a^2 L_1} = \frac{\mathbf{Z}_L}{\mathbf{Z}_L / j\omega L_1 + a^2} \tag{13.25}$$

现在，令 $L_1 \to \infty$，可以看到，对于有限的 $\mathbf{Z}_L$ 值，$\mathbf{Z}_{in}$ 变为：

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{\mathbf{Z}_L}{a^2} \tag{13.26}$$

这个结果隐含了一些很有趣的东西，其中至少有一个看起来与线性变压器的某个特性相冲突。理想变压器的输入阻抗与负载阻抗成正比，比例常数为匝数比平方的倒数。换句话说，对于理想变压器，如果负载阻抗为容性，则输入阻抗也为容性；而对于线性变压器，其反射阻抗的电抗部分的符号会发生改变，容性的负载会产生感性的输入阻抗。为了解释这种情况，首先注意到 $\mathbf{Z}_L/a^2$ 不是反射阻抗，尽管通常不严格地称其为反射阻抗。理想变压器的真正反射阻抗为无穷大，否则不可能将初级电感无穷大的阻抗“抵消”掉；这一抵消作用可以从式(13.24)的分子中看出来。阻抗 $\mathbf{Z}_L/a^2$ 表示没有完全抵消，即抵消的差额。理想变压器的真正的反射阻抗的电抗部分的符号当然改变了。不过，当初级和次级电感变为无穷大时，初级线圈的无穷大电抗和次级线圈的负无穷大的反射电抗相抵消。

因此，理想变压器的最重要的特性是改变阻抗的幅度，即改变阻抗大小。一个初级为 100 匝，次级为 10 000 匝的理想变压器的匝数比为 10 000/100，即 100。从初级端口看过去，接在次级上的任何阻抗的幅度与实际的幅度比将减小 100^2 倍，即 10 000 倍。20 000 Ω 的电阻看起来变成 2 Ω，200 mH 的电感看起来变成 20 μH，100 pF 的电容看起来变成 1 μF。如果将初级和次级的绕组相互调换，则 $a = 0.01$，这时，显然负载的阻抗幅度将增大。不过，实际中的幅度变化，并不总是这么准确。必须记住，在推导的最后一步中假定了式(13.25)中的 L_1 为无穷大，这意味着 $\mathbf{Z}_L$ 与 $j\omega L_2$ 相比可以忽略不计。因为 L_2 不可能为无穷大，因此，当负载阻抗非常大时，理想变压器模型很显然将不再适用。

13.5.2 用变压器进行阻抗匹配

铁心变压器的一个实用例子是用来改变电子管音频功放与扬声器系统连接时的阻抗大小。已经知道，为了获得最大的功率传输率，负载的电阻应该等于电源的内阻。通常情况下，扬声器的阻抗幅度(通常假定为电阻)只有几欧姆，而功放的内阻通常为几千欧姆。因此，需要使用 $N_2 < N_1$ 的理想变压器进行阻抗匹配。比如，如果放大器(或信号发生器)的内阻为 4 000 Ω，而扬声器的阻抗为 8 Ω，则希望：

$$\mathbf{Z}_g = 4\,000 = \frac{\mathbf{Z}_L}{a^2} = \frac{8}{a^2}$$

求出：

$$a = \frac{1}{22.4}$$

因此：

$$\frac{N_1}{N_2} = 22.4$$

理想变压器的初级和次级电流 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$ 的关系很简单，根据方程(13.23)有：

$$\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{j\omega M}{\mathbf{Z}_L + j\omega L_2}$$

再次令 L_2 为无穷大，可以得到：

$$\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{j\omega M}{j\omega L_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

或

$$\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{1}{a} \tag{13.27}$$

因此，初级和次级的电流之比等于匝数比。如果 $N_2 > N_1$，则 $a > 1$，显然，匝数较少的线圈中流过的电流要大。换句话说：

$$N_1\mathbf{I}_1 = N_2\mathbf{I}_2$$

同时应该注意到，当其中一个电流取相反的方向或者改变其中一个线圈同名端的位置时，电流比等于匝数比的相反数。

上面所举的例子中，为了使扬声器和功放进行有效地匹配，要用理想变压来改变阻抗大小。频率的频率为1 000 Hz，均方根值(rms)为 50 mA 的初级电流在次级产生的电流的频率为 1 000 Hz，均方根值等于 1.2 A。传输到扬声器的功率为$(1.12)^2 \times (8)$，即 10 W，功放传递给变压器的功率为$(0.05)^2 \times 4\,000$，即 10 W。这个结果是令人满意的，因为这意味着理想变压器既不包含产生功率的有源元件，也不包含任何消耗功率的电阻。

13.5.3　用理想变压器进行电压调整

因为传递给理想变压器的功率等于传递给负载的功率，而初级电流和次级电流通过匝数比联系起来，因此，初级电压和次级电压也通过匝数比联系起来。如果将次级电压，或负载电压定义为：

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_L$$

将初级电压定义为 L_1 两端的电压，则：

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_{in} = \mathbf{I}_1\frac{\mathbf{Z}_L}{a^2}$$

则这两个电压的比为：

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = a^2\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1}$$

即

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1}=a=\frac{N_2}{N_1} \tag{13.28}$$

次级电压和初级电压比等于匝数比。要注意的是，上式和式(13.27)相反，这是许多同学常犯的错误。如果将其中一个电压取相反的极性或改变其中一个线圈同名端的位置，这一比值则变为负值。

从上面的推导可以看到，通过简单地改变匝数比，就可以改变交流电压的幅度为任何值。如果$a>1$，则次级电压将大于初级电压，这是一个升压变压器；如果$a<1$，则次级电压将小于初级电压，这是一个降压变压器。发电厂产生的电压范围通常在 12 kV 到 25 kV 之间，虽然这是一个非常高的电压，但是，为了减少长距离电力传输的损失，需要使用升压变压器[图 13.25(a)]将电压升高到几十万伏。变电站则使用降压变压器将此电压降到几百千伏以进行区域配电[图 13.25(b)]。为了满足日常用电需要，还要使用降压变压器(这种降压变压器通常放在住房附近)进行进一步的降压，将传输电压降到 110 伏或 220 伏，视电器的工作电压而定[图 13.25(c)]。

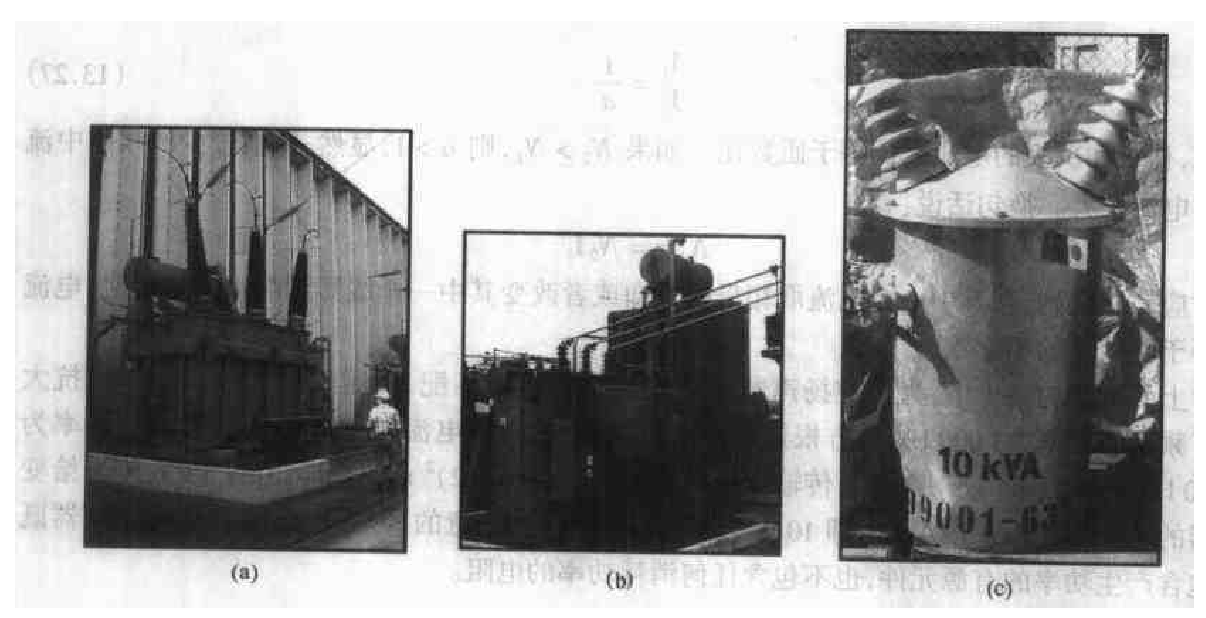


图 13.25 (a) 升压变压器，用来升高发电机产生的电压以利于输电；(b) 变电站使用的变压器，用来将220 kV的传输电压降到几百千伏以进行区域配电；(c)降压变压器，用来将配电电压降到240伏以供日常使用

将式(13.27)和式(13.28)中的电压和电流比合并，得：

$$\mathbf{V}_2\mathbf{I}_2=\mathbf{V}_1\mathbf{I}_1$$

可以看到，初级和次级伏安值相等，通常取此乘积的幅度为功率变压器的最大允许功率。如果负载的相角为θ，即：

$$\mathbf{Z}_L=|\mathbf{Z}_L|\angle\theta$$

则 $\mathbf{V}_2$ 比 $\mathbf{I}_2$ 相位超前 θ。又因为输入阻抗为 $\mathbf{Z}_L/a^2$，因此 $\mathbf{V}_1$ 也比 $\mathbf{I}_1$ 超前 θ。如果取电压和电流的均方根值，则$|\mathbf{V}_2||\mathbf{I}_2|\cos\theta$ 必然等于$|\mathbf{V}_1||\mathbf{I}_1|\cos\theta$，因此，所有的功率均传递给了负载，理想变压器没有吸收任何功率。

前面所得到的理想变压器的特性都是通过相量分析得到的，在正弦稳态的情况下它们当然是正确的，但并没有证据认为对于完全响应它们也是正确的。不过，在通常情况下，它们事实上也是适用的，其证明比上面所用的基于相量的分析方法要简单得多。前面的分析已经指出，要将一个实际的变压器看做理想变压器，需要做一定的近似，这个近似必须基于一个更加精确的模型。比如，已经知道，次级绕组的感抗幅度必须远大于它所接负载的阻抗幅度，这样，也就知道了一个变压器不再是理想变压器的条件。

例题 13.7　对于图 13.26 所示电路，求 10 kΩ 电阻所吸收的平均功率

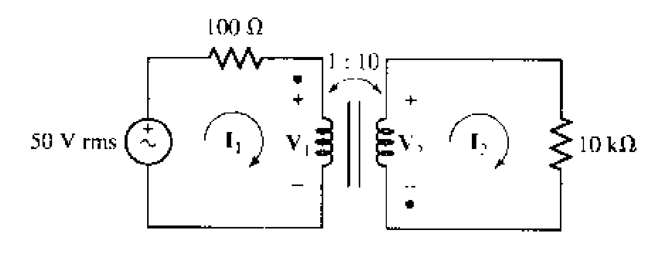


图 13.26　简单的理想变压器电路

10 kΩ 电阻所吸收的平均功率为：

$$P = 10\,000|\mathbf{I}_2|^2$$

从均方根值为 50 V 的电源"看到"的变压器的输入阻抗为 $\mathbf{Z}_L/a^2$，即 100 Ω。因此，可以得到：

$$\mathbf{I}_1 = \frac{50}{100 + 100} = 250 \text{ mA rms}$$

根据式(13.27)，$\mathbf{I}_2 = (1/a)\mathbf{I}_1 = 25$ mA rms，因此可以得到 10 kΩ 电阻所吸收的功率为 6.25 W。

练习

13.8 根据电压来计算例题 13.7 中电阻吸收的功率。

答案：6.25 W

13.5.4　时域中的电压关系

现在来求理想变压器中的时域量 v_1 和 v_2 的关系。回到图 13.15 所示的电路以及描述此电路的方程(13.16)和方程(13.17)，可以从第二个方程中解出 di_2/dt，然后将它代入第一个方程中：

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_2}v_2 - \frac{M^2}{L_2}\frac{di_1}{dt}$$

对于完全耦合的情况，$M^2 = L_1L_2$，因此：

$$v_1 = \frac{M}{L_2}v_2 = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}v_2 = \frac{1}{a}v_2$$

于是就得到了初级和次级电压在完全响应下的时域关系。

用 L_1 去除方程(13.16)的两边，很快就可以得到时域中初级电流和次级电流的关系：

$$\frac{v_1}{L_1} = \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_1}\frac{di_2}{dt} = \frac{di_1}{dt} + a\frac{di_2}{dt}$$

如果使用的是理想变压器，则 L_1 为无穷大。这里假定 v_1 不是无穷大，则：

$$\frac{di_1}{dt} = -a\frac{di_2}{dt}$$

对其进行积分，可得：

$$i_1 = -ai_2 + A$$

其中 A 为与时间无关的积分常数。因此，如果忽略两个线圈中的直流电流，只关心响应的时变分量，则：

$$i_1 = -ai_2$$

式中的负号与同名端的位置和图 13.15 中电流方向的选取有关。

在忽略直流分量的前提下，得到的时域中电流和电压关系和前面在频域中求得的结果一致。时域的结果更具一般性，但这里的推导过程不太严谨。

前面刚刚求得的理想变压器的特性可以用来化简含有理想变压器的电路。为简单起见，假定接到初级和次级端口的任何网络均用其戴维南等效电路替代。下面来看图 13.27 所示的电路，假定激励源的频率 ω 为任意值。

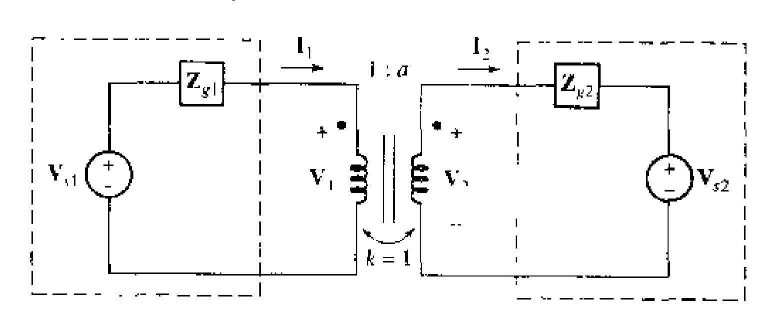


图 13.27 连接到理想变压器的初级和次级的网络均用它们的戴维南等效电路表示

13.5.5 等效电路

现在可以用戴维南定理和诺顿定理来求得不含变压器的等效电路。比如，下面来求次级端口左边的网络的戴维南等效电路。将次级开路，则 $\mathbf{I}_2 = 0$，因此 $\mathbf{I}_1 = 0$（记住 L_1 等于无穷）。$\mathbf{Z}_{g1}$ 上没有电压，因此 $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{s1}$，$\mathbf{V}_{2oc} = a\mathbf{V}_{s1}$。将 $\mathbf{V}_{s1}$ 置零并利用匝数比的平方，可以求出戴维南等效阻抗，注意，这里要使用匝数比的倒数，因为需要求的是从次级往左边看进去的戴维南等效阻抗，因此，$\mathbf{Z}_{th2} = \mathbf{Z}_{g1}a^2$（$\mathbf{Z}_{th2}$ 表示从次级往左边看进去的戴维南等效阻抗）。为了检验这个解答，下面来求次级短路电流 $\mathbf{I}_{2sc}$。当次级短路时，初级的信号源面对的阻抗为 $\mathbf{Z}_{g1}$，因此，$\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_{s1}/\mathbf{Z}_{g1}$，于是，$\mathbf{I}_{2sc} = \mathbf{V}_{s1}/a\mathbf{Z}_{g1}$。开路电压和短路电流之比等于 $a^2\mathbf{Z}_{g1}$，和预想的一致。所求的戴维南等效电路如图 13.28 所示。

将所有初级电压乘以匝数比，所有初级电流除以匝数比，再将所有初级阻抗乘以匝数比的平方，然后用它们替换掉原来的电压、电流、阻抗以及变压器，则得到不含变压器的等效电路。如果改变其中一个线圈上的同名端的位置，只需要改变上面求得的等效电路的匝数比的符号即可。

需要指出的是，只有当连接到初级和次级的网络可以用它们的戴维南等效电路表示时，才

能得到图 13.28 所示的等效电路。也就是说，连接到初级和次级的网络均必须是双端口网络。即如果将初级端口的两根线切断，则整个电路将分割为两个独立的网络，没有任何元件或者网络将初级和次级连接起来。

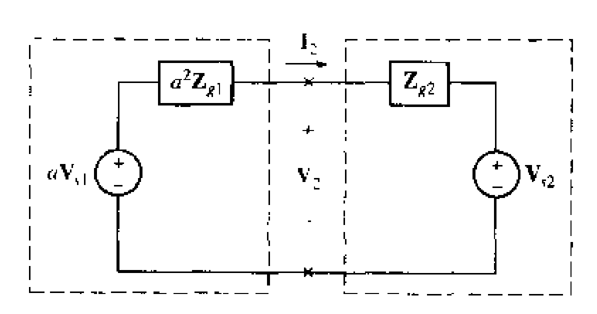


图 13.28 为了简化图 13.27 所示的电路，其次级端子左边的网络用戴维南等效电路表示

对于变压器和次级网络，采用类似的分析方法可以得到，用与上面求得的等效网络结构相同的网络替换掉接在初级端口右端的所有器件，将得到另外一种戴维南等效电路，其中每个电压为原来的电压除以 a，每个电流为原来的电流乘以 a，而每个阻抗为原来的阻抗除以 a^2。如果将其中一个绕组用相反的方向进行缠绕，则将匝数比改为 $-a$ 即可。

例题 13.8 对于图 13.29 所示电路，先求变压器和次级组成的网络的等效电路，再求变压器和初级组成的网络的等效电路

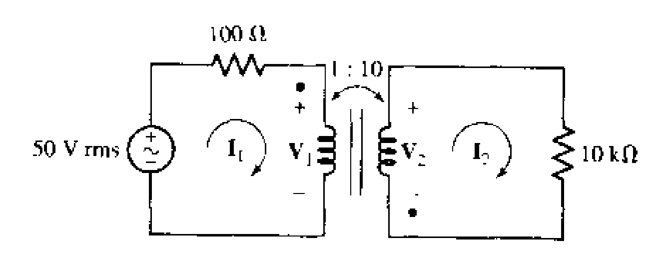


图 13.29 用理想变压器进行阻抗匹配，使阻性负载与电源阻抗相匹配

在前面的例题 13.7 中曾经分析过这个电路。和上次一样，可以求出输入阻抗为 $10\,000/(10)^2$，即 100 Ω，$|\mathbf{I}_1| = 25$ mA rms。可以计算出初级线圈上的电压为：

$$|\mathbf{V}_1| = |50 - 100\,\mathbf{I}_1| = 25 \text{ V rms}$$

因此可以求出电源输出的功率为 $(25\times10^{-3})\times(50) = 12.5$ W，其中电源内阻吸收的功率为 $(25\times10^{-3})^2\times(100) = 6.25$ W 的功率，负载吸收的功率为 12.5 − 6.25 W。这时，电源传输给负载的功率达到最大值。

如果将次级电路和理想变压器用它们的戴维南等效电路替换，则 50 V 的电源和 100 Ω 的电阻看到的只是 100 Ω 的电阻，于是可以得到简化后的电路如图 13.30(a)所示。这时，很容易求出初级电流和电压。

如果将次级端口左边的电路用其戴维南等效电路替换，可以得到（记住同名端的位置）$\mathbf{V}_{th} = -10\times(50) = -500$ V rms，$\mathbf{Z}_{th} = (-10)^2\times(100) = 10$ kΩ；所求的等效电路如图 13.30(b)所示。

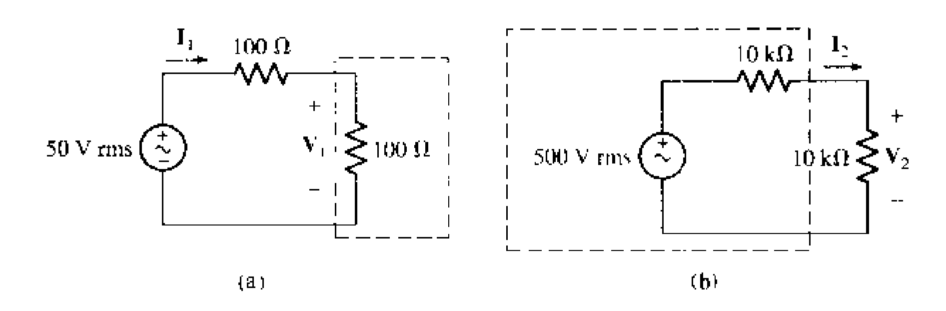


图 13.30 图 13.29 所示电路的简化电路 (a)将变压器和次级电路用它们的戴维南等效网络进行替换后的结果;(b)将变压器和初级电路用它们的戴维南等效网络进行替换后的结果

练习

13.9 设图 13.31 所示的理想变压器的 $N_1 = 1\,000$ 匝，$N_2 = 5\,000$ 匝。如果 $\mathbf{Z}_L = 500 - j400\ \Omega$，分别求出下列情况下，电源传输给 $\mathbf{Z}_L$ 的平均功率：(a) $\mathbf{I}_2 = 1.4\angle 20^\circ$ A rms；(b) $\mathbf{V}_2 = 900\angle 40^\circ$ V rms；(c) $\mathbf{V}_1 = 80\angle 100^\circ$ V rms；(d) $\mathbf{I}_1 = 6\angle 45^\circ$ A rms；(e) $\mathbf{V}_s = 200\angle 0^\circ$ V rms。

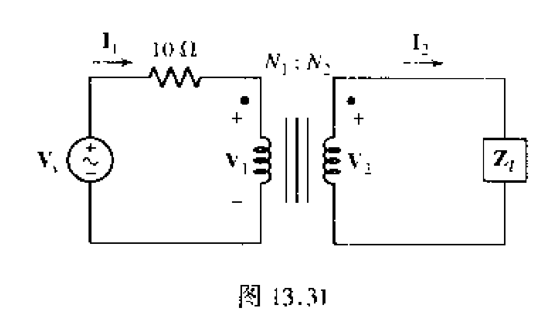


图 13.31

答案：980 W；988 W；195.1 W；720 W；692 W

实际应用

超导变压器

在前面的讨论中，忽略了变压器中可能存在的各种各样的损耗。尽管在通常情况下变压器的效率可以达到 97% 或者更高，然而，在分析大功率的变压器时，必须特别注意变压器的损耗。这么高的效率看起来似乎是理想值，但是，如果变压器中的电流达到几千安培的话，其能量损耗将是非常大的。现代变压器的设计中使用了许多减小损耗的措施，特别注意抑制那些随着温度升高而增大的损耗。比如，当电流流过线圈时，由于导线中存在电阻，其产生的损耗通常称为 i^2R 损耗，它表示导线吸收的功率随电流的平方增加，这部分功率将转化为热能。而当导线的温度升高时，电阻也随着增大，因此又会增大导线中的 i^2R 损耗。而且，高温还会降低导线的绝缘性能，从而缩短变压器的寿命。因此，许多现代电力变压器使用液体油浸的办法来消除变压器线圈中产生的热量 不过，这种办法有一些缺点，由于腐蚀或者老化的影响，

可能会导致漏油，从而产生严重的环境污染。使用易燃的油还会带来火灾隐患，并且在高压变电站进行灭火是非常危险的。

一种提高这种变压器性能的办法是用超导导线来替换普通变压器中具有电阻的导线。超导体是这样一种材料，它在高温的时候具有电阻，但是当达到某个临界温度时，其电阻突然消失。对绝大部分材料，其临界温度只比绝对零度高几度，所以需要用非常昂贵的液态氦来进行冷却。不过，在 20 世纪 80 年代人们发现了高温超导陶瓷，这些材料需要的临界温度高达 90 K 甚至更高，这样，就可以用液态氮低温系统来替代基于液态氦的低温设备，前者要比后者容易制造得多，也更加容易使用。图 13.32 画出了一个超导变压器的原型，它由 ABB 公司制造并于 1997 年 3 月，并在瑞士日内瓦电力网中投入使用。

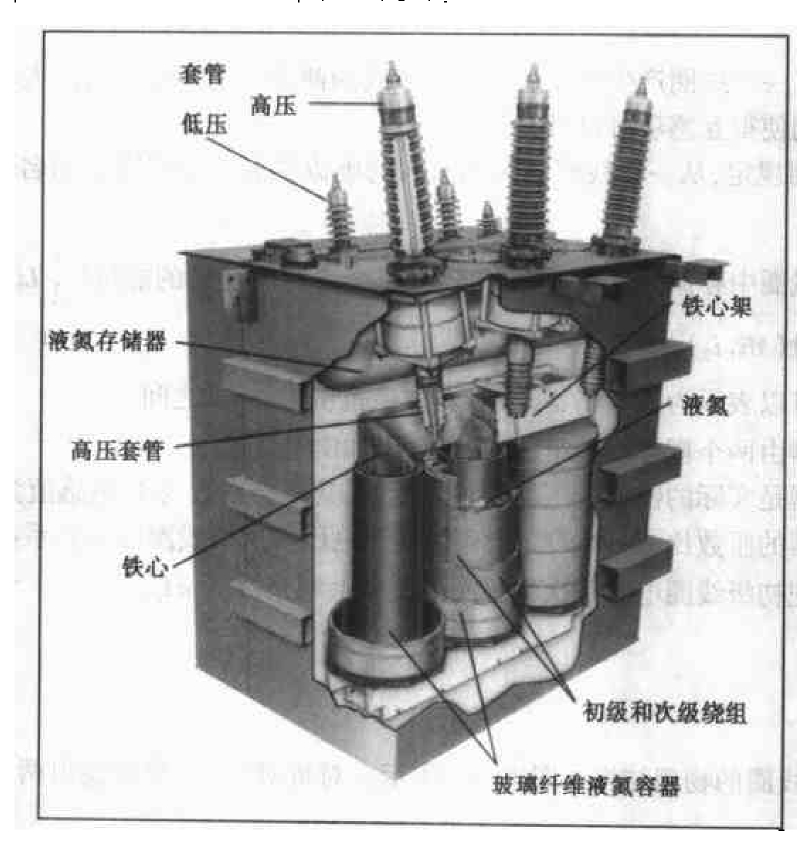


图 13.32　ABB 公司制造的 630 kVA 超导变压器，该变压器设计成将 18.7 kV 的电压转换为 420 V

用超导导线替代含有电阻的导线来制造变压器有许多优点。首先，对于相同额定功率的变压器，其体积大小只有原来的 1/3。第二，用液氮取代油来做冷冻剂减少了火灾隐患，因为液氮蒸发时变成氮气，而氮气是大气的主要成分，它不会对环境产生危害，它的泄漏不存在污染地下水的隐患。第三，这也许是最重要的一点，它消除了线圈中电阻的损耗，大大地提高了变压器的效率，从而可以降低发电设备的功率，节省费用。

不过，任何一种设计都有它不利的一面，必须权衡利弊。目前最大的困难在于制造几千米长的超导导线的价格要比制造铜导线成本相对高得多。因为这些超导材料（如铋锶钙铜氧化物，钇钡铜氧化物等等）非常脆，最大电流密度（峰值电流除以导线的截面积）与晶体的材料有关，加工长的导线非常困难。而且通常把这种导线制造在银管中，当冷却系统出现故障的时

候,银管构成了一条电流通路(只要银管内部的导线为超导,则没有电流流过银管,在液氮的温度下,银管仍然是阻性的)。银的使用增加了导线的成本,而铜的成本虽然低一些,但它却会和超导材料氧化物发生反应,因此使用铜并不是一个好的选择。综上所述,长期来看(许多变压器工作寿命超过30年),使用超导变压器的效用高,可以节省开支,但其初期投入要比普通变压器高得多。目前,许多工厂(包括电厂)主要是基于短期成本考虑,而不太愿意为了长期的成本收益而投入大量资金。

13.6 小结与复习

- 互感描述了一个线圈产生的磁场在另一个线圈两端产生感应电压的大小。
- 同名端规则使得互感项可以带符号。
- 同名端规则规定,从一个线圈同名端流入的电流在另一个线圈的同名端产生正的开路电压。
- 一对耦合线圈中存储的总能量含有三项:每个自感所存储的能量($\frac{1}{2}Li^2$)以及存储在互感中的能量(Mi_1i_2)。
- 耦合系数可以表示为 $k = M/\sqrt{L_1L_2}$,其取值范围为0~1之间。
- 线性变压器由两个耦合线圈组成:初级绕组和次级绕组。
- 理想变压器是实际的铁心变压器的很好近似,其耦合系数为1,电感值为无穷大。
- 理想变压器的匝数比 $a = N_2/N_1$ 把初级线圈电压和次级线圈电压联系起来:$\mathbf{V}_2 = a\mathbf{V}_1$。
- 匝数比也把初级线圈电流和次级线圈电流联系起来:$\mathbf{I}_1 = a\mathbf{I}_2$。

习题

1. 三对耦合线圈的物理结构如图13.33所示。对每对线圈,分别说出两种可能放置同名端的方式。

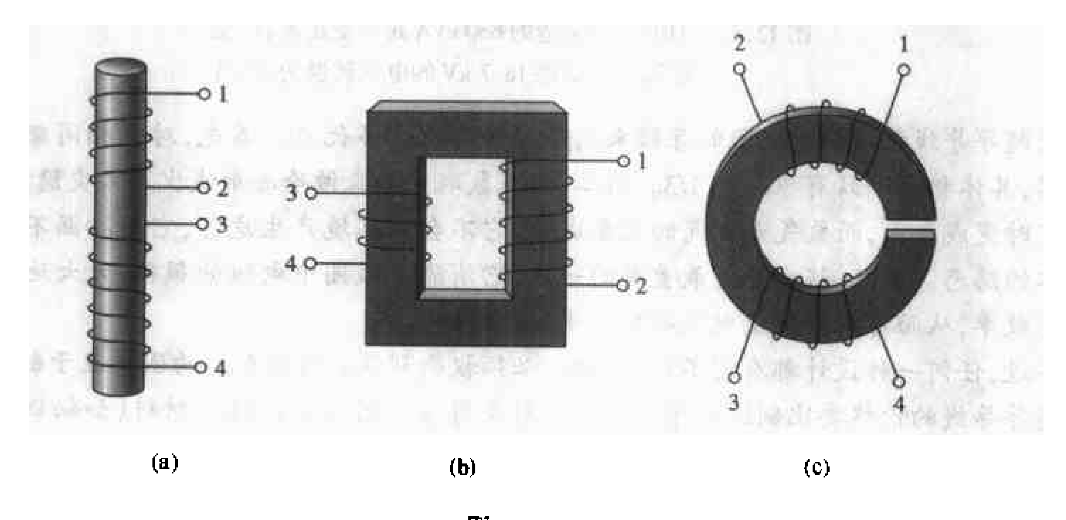


图 14.33

2. 如图 13.34 所示电路，设 $i_{s1}(t) = 4t$ A，$i_{s2}(t) = 10t$ A。求(a)v_{AG}；(b)v_{CG}；(c)v_{BC}。

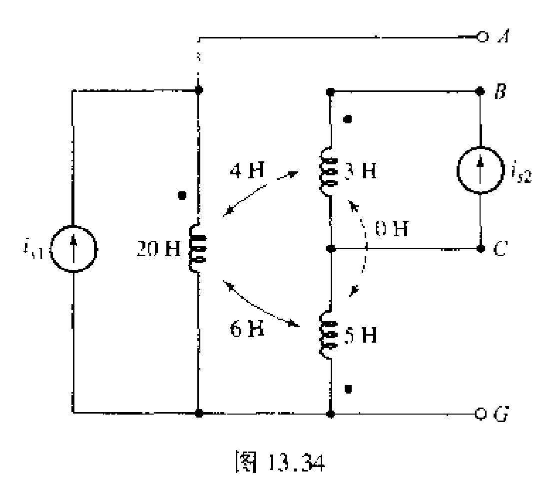


图 13.34

3. 对于图 13.35 所示电路，求下列器件吸收的功率：(a)电源；(b)每个电阻；(c)每个电感；(d)互感。

4. 如图 13.36 所示电路，设 $f = 50$ Hz，求电流 $i_1(t)$，$i_2(t)$ 和 $i_3(t)$。

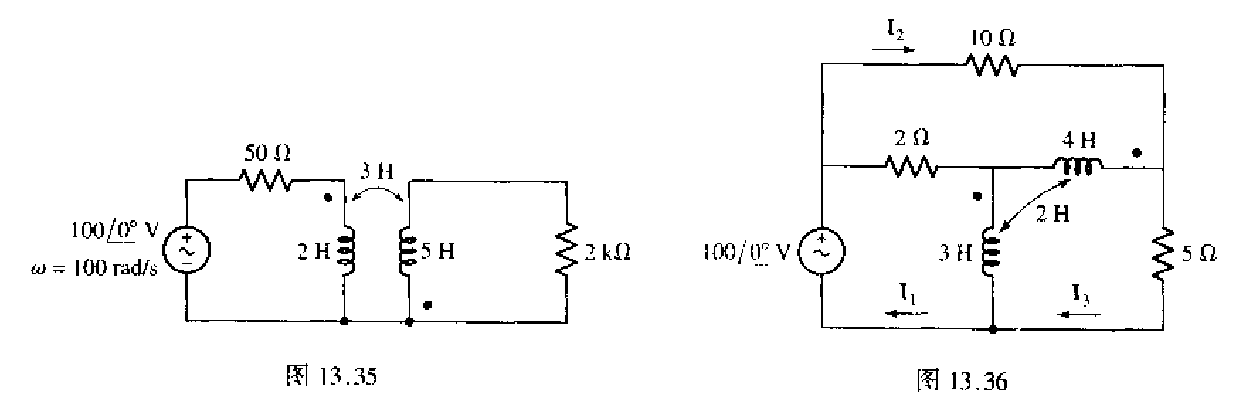


图 13.35　　图 13.36

5. (a)求习题 3 电路中从 2 kΩ 电阻看进去的戴维南等效电路；(b)当 $\mathbf{Z}_L$ 取最佳值(而不是 2 kΩ)时，它可以从网络吸收的最大平均功率为多少？

6. (a)对于图 13.37(a)所示的网络，列出两个方程，将 $v_A(t)$ 和 $v_B(t)$ 表示为 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ 的函数；(b)对于图 13.37(b)所示网络，列出两个方程，将 $\mathbf{V}_1(j\omega)$ 和 $\mathbf{V}_2(j\omega)$ 表示为 $\mathbf{I}_A(j\omega)$ 和 $\mathbf{I}_B(j\omega)$ 的函数。

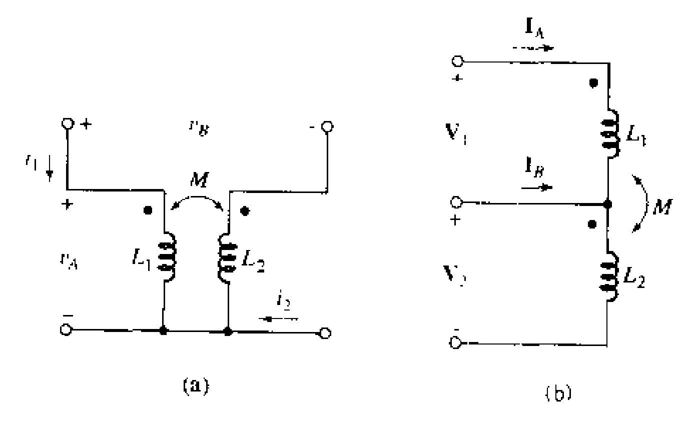


图 13.37

7. 对于图 13.38 所示电路,求出 $t>0$ 时 $i_C(t)$的表达式,设 $v_s(t) = 10t^2u(t)/(t^2+0.01)$ V。

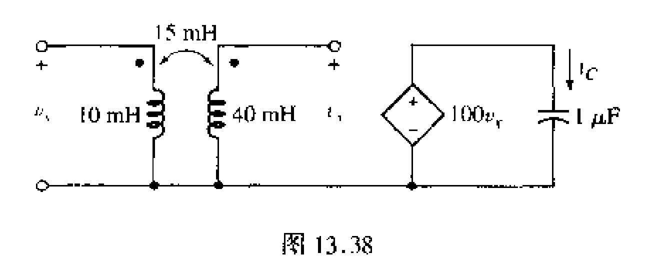


图 13.38

8. 分别求出图 13.39 所示的各网络中 $v(t)$的值,设 $f=50$ Hz。

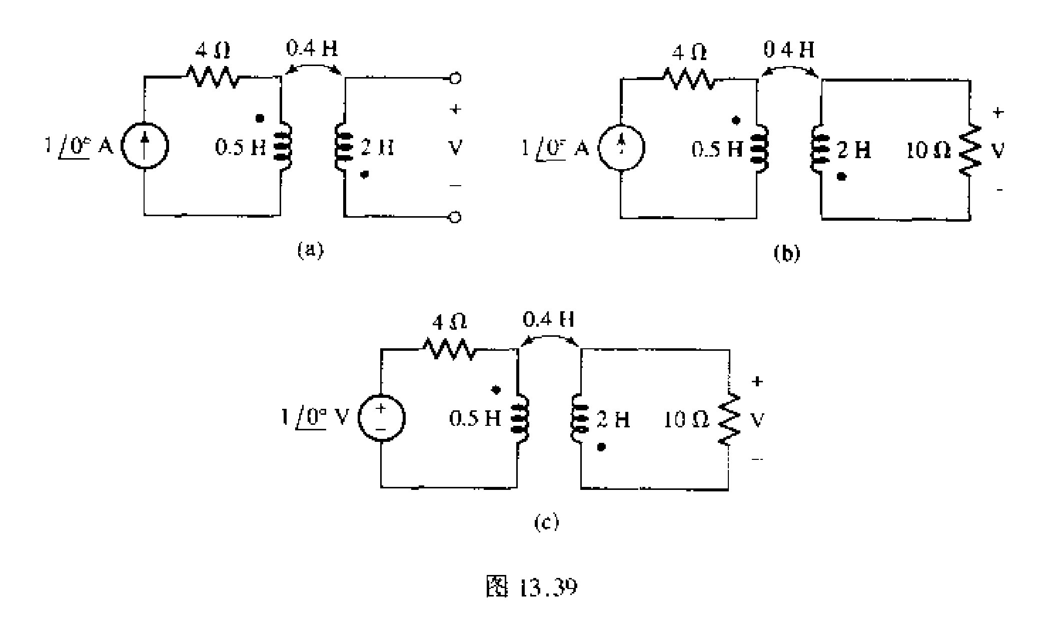


图 13.39

9. 注意图 13.40 中 5 H 电感和 6 H 电感之间没有相互耦合。(a)列出含有 $\mathbf{I}_1(j\omega)$, $\mathbf{I}_2(j\omega)$ 和 $\mathbf{I}_3(j\omega)$的方程组;(b)设 $\omega=2$ rad/s,求 $\mathbf{I}_3(j\omega)$。

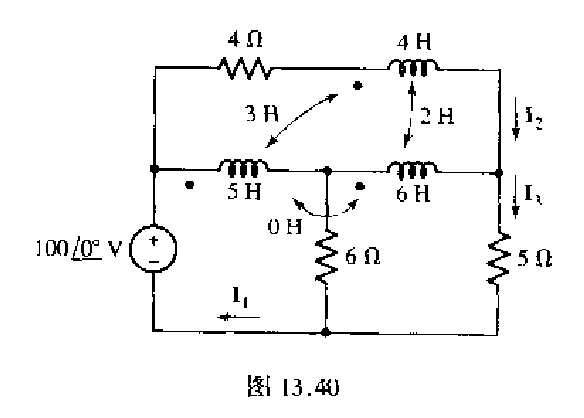


图 13.40

10. 对于图 13.41 所示各电路,分别求出 $\mathbf{V}_1(j\omega)$和 $\mathbf{V}_2(j\omega)$以 $\mathbf{I}_1(j\omega)$和 $\mathbf{I}_2(j\omega)$的表示形式。

11. (a)求图 13.42 所示网络的 $\mathbf{Z}_{in}(j\omega)$;(b)画出 $\mathbf{Z}_{in}$在频率区间 $0\leqslant\omega\leqslant 1\,000$ rad/s 的曲线;(c)求当 $\omega=50$ rad/s 时,$\mathbf{Z}_{in}(j\omega)$的值。

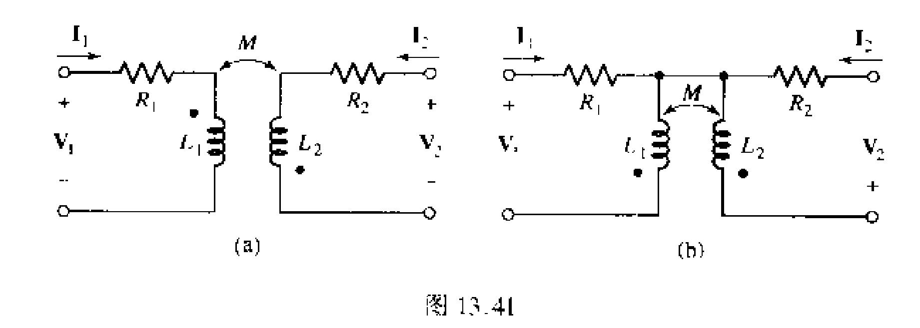


图 13.41

12. 参看图 13.43 所示电路，在音频频率 160 Hz 下，当 M 取何值时，传输给 8 Ω 低音扬声器的平均功率恰为 3.2 W?

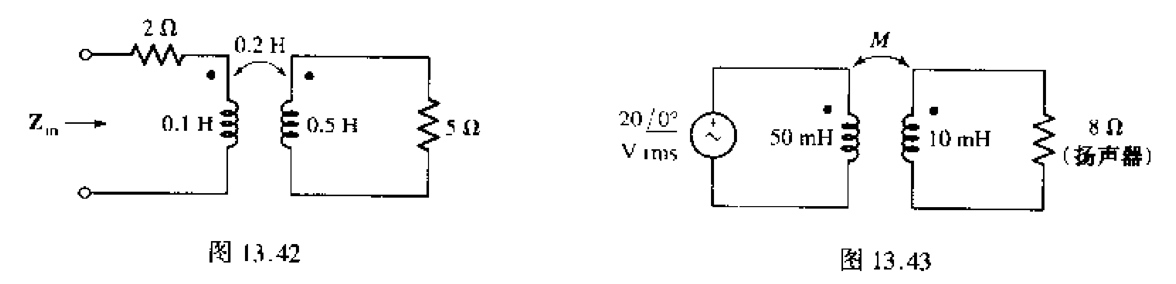


图 13.42　　图 13.43

13. 如图 13.44 所示电路，设 $i_{s1} = 2\cos 10t$ A，$i_{s2} = 1.2\cos 10t$ A。求(a) $v_1(t)$；(b) $v_2(t)$；(c)每个电源提供的平均功率。

14. 采用某种方法，可以使得线圈 A 和线圈 B 之间存在互感，线圈 B 和线圈 C 之间存在互感，但线圈 A 和线圈 C 之间不存在互感，这种电路如图 13.45 所示，求 $v(t)$。

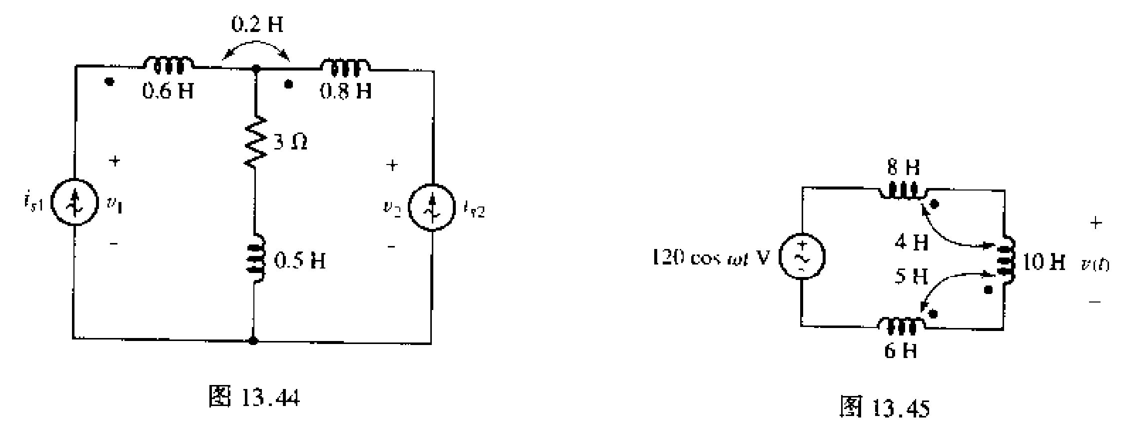


图 13.44　　图 13.45

15. 求图 13.46 所示电路中 $\mathbf{I}_L$ 的值。

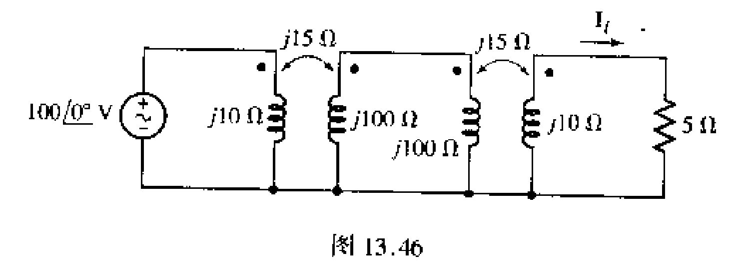


图 13.46

16. 对于图 13.47 所示电路，设 $i_s = 2\cos 10t$ A。求 $t = 0$ 时，下列情况下系统存储的总能

量：(a) ab 开路；(b) ab 短路。

17. 如图 13.47 所示的线性变压器，设 $\mathbf{V}_s = 12\angle 0°$ V rms，$\omega = 100$ rad/s，求提供给 24 Ω 的电阻的平均功率，用关于 k 的函数表示。

18. 两个耦合线圈的电感分别为 $L_1 = 2\ \mu\text{H}$，$L_2 = 80\ \mu\text{H}$，$k = 1$，L_2 的两端接了一个负载 $\mathbf{Z}_L = 2 + j10\ \Omega$。求 $\omega = 250$ krad/s 时，从 L_1 两端看进去的输入阻抗 $\mathbf{Z}_{in}$。

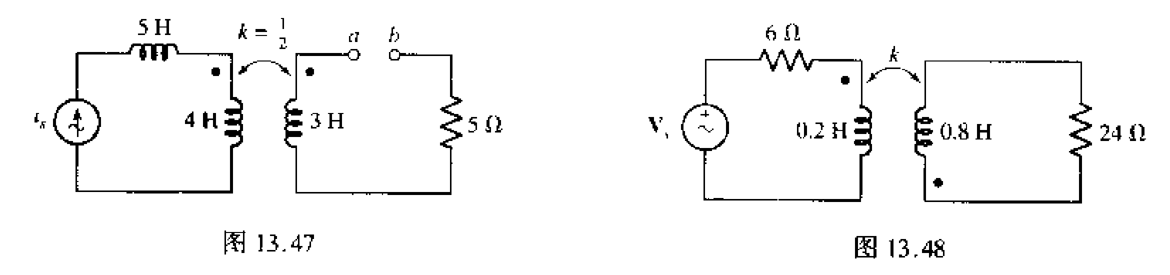


图 13.47　　图 13.48

19. 如图 13.49 所示电路，设 $\omega = 100$ rad/s，求 (a) 传递给 10 Ω 负载的平均功率；(b) 传递给 20 Ω 负载的平均功率；(c) 电源输出的平均功率。

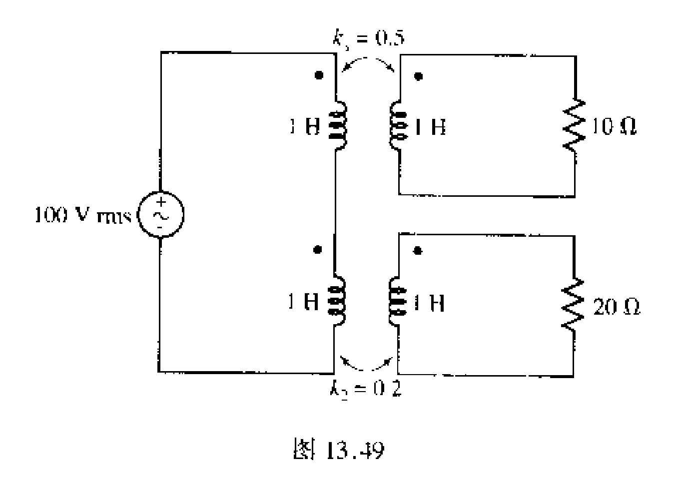


图 13.49

20. 如图 13.50 所示的耦合线圈，设 $i_1(t) = 4e^{-t/10}$ A，$i_3(t) = 5e^{-t/5}$ A。求 (a) M；(b) $i_2(t)$；(c) $t = 0$ 时系统存储的总能量。

21. 如图 13.51 所示电路，设 $\omega = 1\,000$ rad/s，分别求出下列情况下 $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_s$ 的值：(a) $L_1 = 1$ mH，$L_2 = 25$ mH，$k = 1$；(b) $L_1 = 1$ H，$L_2 = 25$ H，$k = 0.99$；(c) $L_1 = 1$ H，$L_2 = 25$ H，$k = 1$。

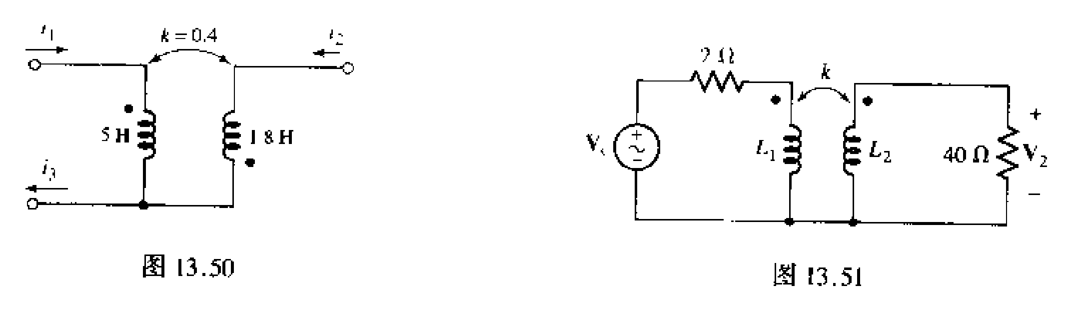


图 13.50　　图 13.51

22. (a) 对于图 13.52 所示的耦合电感电路，测得下列短路或开路时的值为：$L_{AB,CD,oc} = 10$ mH，$L_{CD,AB,oc} = 5$ mH，$L_{AB,CD,sc} = 8$ mH，求 k；(b) 假定两个线圈的同名端分别在 A 端和 D 端，$i_1 = 5$ A，为了使系统存储的能量为 100 mJ，那么 i_2 应取何值？

23. 如图 13.53 所示电路，$f = 60$ Hz。以 k 为变量表示 $\mathbf{V}_2$ 并画出 $|\mathbf{V}_2|$ 随着 k 变化的曲线。

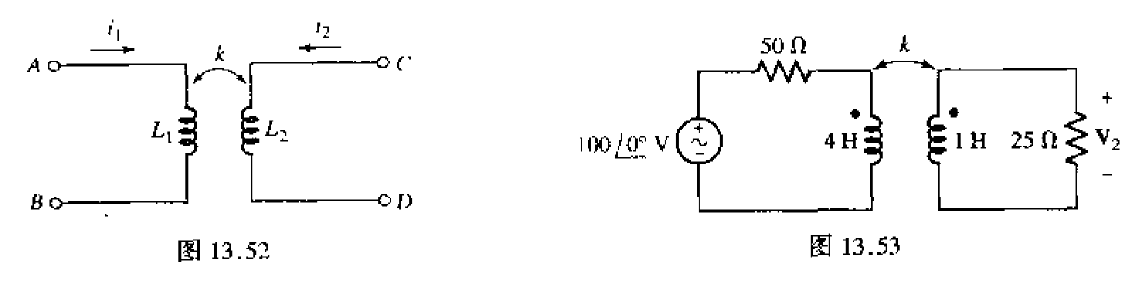


图 13.52　　图 13.53

24. 设图 13.54 所示网络中 $i_1 = 2\cos 500t$，求该网络所存储的能量的最大值。

25. 分别求出下列情况下，在图 13.55 所示网络中从端子 1 和端子 2 看过去的等效电感：(a)A，B，C 互不连接；(b)A 与 B 相连；(c)B 与 C 相连；(d)A 与 C 相连。

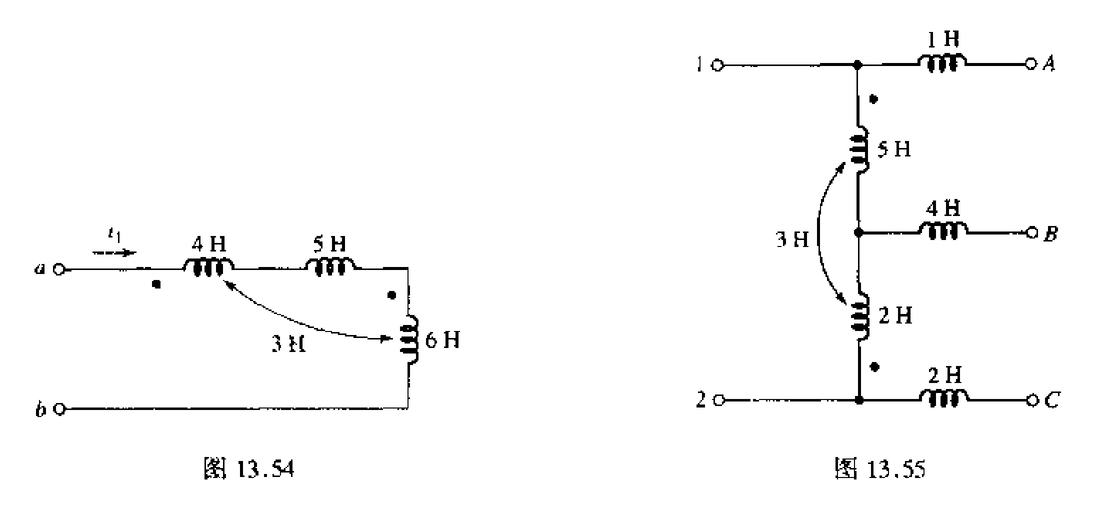


图 13.54　　图 13.55

26. 参看图 13.56 所示电路，(a)使用 T 形等效电路求 $\mathbf{I}_L(j\omega)/\mathbf{V}_s(j\omega)$；(b)令 $v_s(t) = 100u(t)$ V，求 $i_L(t)$[提示：列出该电路的两个微分方程以帮助求出 $t = 0^+$ 时 di_L/d_t 的值]。

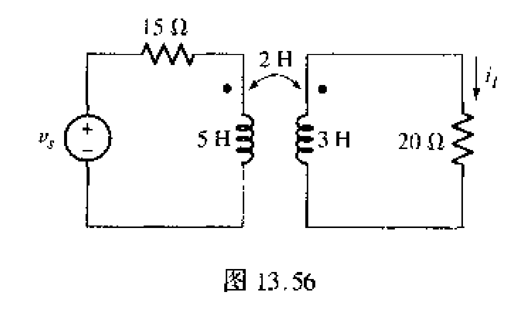


图 13.56

27. 某无损耗线性变压器的参数分别为 $L_1 = 4$ mH，$L_2 = 18$ mH，$M = 8$ mH，分别求出两种不同同名端的放置方式下的 T 形等效电路。使用所求出的 T 形等效电路，分别求出下列情况下的等效输入电感：(a)次级开路；(b)次级短路；(c)次级与初级并联。

28. 求图 13.57 所示电路的 $\mathbf{H}(j\omega) = \mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$

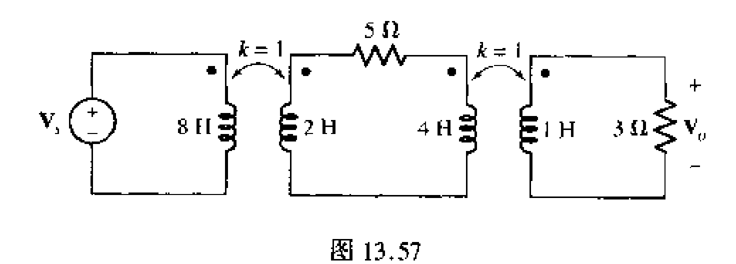


图 13.57

29. 使用T形等效电路求图13.58所示网络的输入阻抗 $\mathbf{Z}(j\omega)$。

30. 设图13.59所示电路中，$\mathbf{V}_s = 100\angle 0°$ V，$\omega = 100$ rad/s 求下列网络的戴维南等效电路：(a) ab 端右边的网络；(b) cd 端左边的网络。

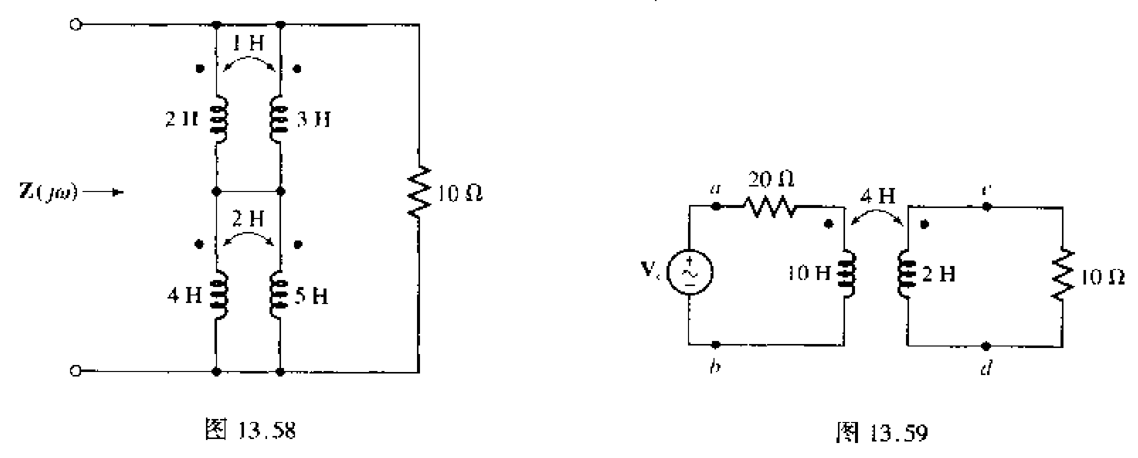


图 13.58 图 13.59

31. 负载 $\mathbf{Z}_L$ 接在一个线性变压器的次级上，该变压器的参数为 $L_1 = 1$ H，$L_2 = 4$ H，耦合系数为1。设 $\omega = 1\,000$ rad/s，如果 $\mathbf{Z}_L$ 分别为下列元件：(a) 100 Ω 电阻；(b) 0.1 H 电感；(c) 10 μF 电容，求从输入端看过去的等效串联网络（R、L 和 C 值）。

32. 某线性变压器的参数为 $L_1 = 6$ H，$L_2 = 12$ H，$M = 5$ H 分别求出由组成变压器的这两个电感所能构成的8种双端网络（单个电感，串联和并联，变压器短路，不同同名端的放置方式）的8种不同的 L_{in}。画出每种可能的网络并求出相应的 L_{in}。

33. 对于图13.60所示网络，设 $\mathbf{Z}_L$ 为100 μF的电感，其阻抗为 $-j31.83$ Ω。计算当 k 等于下列值时 $\mathbf{Z}_{in}$ 的值：(a) 0；(b) 0.5；(c) 0.9；(d) 1。用PSpice进行仿真，验证你的解答。

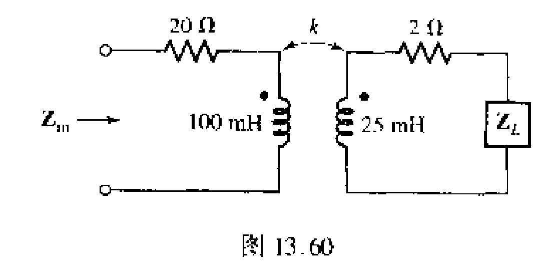


图 13.60

34. 如果将习题30中的 L_1 增加到125 H，L_2 增加到20 H，并增加 M 使 $k = 1$，重做习题30。用PSpice进行仿真，验证你的解答。

35. 分别求出图13.61中传递给4个电阻的平均功率。用PSpice进行仿真，验证你的解答。

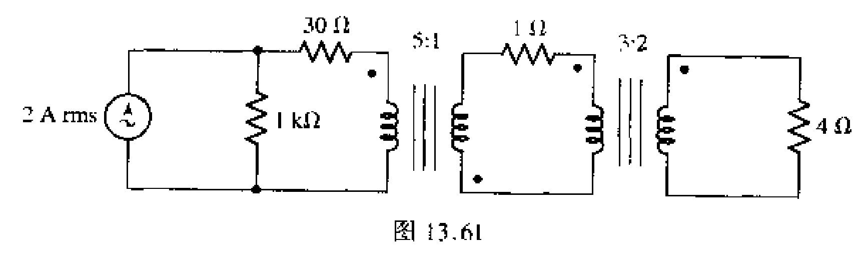


图 13.61

36. (a) 如图13.62所示电路，可以传输给 R_L 的最大平均功率是多少？(b) 设 $R_L = 100$ Ω，

在初级和次级的上端之间接一个 40 Ω 的电阻。求 P_L

37. 如图 13.63 所示电路，当 c 分别等于下列值时：(a)0；(b)0.04 S；(c) −0.04 S，传输给 8 Ω负载的平均功率。

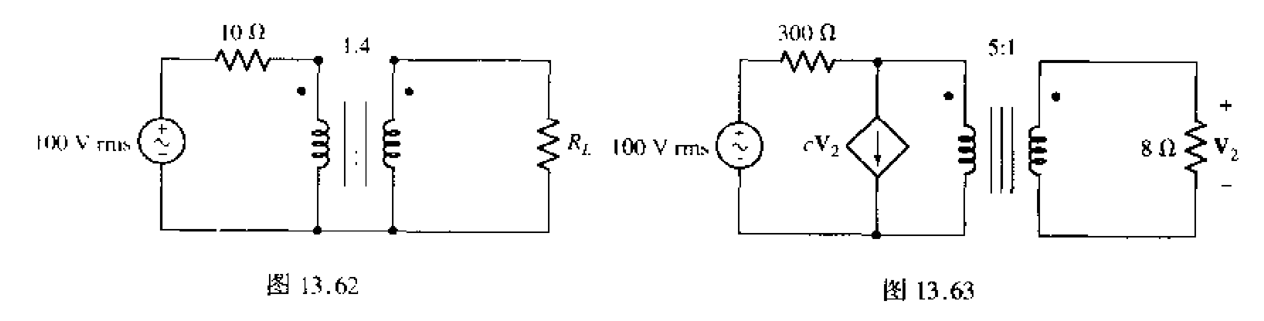


图 13.62　　图 13.63

38. 求图 13.64 所示网络从 ab 端看过去的戴维南等效电路。

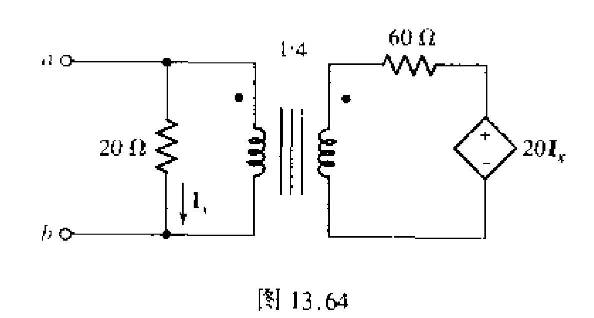


图 13.64

39. 如图 13.65 所示电路，选取合适的 a 和 b 的值，使得理想电压源提供的功率为 1 000 W，并且其中有一半传递给了 100 Ω 的负载。

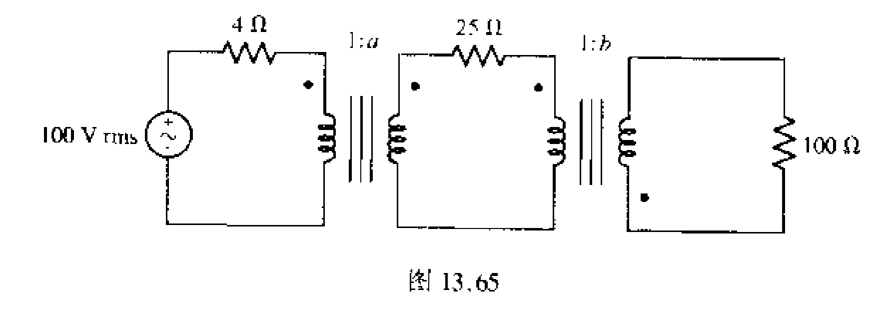


图 13.65

40. 如图 13.66 所示电路，求(a)$\mathbf{I}_1$；(b)$\mathbf{I}_2$；(c)$\mathbf{I}_3$；(d)$P_{25\Omega}$；(e)$P_{2\Omega}$；(f)$P_{3\Omega}$。

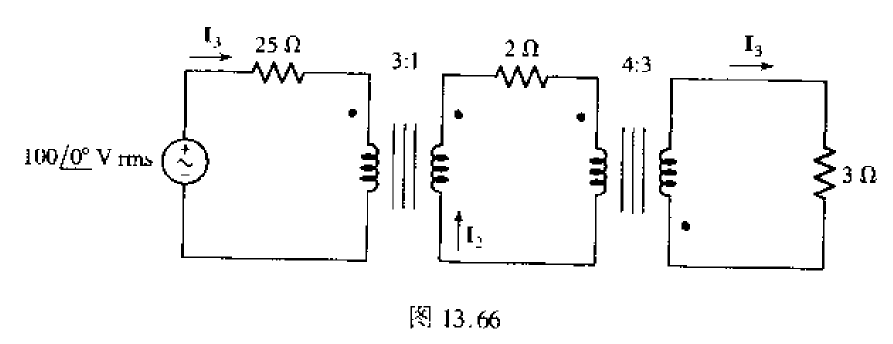


图 13.66

41. 求图 13.67 所示电路中的 $\mathbf{V}_2$。

42. 分别求出图 13.68 所示电路中各电阻吸收的功率。

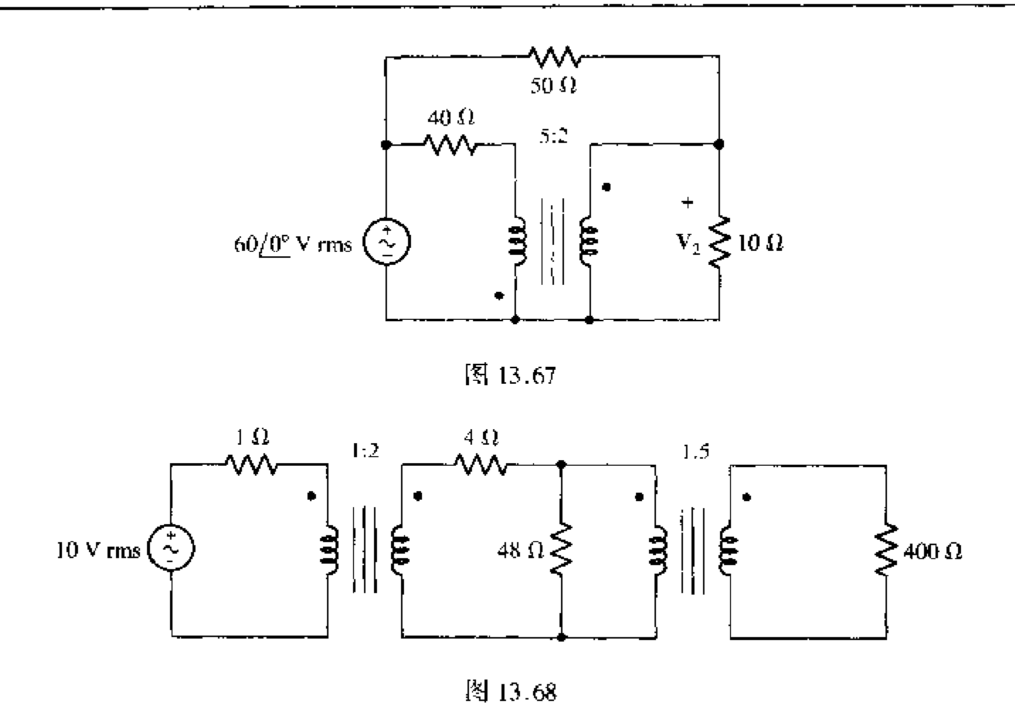


图 13.67

图 13.68

43. 求图 13.69 所示电路的 $\mathbf{I}_x$。

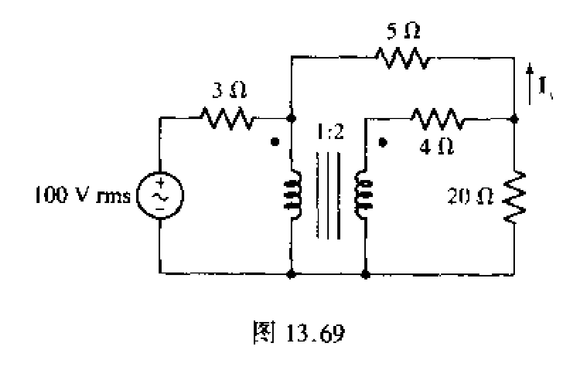


图 13.69

44. (a) 如图 13.70 所示电路，分别求出传输给每个 10 Ω电阻的平均功率；(b)将 A 和 B 相连，再将 C 和 D 相连，重做(a)。

45. 说明如何用两个理想变压器来进行这样的阻抗匹配：信号发生器的输出阻抗为4 + j0 kΩ，负载由一个 8 W 和一个 10 W 的扬声器组成，并且 8 W 的扬声器所吸收的平均功率为 10 W 的扬声器所吸收的平均功率的两倍。画出相应的电路图，并确定所需的匝数比。

46. 某变压器的铭牌上标有 2 300/230 V，25 kVA，表示其初级和次级的工作电压分别为 2 300 V 和 230 V rms，次级绕组可以输出的功率为 25 kVA。如果给该变压器提供的电压为 2 300 V，当功率因数(PF)为 1 时，其次级所接的负载需要的功率为

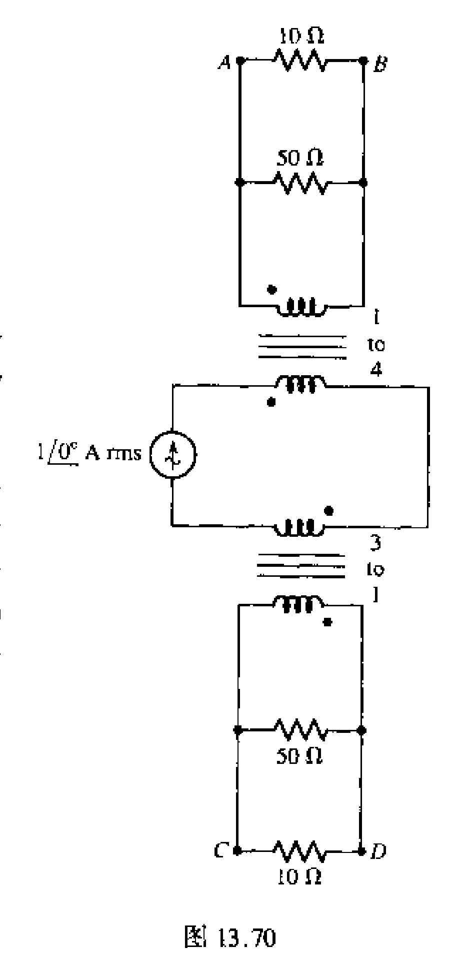


图 13.70

8 kW；当 PF 为 0.8 时，负载需要的功率为 15 kVA。(a)初级电流是多少？(b)当 PF 等于 0.95 时，该变压器还能提供给负载多少千瓦的功率？(c)用 PSpice 验证你的解答。

47. 深夜，电视台正在播放一则关于某种设备的广告，这种设备可以测量你的 IQ(智商)值，其售价为 19.95 美元。你一时冲动，拿起电话订了一台这种设备，4～6 周后，你收到了货。说明书上说，在标有 R_H 的拨号盘上输入身高(厘米)，在标有 R_M 的拨号盘上输入体重(千克)，然后在标有 R_A 的拨号盘上输入年龄(岁)。看到显示器上显示的数字后，你生气地把该设备往墙上扔去，这时其后盖掉了下来，其原理图因此暴露了出来，如图 13.71 所示。要注意的是，身高、体重和岁数均与电阻的阻值(欧姆)相对应，瓦特表所测得的功率(单位为 mW)即为 IQ。(a)采用这个设备来测量，你的室友的 IQ 将是多少？(b)采用此设备测得的 IQ 最高的人有什么特点？(c)你损失了多少钱？

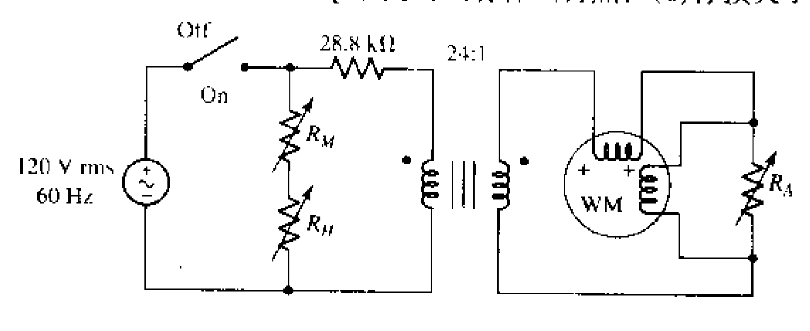


图 13.71

48. 你所在的公司派你从加州的弗雷斯诺(Fresno，California)出发到德国的罗斯托克(Rostock，Germany)，用 6 周的时间去建立一个半导体制造工厂。其中，弗雷斯诺的市电电压为 120 V rms，频率为 60 Hz，而罗斯托克的市电电压为 240 V rms，频率为 50 Hz。不过，如果你有一个电压适配器的话，你的便携式计算机均可以在这两种不同的市电下工作。然而，你的外挂式 CD 刻录机只能在 120 V 交流电下工作。假定刻录机可以在 50 Hz 下工作，设计一个电路使 CD 刻录机可以在德国使用(如果只针对在 60 Hz 下工作而设计的变压器，则与那些针对在 50 Hz 下工作而设计的变压器相比，其铁心的重量通常比较轻，如果让它在 50 Hz 下工作很可能会过热。不过，许多变压器都标有 50/60Hz 的工作频率，即可以在这两种频率下工作)。

49. 作为你从事新工作的第一项任务，要求设计一个电路，使工作于美国的氦低温压缩机也可以工作于澳大利亚。该低温压缩机含有一个三相电动机，当线电压为 208 V 时，每相的电流为 10 A rms。澳大利亚只能提供 400 V rms 的三相交流电。设计出此电路。

50. 图 13.72 所示的网络的一个特性是它只允许正的 $v(t)$ 通过该网络到达输出端，负的 $v(t)$ 将使得 $v_o(t)=0$。(a)如果输入电压为 115 V rms，希望输出电压的峰值为 5 V，设计出一个合理的电路，画出你所设计的电路的输出；(b)修改你电路，使得输出更"平滑"一些(即"波动"较小)。

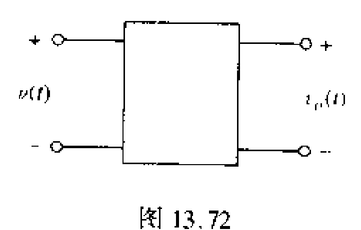


图 13.72

第 14 章　复频率和拉普拉斯变换

本章要点：

- 理解复频率的概念
- 掌握拉普拉斯变换的方法
- 学会使用拉普拉斯逆变换求时域表达式
- 使用 MATLAB 来计算多项式和求有理分式的留数
- 学会使用初值理论和终值理论

14.1 引言

现在开始学习电路分析的第四个主要部分，即讨论复频率的概念。下面将看到，这是一个非常好的概念，它可以把前面所学的分析方法有机地统一起来。采用复频率的概念进行电路分析后，前面所学过的阻性电路分析、正弦稳态分析、瞬态分析、受迫响应、完全响应和受指数函数激励的电路分析以及受指数衰减的正弦函数激励的电路分析等，都将成为这种一般电路分析方法的特例。

14.2 复频率

为了引入“复频率”的概念，考虑一个指数衰减的正弦函数，比如电压：

$$v(t) = V_m e^{\sigma t}\cos(\omega t + \theta) \tag{14.1}$$

其中 σ 为实数，通常情况下它是负值。虽然通常将这个函数指定为“衰减”，但是也存在正弦振荡幅度增长的情况，当 $\sigma > 0$ 时产生这种情况，不过更为实用的是衰减函数。此外，对 *RLC* 电路自由响应的分析也表明指数衰减系数 σ 为负值。

对于式(14.1)，令 $\sigma = \omega = 0$，可以得到一个常数电压：

$$v(t) = V_m \cos\theta = V_0 \tag{14.2}$$

如果只是令 σ 为 0，那么可以得到一个普通的正弦电压：

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) \tag{14.3}$$

如果 $\omega = 0$，则可以得到指数电压：

$$v(t) = V_m \cos\theta e^{\sigma t} = V_0 e^{\sigma t} \tag{14.4}$$

因此，式(14.1)中的衰减正弦函数包含三种特例，它们分别是式(14.2)的直流、式(14.3)的正弦函数和式(14.4)的指数函数。

将式(14.4)中的指数函数和下面的相位为 0 的正弦函数相比较：

$$v(t) = V_0 e^{j\omega t} \tag{14.5}$$

可以进一步看到 σ 的重要性。很显然，式(14.4)和式(14.5)中这两个函数有许多共同之处，惟

一不同的是式(14.4)的指数因子是实数而式(14.5)是虚数。如果将 σ 称为"频率",则更加突出了它们之间的相似性。下面几节中将会对这个术语进行详细讨论,暂时只需要知道 σ 称为复频率的实部,但是不能称之为"实频率",因为这个术语更适合于 f(或者不严谨地用于称呼 ω)。有时也称 σ 为奈培频率(neper frequency),这一名称源于以 e 为底的指数幂的无量纲单位。例如,给定 e^{7t},则 $7t$ 的量纲为奈培(Np),而 7 为奈培频率,单位为奈培/秒。

"奈培"这个单位是以苏格兰哲学和数学家约翰·奈培(1550～1617)及其奈培算法系统而命名的。历史上对他的名字的拼写不是很确定。

14.2.1　一般形式

对于形如式(14.1)的一般形式的激励函数,使用与基于相量的分析方法几乎完全一样的方法,可以很容易求得网络的受迫响应。可以看到,一旦求出了该衰减正弦函数的受迫响应,就相当于求出了直流电压、指数电压、正弦电压的受迫响应。下面来看为什么可以将 σ 和 ω 看做复频率的实部和虚部。

首先给出纯代数形式的复频率定义,随着本章的展开,将逐渐地对其做出物理解释。注意到任何可以写成下述形式的函数:

$$f(t) = \mathbf{K}e^{\mathbf{s}t} \tag{14.6}$$

都可由复频率 $\mathbf{s}$ 表征,其中 $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{s}$ 是复常数(与时间无关)。因此,复频率 $\mathbf{s}$ 只是复指数表示式中与时间 t 相乘的因子而已。对于一个给定的函数,只要先将其写成式(14.6)的形式,通过观察就可以直接确定其复频率。

14.2.2　直流的情况

首先将这个定义应用于较为熟悉的激励函数,比如常数电压:

$$v(t) = V_0$$

可以将它写为下列形式:

$$v(t) = V_0 e^{(0)t}$$

因此,可以得出结论:直流电压或电流的复频率为 0(即 $\mathbf{s} = 0$)。

14.2.3　指数的情况

另一种简单的情况是指数函数:

$$v(t) = V_0 e^{\sigma t}$$

它已经是所需要的形式了,因此,其复频率为 σ(即 $\mathbf{s} = \sigma + j0$)。

14.2.4　正弦的情况

现在来考虑正弦电压,它让人感到有些惊讶。给定:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

希望求出它的用复频率表示的等效表达式。根据以前的经验,使用欧拉公式:

$$\cos(\omega t + \theta) = \frac{1}{2}[e^{j(\omega t+\theta)} + e^{-j(\omega t+\theta)}]$$

于是:

$$v(t)=\frac{1}{2}V_m[e^{j(\omega t+\theta)}+e^{-j(\omega t+\theta)}]$$
$$=\left(\frac{1}{2}V_m e^{j\theta}\right)e^{j\omega t}+\left(\frac{1}{2}V_m e^{-j\theta}\right)e^{-j\omega t}$$

或

$$v(t)=\mathbf{K}_1 e^{\mathbf{s}_1 t}+\mathbf{K}_2 e^{\mathbf{s}_2 t}$$

得到的是两个复指数函数的和，因此存在两个复频率。其中第一项的复频率为 $\mathbf{s}=\mathbf{s}_1=j\omega$，第二项的复频率为 $\mathbf{s}=\mathbf{s}_2=-j\omega$。这两个 $\mathbf{s}$ 互为共轭，即 $\mathbf{s}_2=\mathbf{s}_1^*$；两个 $\mathbf{K}$ 也互为共轭：$\mathbf{K}_1=\frac{1}{2}V_m e^{j\theta}$，$\mathbf{K}_2=\mathbf{K}_1^*=\frac{1}{2}V_m e^{-j\theta}$。因此，第一项和第二项互为共轭，其实早就可以预料到这一点，因为它们的和 $v(t)$ 必须是实数。

通过把所有出现的“j”均替换为“$-j$”，可以得到任何复数的复共轭，这是因为已经选取 $j=+\sqrt{-1}$，其实，也可以取负根，由此可以得到复共轭的定义。

14.2.5 指数衰减正弦的情况

最后来求指数衰减的正弦函数[式(14.1)]的复频率。使用欧拉公式，同样可以得到下面的复指数表达式：

$$v(t)=V_m e^{\sigma t}\cos(\omega t+\theta)$$
$$=\frac{1}{2}V_m e^{\sigma t}[e^{j(\omega t+\theta)}+e^{-j(\omega t+\theta)}]$$

因此：

$$v(t)=\frac{1}{2}V_m e^{j\theta}e^{j(\sigma+j\omega)t}+\frac{1}{2}V_m e^{-j\theta}e^{j(\sigma-j\omega)t}$$

可以看到，为了表示指数衰减的正弦函数，同样也需要一对共轭复频率，$\mathbf{s}_1=\sigma+j\omega$，$\mathbf{s}_2=\mathbf{s}_1^*=\sigma-j\omega$。通常情况下，$\sigma$ 和 ω 均不为 0，也就是说，指数变化的正弦波形是一般情况，而常数、正弦和指数的波形是特殊情况。

14.2.6 s 的物理意义

$\mathbf{s}$ 为正实数时，例如 $\mathbf{s}=5+j0$，表示一个指数增长的函数 $\mathbf{K}e^{+5t}$，对于物理可实现的函数，$\mathbf{K}$ 必须为实数。$\mathbf{s}$ 为负实数时，例如 $\mathbf{s}=-5+j0$，表示一个指数衰减的函数 $\mathbf{K}e^{-5t}$。

当 $\mathbf{s}$ 为纯虚数时，例如 $j10$，则无论如何都不能表示一个实数，其函数形式为 $\mathbf{K}e^{j10t}$，还可以表示为 $\mathbf{K}(\cos 10t+j\sin 10t)$，很显然它包含实部和虚部，每一个都是正弦的形式。为了构造一个实函数，有必要考虑一下 $\mathbf{s}$ 的共轭，比如 $\mathbf{s}_{1,2}=\pm j10$，相应的 $\mathbf{K}$ 也必须是共轭的。不过，不那么严格地说，可以将 $\mathbf{s}_1=+j10$ 或者 $\mathbf{s}_2=-j10$ 看做是角频率为 10 rad/s 的正弦电压。正弦电压的幅度和相位与每个频率的 $\mathbf{K}$ 的选择有关，因此，如果取 $\mathbf{s}_1=j10$，$\mathbf{K}_1=6-j8$，有：

$$v(t)=\mathbf{K}_1 e^{\mathbf{s}_1 t}+\mathbf{K}_2 e^{\mathbf{s}_2 t}\quad \mathbf{s}_2=\mathbf{s}_1^*\quad 和\quad \mathbf{K}_2=\mathbf{K}_1^*$$

于是得到了实的正弦曲线 $20\cos(10t-53.1°)$。

类似地，$\mathbf{s}$ 取一般值时，比如 $3-j5$，只有与其共轭 $3+j5$ 一起，才能表示实函数。同样，不那么严格地说，这对共轭频率表示了一个指数增长的正弦函数 $e^{3t}\cos 5t$，其幅度和相位也与 $\mathbf{K}$

的选择有关。

到目前为止，应该已经对复频率 s 的物理意义有所了解，通常情况下，它表示一个指数变化的正弦波。s 的实部与指数变化的特性有关，如果实部为负数，则随着 t 的增加函数值减小；如果它为正数，则函数增加；如果它等于 0，则正弦函数的幅度为常数。s 的实部的绝对值越大，指数增长或衰减的速度就越大。s 的虚部表示正弦波的变化情况，它实际上就是角频率。s 的虚部越大，则函数随时间的变化率越大。

当 s 的实部和虚部的幅度很大时，即 s 的幅度很大时，表示一个快速变化的函数。

通常用字母 σ 表示 s 的实部，用 ω（不是 $j\omega$）表示虚部：

$$\mathbf{s} = \sigma + j\omega \tag{14.7}$$

角频率有时也称为“实频率”，不过，如果这么称呼的话，后面将发现，必须说“实频率为复频率的虚部！”这很容易引起混淆。在需要将它们区别开来的时候，称 s 为复频率，σ 为奈培频率，ω 为角频率，$f=\omega/2\pi$ 为周期频率，当不会产生混淆时，可以将这四个量统称为“频率”。奈培频率的单位为奈培/秒，角频率的单位为弧度/秒，复频率的单位分为两部分，分别为复奈培/秒和复弧度/秒。

练习

14.1　求出下列实的时域函数的复频率：

(a) $(2e^{-100t}+e^{-200t})\sin 2\,000t$；(b) $(2-e^{-10t})\cos(4t+\phi)$；(c) $e^{-10t}\cos 10t\sin 40t$。

14.2　用实常数 A,B,C 和 ϕ 等构造一个表示电流的实的时域函数，使之含有以下频率成分：(a) $0, 10, -10\ \text{s}^{-1}$；(b) $-5, j8, -5-j8\ \text{s}^{-1}$；(c) $-20, 20, -20+j20, 20-j20\ \text{s}^{-1}$。

答案：14.1：$-100+j2\,000,\ -100-j2\,000,\ -200+j2\,000,\ -200-j2\,000\ \text{s}^{-1}$；$j4,\ -j4,\ -10+j4,\ -10-j4\ \text{s}^{-1}$；$-10+j30,\ -10-j30,\ -10+j50,\ -10-j50\ \text{s}^{-1}$；

14.2：$A+Be^{10t}+Ce^{-10t}$；$Ae^{-5t}+B\cos(8t+\phi_1)+Ce^{-5t}\cos(8t+\phi_2)$；$Ae^{-20t}+Be^{20t}+Ce^{-20t}\cos(20t+\phi_1)+De^{20t}\cos(20t+\phi_2)$

14.3　衰减的正弦激励函数

前面已经花了足够的时间定义并介绍了复频率的物理意义，现在应该开始使用它了，下面看看它有什么用处以及如何使用它，以便逐渐熟悉它。

指数变化的正弦曲线的一般形式可以用下面的电压函数来表示：

$$v(t) = V_m e^{\sigma t}\cos(\omega t+\theta) \tag{14.8}$$

和以前一样，可以用欧拉公式将其写成用复频率表示的形式：

$$v(t) = \text{Re}\{V_m e^{\sigma t} e^{j(\omega t+\theta)}\} \tag{14.9}$$

或

$$v(t) = \text{Re}\{V_m e^{\sigma t} e^{j(-\omega t-\theta)}\} \tag{14.10}$$

这两个表达式都是正确的，从中可以看到，一对共轭复频率表示了一个正弦曲线或者一个指数衰减的正弦曲线。式(14.9)更直接地表示了式(14.8)给出的衰减正弦曲线，因此主要考虑这

种形式。提取公因子，并用 s 替换下式中的 $\sigma + j\omega$：

$$v(t) = \mathrm{Re}\{V_m e^{j\theta} e^{(\sigma+j\omega)t}\}$$

得：

$$v(t) = \mathrm{Re}\{V_m e^{j\theta} e^{st}\} \tag{14.11}$$

在将这种形式的激励函数作用于电路之前，应该注意到最后这种衰减正弦曲线的表达式与第 10 章中所学的不衰减的正弦曲线的表达式：

$$\mathrm{Re}\{V_m e^{j\theta} e^{j\omega t}\}$$

有相似性，惟一的差别在于现在用的是 s 而以前用的是 $j\omega$。现在不局限于正弦激励函数和它们的角频率，而是扩展到在某个复频率下衰减的正弦激励函数。本节的后面，将导出指数衰减正弦曲线的频域表达式，使用的方法与推导正弦曲线频域的表达式相同。简单地忽略掉符号 Re{}，并简记为 e^{st}。

现在将式(14.8)，式(14.9)、式(14.10)或式(14.11)中给出的指数衰减正弦函数表达式作用于一个网络中，要求出其受迫响应(这可能是网络的某个支路电流)。因为受迫响应与激励函数的形式相同，也与其积分和导数的形式相同，因此可以假定响应为：

$$i(t) = I_m e^{\sigma t}\cos(\omega t + \phi)$$

或

$$i(t) = \mathrm{Re}\{I_m e^{j\phi} e^{st}\}$$

其中，激励源和响应的复频率必须相同。

现在，如果想起复激励函数实部产生的响应实部，而复激励函数的虚部产生的响应虚部，则网络的激励函数仍然是复数，这样，可以得到一个复响应，其实部即为所求的实响应。事实上，可以不使用符号 Re{}，但应该知道，可以在任何需要的时候都将它加进去。因此，给定实激励函数：

$$v(t) = \mathrm{Re}\{V_m e^{j\theta} e^{st}\}$$

用其对应的复激励函数 $V_m e^{j\theta} e^{st}$ 表示，相应的受迫响应 $I_m e^{j\phi} e^{st}$ 也是复数，其实部必然是所求时域的受迫响应：

$$i(t) = \mathrm{Re}\{I_m e^{j\phi} e^{st}\}$$

这里需要求出未知幅度 I_m 和未知相位 ϕ。

在进行详细计算之前，有必要将这种基本方法概括一下，下面可以看到这个过程与在正弦分析中使用的步骤有许多相似之处：

- 首先，用回路或节点的积分微分方程组来描述电路。
- 将给定的激励函数和假设的受迫响应(均为复数形式)代入方程中，然后求解积分微分方程。
- 这样，所有的方程中将包含因子 e^{st}，然后用 e^{st} 去除整个方程，或者说“消去 e^{st}”。需要注意的是，如果要求出响应函数的时域形式，必须重新将它加入表达式中。

没有了符号 Re{} 和因子 e^{st}，也就是说已经将所有的电压和电流从时域变换到了频率，积分微分方程也就变成了代数方程，因此求解它们也就变得和正弦稳态的情形一样容易。下面用一个数值例子来说明这种基本方法。

例题 14.1 将激励函数作用于图 14.1 所示的串联 *RLC* 网络，求出受迫响应的时域表达式 $i(t)=I_m e^{-2t}\cos(4t+\phi)$ 中 I_m 和 ϕ 的值

图 14.1 串联 *RLC* 电路，接入衰减的激励函数，求 $i(t)$ 的频域解

首先将激励函数用符号 Re{ }表示为：

$$v(t)=60e^{-2t}\cos(4t+10°)=\mathrm{Re}\{60e^{-2t}e^{j(4t+10°)}\}$$
$$=\mathrm{Re}\{60e^{j10°}e^{(-2+j4)t}\}$$

或

$$v(t)=\mathrm{Re}\{\mathbf{V}e^{\mathbf{s}t}\}$$

其中：

$$\mathbf{V}=60\underline{/10°} \quad 和 \quad \mathbf{s}=-2+j4$$

除去符号 Re{ }，得到复激励函数：

$$60\underline{/10°}e^{\mathbf{s}t}$$

采用类似的方法，将未知响应表示为复数量 $\mathbf{I}e^{\mathbf{s}t}$，其中 $\mathbf{I}=I_m\underline{/\phi}$。

下一步，列出该电路的积分微分方程。根据基尔霍夫电压定律，有：

$$v(t)=Ri+L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int i dt=2i+3\frac{di}{dt}+10\int i dt$$

将给定的复激励函数和假设的未知受迫响应代入这个方程，得：

$$60\underline{/10°}e^{\mathbf{s}t}=2\mathbf{I}e^{\mathbf{s}t}+3\mathbf{s}\mathbf{I}e^{\mathbf{s}t}+\frac{10}{\mathbf{s}}\mathbf{I}e^{\mathbf{s}t}$$

两边除以公因子，得：

$$60\underline{/10°}=2\mathbf{I}+3\mathbf{s}\mathbf{I}+\frac{10}{\mathbf{s}}\mathbf{I}$$

因此：

$$\mathbf{I}=\frac{60\underline{/10°}}{2+3\mathbf{s}+10/\mathbf{s}}$$

现在令 $\mathbf{s}=-2+j4$，然后从这个复电流中求出 $\mathbf{I}$，得：

$$\mathbf{I}=\frac{60\underline{/10°}}{2+3\times(-2+j4)+10/(-2+j4)}$$

整理得：

$$\mathbf{I}=5.37\underline{/-106.6°}$$

因此，$I_m=5.37$ A，$\phi=-106.6°$，受迫响应为：

$$i(t)=5.37e^{-2t}\cos(4t-106.6°)\ \mathrm{A}$$

这样，通过将基于微积分的表达式转化为代数表达式求出问题的解，可以看到这种方法的有效性，这种方法将在后面进一步学习。

练习

14.3 求出与下列时域电流等效的相量表示法：(a)$24\sin(90t+60°)$ A；(b)$24e^{-10t}\cos(90t+60°)$ A；(c)$24e^{-10t}\cos 60°\times\cos 90t$ A。如果 $\mathbf{V}=12\,\underline{/35°}$ V，求当 $\mathbf{s}$ 等于下列值时 $v(t)$ 的表达式：(d)0；(e)$-20\ \mathrm{s}^{-1}$；(f)$-20+j5\ \mathrm{s}^{-1}$。

答案：$24\,\underline{/-30°}$ A；$24\,\underline{/60°}$ A；$12\,\underline{/0°}$ A；9.83 V；$9.83e^{-20t}$ V；$12e^{-20t}\cos(5t+35°)$ V

14.4 拉普拉斯变换的定义

通常情况下，电路分析的目的之一是，在线性电路的某点给定某个激励函数，求另外一个点的受迫响应。在开始的几章，主要讨论了直流激励函数，其响应形式为 V_0e^0。不过，在介绍了电感和电容之后，已经知道，对于简单 RL 和 RC 电路，突然加载直流激励将产生随时间按指数关系变化的响应：$V_0e^{\sigma t}$；对于 RLC 电路，响应的形式则为指数衰减的正弦曲线：$V_0e^{\sigma t}\cos(\omega t+\theta)$。所有的这些计算都是在时域中进行的，而且只考虑了直流激励函数的情形。

开始用到正弦激励函数以后，由于求解微积分方程繁琐而且复杂，因此需要找一个较简单的解决问题的方法。相量变换正是这样一种方法，可以通过考虑形式为 $V_0e^{j\theta}e^{j\omega t}$ 的复激励函数来得到它。一旦意识到并不需要含有 t 的因子，则只剩下相量 $V_0e^{j\theta}$，这时，就转入了频域。

然后考虑形式为 $V_0e^{j\theta}e^{(\sigma+j\omega)t}$ 激励函数，可以引入复频率 $\mathbf{s}=\sigma+j\omega$，以前所学的各种激励函数的形式均成了它的特殊情况：直流($\mathbf{s}=0$)，指数($\mathbf{s}=\sigma$)，正弦($\mathbf{s}=j\omega$)，指数衰减的正弦($\mathbf{s}=\sigma+j\omega$)。通过将它与前面讨论的相量对比，可以看到这时可以忽略包含 t 的因子，这样又在频率中进行分析来得到问题的解。

14.4.1 双边拉普拉斯变换

已经知道，正弦激励函数导致正弦响应，而指数激励函数则导致指数响应。然而，作为一个工程师，在工作中将碰到许多既不是正弦也不是指数的波形，比如方波、锯齿波以及任意时刻的脉冲。当这些激励函数作用于一个线性电路时，得到的响应波形既不像激励函数的形式，也不是指数形式。此时不能除去含有 t 的项，也就没法得到频域响应。这非常令人遗憾，因为事实证明在频域中进行分析比在时域中要容易得多。

不过，有一种解决方法，可以用它来将任意函数波形展开成为指数波形相加的形式，其中每一项均有其各自的复频率。对于线性电路，已知总的响应可以通过将各指数波形的响应叠加起来得到。而且，在处理每个指数波形时，同样可以忽略含有 t 的项，这样就可以在频域中进行分析。遗憾的是，为了精确地表示一般形式的时域函数，需要无穷多个指数项的叠加，因此，如果硬要采用这种方法进行分解，然后将这些指数项叠加则显得有点愚蠢。实际上，可以采用积分的办法将这些项叠加起来，这样将得到一个频域函数。

下面使用一种称为拉普拉斯变换的方法来描述这种方法。对于一般函数 $f(t)$，其拉普拉斯变换定义为：

$$\mathbf{F}(\mathbf{s})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\mathbf{s}t}f(t)\,dt \tag{14.12}$$

推导这个积分需要掌握傅里叶级数和傅里叶变换的知识，在后面的章节中将介绍它们。不过，经过对复频率概念的讨论，对处理相量以及进行时域和频率互相变换也有了经验。有了这些基础，就可以理解拉普拉斯变换所蕴含的基本概念。事实上，那正是拉普拉斯变换所做的工作：它将一般形式的时域函数 $f(t)$ 变换为相应的频域函数 $\mathbf{F}(\mathbf{s})$。

14.4.2 双边拉普拉斯逆变换

式(14.12)定义了 $f(t)$ 的双边拉普拉斯变换。"双边"这个词用来强调这么一个事实，即正的 t 值和负的 t 值均包含在积分范围中。相反的变换，通常称为拉普拉斯逆变换，也用积分形式来定义[①]：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} e^{st}\mathbf{F}(\mathbf{s})\,d\mathbf{s} \tag{14.13}$$

s 将实常数 σ_0 包含在积分限中是为了保证积分收敛。式(14.13)和式(14.14)这两个等式构成了双边拉普拉斯变换对。幸运的是，在学习电路分析时，从来不会用到复杂的式(14.13)，下面将会学到一种快速而且容易的方法来取代它。

14.4.3 单边拉普拉斯变换

在许多电路分析问题中，激励函数和响应函数并不是一直存在的，而是从某个特定的瞬间开始的，通常将这个起始时刻取为 $t=0$。因此，对于那些在 $t<0$ 时不存在的函数，或者不关心其 $t<0$ 时的取值的函数，可以将其看做是 $v(t)u(t)$。其拉普拉斯变换的下限取为 $t=0^-$，这样可以将 $t=0$ 时由于函数不连续性带来的影响包括进来，比如冲激或者高阶奇点等等。相应的拉普拉斯变换形式为：

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}f(t)u(t)\,dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}f(t)\,dt$$

这是 $f(t)$ 的单边拉普拉斯变换的定义，或者省略"单边"，简称为 $f(t)$ 的拉普拉斯变换。逆变换的表达式保持不变，只是在计算的时候要知道，只有在 $t>0$ 时才有意义。下面是拉普拉斯变换对的定义，从现在开始就要使用它们：

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}f(t)\,dt \tag{14.14}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} e^{st}\mathbf{F}(\mathbf{s})\,d\mathbf{s}$$

$$f(t) \Leftrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{s}) \tag{14.15}$$

也可以用符号 $\mathcal{L}$ 来表示拉普拉斯变换及其逆变换：

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad 和 \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{F}(\mathbf{s})\}$$

---

① 如果忽略因子 $1/2\pi j$ 并将该积分看做是相对于所有的频率求和，则 $f(t) \propto \sum[\mathbf{F}(\mathbf{s})\,d\mathbf{s}]e^{st}$，这强调了 $f(t)$ 实际上是幅度与 $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ 成比例的复频率项的和。

例题 14.2 求函数 $f(t)=2u(t-3)$ 的拉普拉斯变换

为了求出 $f(t)=2u(t-3)$ 的单边拉普拉斯变换，必须计算积分：

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{s}) &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}f(t)\,dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}2u(t-3)\,dt \\ &= 2\int_{3}^{\infty} e^{-st}dt\end{aligned}$$

化简得：

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \frac{-2}{\mathbf{s}}e^{-st}\Big|_3^{\infty} = \frac{-2}{\mathbf{s}}(0-e^{-3s}) = \frac{2}{\mathbf{s}}e^{-3s}$$

练习

14.4 设 $f(t)=-6e^{-2t}[u(t+3)-u(t-2)]$。求(a)双边拉普拉斯变换 $\mathbf{F}(\mathbf{s})$；(b)单边拉普拉斯变换 $\mathbf{F}(\mathbf{s})$。

答案： $\frac{6}{2+\mathbf{s}}[e^{-4-2s}-e^{6+3s}]$；$\frac{6}{2+\mathbf{s}}[e^{-4-2s}-1]$

14.5 简单时域函数的拉普拉斯变换

这一节将开始建立电路分析中常用时域函数的拉普拉斯变换表。假定感兴趣的函数为电压，这样的假定虽然有点武断，但不失一般性。将采用下面的定义来建立拉普拉斯变换表，至少在开始建立时必须使用它：

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}v(t)\,dt = \mathcal{L}\{v(t)\}$$

相应的逆变换为：

$$v(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} e^{st}\mathbf{V}(\mathbf{s})\,d\mathbf{s} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}(\mathbf{s})\}$$

它们构成了 $v(t)$ 和 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ 之间的一一对应。也就是说，对每一个 $v(t)$，有且仅有一个 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ 与之对应。看到逆变换奇怪的形式，可能使人感到害怕。不过，很快就会看到，拉普拉斯变换理论的初步学习并不需要实际计算这个积分。通过从时域出发变换到频域，并且利用刚才所说的惟一性，可以得出拉普拉斯变换表，它几乎包含了所有希望进行变换的时域函数。

14.5.1 收敛的条件

在继续往下讨论的时候，先暂停一下，考虑一下是否存有这样一种可能，即对于某些函数 $v(t)$，是否根本就不存在拉普拉斯变换。保证拉普拉斯积分在 $\mathrm{Re}\{\mathbf{s}\}>\sigma_0$ 时绝对收敛的充分条件是：

1. 函数 $v(t)$ 在每一个有限区间 $t_1<t<t_2$ 内可积，其中 $0\leqslant t_1<t_2<\infty$。
2. 对某些 σ_0，极限 $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-\sigma_0 t}|v(t)|$ 存在。

在电路分析中，只有非常少的时域函数不满足这两个条件[①]。

14.5.2　单位阶跃函数 $u(t)$

现在来看某些特殊函数的变换。首先来考察单位阶跃函数 $u(t)$的拉普拉斯变换，根据定义，有：

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}u(t)\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-st}dt$$

$$= -\frac{1}{\mathbf{s}}e^{-st}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\mathbf{s}}$$

因为 $\mathrm{Re}\{\mathbf{s}\} > 0$，满足条件 2。因此：

$$u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{\mathbf{s}} \tag{14.16}$$

非常容易就得到了第一个拉普拉斯变换对。

通常用双箭头符号表示拉普拉斯变换对。

14.5.3　单位冲激函数 $\delta(t-t_0)$

另一个奇异函数是单位冲激函数 $\delta(t-t_0)$，它的变换非常有意思。图 14.2 中画出了该函数，它的样子看起来很奇特，不过在实践中却非常有用。单位冲激函数定义为包含单位面积，即：

$$\delta(t-t_0) = 0, \quad t \neq t_0$$

$$\int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon}\delta(t-t_0)\,dt = 1$$

其中 ϵ 为一个非常小的常数。因此，这个“函数”（许多纯数学家不敢这么称呼）只在点 t_0 处有非零值。对于 $t_0 > 0^-$，其拉普拉斯变换为：

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\delta(t-t_0)\,dt = e^{-st_0}$$

$$\delta(t-t_0) \Leftrightarrow e^{-st_0} \tag{14.17}$$

特别是，注意到对于 $t_0 = 0$，有：

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1 \tag{14.18}$$

单位冲激函数的另一个有趣的特性是其筛选性。考虑冲激函数与任意函数 $f(t)$的乘积的积分：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,dt$$

因为除了在 $t = t_0$ 处，函数 $\delta(t-t_0)$的值均为 0，因此该积分的值为 $f(t_0)$。这一特性对于化简含有单位冲激函数的积分表达式非常有用。

---

① 这种函数的例子有 e^{t^2} 与 e^{e^t}，但 t^n 和 n^t 却不是。对于拉普拉斯变换及其应用的更详细讨论，请参考 Clare D. McGillem and George R. Cooper, *Continuous and Discrete Signal and System Analysis*, 3d ed., Oxford University Press, North Carolina, 1991, Chap. 5.

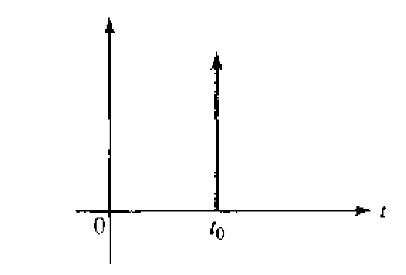


图 14.2 单位冲激函数 $\delta(t-t_0)$。通常用它来近似表示持续时间非常短的信号脉冲，这里的"非常短"是与电路的时间常数相比而言的

14.5.4 指数函数 $e^{-\alpha t}$

以前对指数函数很感兴趣，下面来求其变换：

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}u(t)\}=\int_{0^-}^{\infty}e^{-\alpha t}e^{-st}dt$$

$$=-\frac{1}{\mathbf{s}+\alpha}e^{-(\mathbf{s}+\alpha)t}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{\mathbf{s}+\alpha}$$

因此：

$$e^{-\alpha t}u(t)\Longleftrightarrow\frac{1}{\mathbf{s}+\alpha} \tag{14.19}$$

容易看出 $\mathrm{Re}\{\mathbf{s}\}>-\alpha$。

14.5.5 斜坡函数 $tu(t)$

作为最后一个例子，考虑斜坡函数 $tu(t)$。其变换为：

$$\mathcal{L}\{tu(t)\}=\int_{0^-}^{\infty}te^{-st}dt=\frac{1}{\mathbf{s}^2}$$

$$tu(t)\Leftrightarrow\frac{1}{\mathbf{s}^2} \tag{14.20}$$

通过分部积分或者查积分表，可以得到上面的结果。

函数 $te^{-\alpha t}u(t)$ 的变换是什么？把它留给读者求解，其答案为：

$$te^{-\alpha t}u(t)\Leftrightarrow\frac{1}{(\mathbf{s}+\alpha)^2} \tag{14.21}$$

练习

14.5 分别求出 $v(t)$ 等于下列情况时 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ 的表达式：(a) $4\delta(t)-3u(t)$；(b) $4\delta(t-2)-3tu(t)$；(c) $[u(t)][u(t-2)]$。

14.6 分别求出 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ 等于下列表达式时相应的 $v(t)$：(a) 10；(b) $10/\mathbf{s}$；(c) $10/\mathbf{s}^2$；(d) $10/[\mathbf{s}(\mathbf{s}+10)]$；(e) $10\mathbf{s}/(\mathbf{s}+10)$。

答案：14.5：$(4\mathbf{s}-3)/\mathbf{s}$；$4e^{-2\mathbf{s}}-(3/\mathbf{s}^2)$；$e^{-2\mathbf{s}}/\mathbf{s}$。14.6：$10\delta(t)$；$10u(t)$；$10tu(t)$；$u(t)-e^{-10t}u(t)$；$10\delta(t)-100e^{-10t}u(t)$

14.6 逆变换方法

14.6.1 线性原理

应用一些基本原理，可以更方便地计算拉普拉斯变换。最简单的是线性原理：两个或者多个时域函数的和的拉普拉斯变换等于各时域函数的拉普拉斯变换的和。对于两个时域函数的情况，有：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f_1(t)+f_2(t)\} &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}[f_1(t)+f_2(t)]dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}f_1(t)dt + \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}f_2(t)dt \\ &= \mathbf{F}_1(\mathbf{s}) + \mathbf{F}_2(\mathbf{s})\end{aligned}$$

这就是所谓的拉普拉斯变换的"叠加性原理"。

下面举一个例子来说明这个原理的应用，假定已知某函数的拉普拉斯变换为$\mathbf{V}(\mathbf{s})$，要求出相应的时域函数 $v(t)$。通常可以将 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$分解成两个或多个函数相加的形式，比如分解为$\mathbf{V}_1(\mathbf{s})$加 $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$，它们的逆变换 $v_1(t)$和 $v_2(t)$均可通过查表得到。那么，根据线性原理可得：

$$\begin{aligned}v(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}(\mathbf{s})\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}_1(\mathbf{s}) + \mathbf{V}_2(\mathbf{s})\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}_1(\mathbf{s})\} + \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}_2(\mathbf{s})\} = v_1(t) + v_2(t)\end{aligned}$$

考察拉普拉斯变换的定义，容易得到线性原理的另一个重要的结论。因为只是求积分，因此，一个函数乘以一个常数后的拉普拉斯变换等于该函数的拉普拉斯变换乘以这个常数，即：

$$\mathcal{L}\{kv(t)\} = k\,\mathcal{L}\{v(t)\}$$

或

$$kv(t) \Leftrightarrow k\mathbf{V}(\mathbf{s}) \tag{14.22}$$

其中 k 为比例常数。后面将看到，在许多电路分析的场合，这个结论非常有用。

这就是所谓的拉普拉斯变换的"齐次性原理"。

14.6.2 求有理函数的拉普拉斯逆变换的方法

在分析含有多个储能元件的电路时，通常会碰到 s 域表达式为关于 s 的两个多项式之比的形式：

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{N}(\mathbf{s})}{\mathbf{D}(\mathbf{s})}$$

其中，$\mathbf{N}(\mathbf{s})$和$\mathbf{D}(\mathbf{s})$为关于 s 的多项式。使$\mathbf{N}(\mathbf{s})=0$的 s 值称为$\mathbf{V}(\mathbf{s})$的零点，使$\mathbf{D}(\mathbf{s})=0$的 s 值称为 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$的极点。

在求拉普拉斯逆变换时，用式(14.15)来计算非常麻烦，通常可以采用求留数的办法将这些表达式分解成若干简单项，其中每一项的逆变换均已知。这么做的前提是 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$必须为有理函数，且分子 $\mathbf{N}(\mathbf{s})$的阶数必须小于分母 $\mathbf{D}(\mathbf{s})$的阶数。实际上，在电路分析中碰到的函数，很少会碰到需要用式(14.15)来求逆变换的情况，前提条件是能够熟练地使用本章中介绍的各种方法。

使用留数的方法实际上是对 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$进行部分分式分解，因此我们将注意力集中到分母的根上。也就是说，首先必须将关于 s 的多项式 $\mathbf{D}(\mathbf{s})$分解成二项式因子相乘的形式。$\mathbf{D}(\mathbf{s})$的根可

能是由单根和重根组成的，既可以是实数，也可以是复数。但是，值得注意的是，当 **D(s)** 的系数为实数时，复根总是成对出现的。

14.6.3 相异极点

作为一个例子，求下式的拉普拉斯逆变换：

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{1}{(\mathbf{s}+\alpha)(\mathbf{s}+\beta)}$$

分母已经表示为两个不同因子的积的形式，这两个因子的根分别是 $-\alpha$ 和 $-\beta$①。虽然可以将上式代入定义式中来求其逆变换，但是使用线性原理来求解会简单得多。对上式进行部分分式分解，可以将它分解为两个简单的部分分式的和：

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{A}{(\mathbf{s}+\alpha)} + \frac{B}{(\mathbf{s}+\beta)}$$

其中 A 和 B 可以用多种办法来求得，不过最快的方法也许是下面这种：

$$A = \lim_{\mathbf{s}\to-\alpha}\left[(\mathbf{s}+\alpha)\mathbf{V}(\mathbf{s}) - \frac{(\mathbf{s}+\alpha)}{(\mathbf{s}+\beta)}B\right]$$

$$= \lim_{\mathbf{s}\to-\alpha}\left[\frac{1}{(\mathbf{s}+\beta)} - 0\right] = \frac{1}{\beta-\alpha}$$

该式使用了 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ 的简分式形式(即没有分解)。
类似地，可得：

$$B = \frac{1}{\alpha-\beta}$$

因此：

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{1/(\beta-\alpha)}{(\mathbf{s}+\alpha)} + \frac{1/(\alpha-\beta)}{(\mathbf{s}+\beta)}$$

前面已经计算过这种形式的逆变换，因此：

$$v(t) = \frac{1}{\beta-\alpha}e^{-\alpha t}u(t) + \frac{1}{\alpha-\beta}e^{-\beta t}u(t)$$

$$= \frac{1}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})u(t)$$

如果需要，可以将下式加入到拉普拉斯变换表中：

$$\frac{1}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(\mathbf{s}+\alpha)(\mathbf{s}+\beta)}$$

容易将这种方法推广到分母为关于 s 的高阶多项式的情形，虽然这有点繁琐。需要注意的是，这里并没有限定常数 A 和 B 必须是实数。不过，当 α 和 β 为复数的情况下，将发现 α 和 β 互为共轭(这在数学上不是必须的，但对于物理电路而言是必须的)，这时，可以得到 $A = B^*$，换句话说，这两个系数也是复共轭的。

14.6.4 多重极点

接着，来看多重极点的情况。考虑函数：

---

① 原文为 α 和 β，疑有误——译者注。

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{N}(\mathbf{s})}{(\mathbf{s}-p)^n}$$

将其展开为：

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{a_n}{(\mathbf{s}-p)^n} + \frac{a_{n-1}}{(\mathbf{s}-p)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_1}{(\mathbf{s}-p)}$$

为了求出每个常数，首先将未展开的 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$乘以$(\mathbf{s}-p)^n$，令 $\mathbf{s}=p$ 可以得到常数a_n。剩下的常数可以通过对式$(\mathbf{s}-p)^n\mathbf{V}(\mathbf{s})$求若干次微分后，再令 $\mathbf{s}=p$，然后除以一个阶乘项得到。微分的目的是为了除去已经求得的常数，而令 $\mathbf{s}=p$ 则是为了除去其他常数。比如，a_{n-2}可以通过计算下式得到：

$$\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\mathbf{s}^2}[(\mathbf{s}-p)^n\mathbf{V}(\mathbf{s})]_{\mathbf{s}=p}$$

而 a_{n-k}可以通过计算下式得到：

$$\frac{1}{k!}\frac{d^k}{d\mathbf{s}^k}[(\mathbf{s}-p)^n\mathbf{V}(\mathbf{s})]_{\mathbf{s}=p}$$

为了说明这一过程，来求一个包含这两种极点的传递函数：$\mathbf{s}=0$ 为单重极点，$\mathbf{s}=-6$ 为二重极点。

例题 14.3 求下面的函数的逆变换

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{2}{\mathbf{s}^3+12\mathbf{s}^2+36\mathbf{s}}$$

可以看到，很容易对分母分解因式，得到：

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{2}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+6)(\mathbf{s}+6)} = \frac{2}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+6)^2}$$

正如前面所说，它有三个极点，在 $\mathbf{s}=0$ 处有一个，在 $\mathbf{s}=-6$ 处有两个。下一步，将该函数分解为：

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{a_1}{(\mathbf{s}+6)^2} + \frac{a_2}{(\mathbf{s}+6)} + \frac{a_3}{\mathbf{s}}$$

采用刚才介绍的方法可以求出未知常数 a_1 和 a_2，使用以前介绍的方法可以求出 a_3。因此：

$$a_1 = \left[(\mathbf{s}+6)^2\frac{2}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+6)^2}\right]_{\mathbf{s}=-6} = \left.\frac{2}{\mathbf{s}}\right|_{\mathbf{s}=-6} = \frac{-1}{3}$$

以及：

$$a_2 = \frac{d}{d\mathbf{s}}\left[(\mathbf{s}+6)^2\frac{2}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+6)^2}\right]_{\mathbf{s}=-6} = \left.\frac{d}{d\mathbf{s}}\left(\frac{2}{\mathbf{s}}\right)\right|_{\mathbf{s}=-6} = \left.\frac{-2}{\mathbf{s}^2}\right|_{\mathbf{s}=-6} = \frac{-1}{18}$$

可以使用单重极点的方法求出剩下的常数 a_3：

$$a_3 = \left.\mathbf{s}\frac{2}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+6)^2}\right|_{\mathbf{s}=0} = \frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$$

因此，可以将 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$展开为：

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{-\frac{1}{3}}{(\mathbf{s}+6)^2} + \frac{-\frac{1}{18}}{(\mathbf{s}+6)} + \frac{\frac{1}{18}}{\mathbf{s}}$$

根据线性原理，求出等式右边这三项的逆变换，就可以得到 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$的逆变换。可以看到，右边第一项的形式为：

$$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

根据式(14.21),得到右边第一项的逆变换为 $-\frac{1}{3}te^{-6t}u(t)$。用类似的方法得到第二项的逆变换为 $-\frac{1}{18}e^{-6t}u(t)$,第三项的逆变换为$\frac{1}{18}u(t)$。因此:

$$v(t) = -\frac{1}{3}te^{-6t}u(t) - \frac{1}{18}e^{-6t}u(t) + \frac{1}{18}u(t)$$

或者,简洁地:

$$v(t) = \frac{1}{18}[1-(1+6t)e^{-6t}]u(t)$$

练习

14.7 如果 $\mathbf{V}(\mathbf{s}) = 2s/(s^2+4)^2$,求 $v(t)$。

答案:$\frac{1}{2}t\ \sin 2t\,u(t)$

计算机辅助分析

MATLAB 作为一个非常有用的数值分析软件包,可以用来求解在不同时变激励下,对电路列出的方程组。最直接的办法是使用求解常微分方程(ODE)的函数 ode23()和 ode45()。这两个函数采用了基于微分方程数值解的方法,ode45()的精度相对来说要高一些。不过这种方法求得的只是一些离散时刻上的解,并没有求出所有时刻上的解,当取的点足够密时,在许多情况下就已经足够了。

拉普拉斯变换提供了求微分方程精确表达式的一种方法,这比用 ODE 函数求得的数值解要好得多。在后面的章节学习 s 域表达式时,将看到拉普拉斯变换的另一个突出的优点,特别是在把分母多项式分解因式之后。

已经看到,做拉普拉斯变换时,采用查表的方法非常方便,虽然对于那些分母多项式阶数较高的函数来说在求留数时有些繁琐。这时,也可以使用 MATLAB 来帮助求解,它有一些有用的函数用来处理多项式。

在 MATLAB 中,多项式:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

存储为矢量$[a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0]$。

因此,对于多项式 $\mathbf{N}(\mathbf{s}) = 2$ 与 $\mathbf{D}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}^3 + 12\mathbf{s}^2 + 36\mathbf{s}$,输入:

```
EDU >> N = [2];
EDU >> D = [1 12 36 0];
```

每个多项式的根可以用函数 roots(**p**)求得,其中 **p** 为一个矢量,它包含了多项式的系数。比如

```
EDU >> q = [1 8 16];
EDU >> roots(q)
```

将得到:

```
ans =
    -4
    -4
```

MATLAB 也可以用来求有理函数 N(s)/D(s)的留数,使用的函数是 residue()。例如:

```
EDU >> [r p y] = residue(N,D);
```

它返回三个矢量 **r**,**p** 和 **y**,因此:

$$\frac{\mathbf{N(s)}}{\mathbf{D(s)}} = \frac{r_1}{x - p_1} + \frac{r_2}{x - p_2} + \cdots + \frac{r_n}{x - p_n} + \mathbf{y(s)}$$

上式是没有多重极点的情况。对于 n 重极点的情况,则:

$$\frac{\mathbf{N(s)}}{\mathbf{D(s)}} = \frac{r_1}{(x - p)} + \frac{r_2}{(x - p)^2} + \cdots + \frac{r_n}{(x - p)^n} + \mathbf{y(s)}$$

需要注意的是,只要分子多项式的阶数比分母多项式的阶数低,则矢量 **y**(s)总是空的。

将上面的 MATLAB 命令中的分号去掉并执行,得到的输出为:

```
r =
    -0.0556
    -0.3333
     0.0556

p =
    -6
    -6
     0

y =
    []
```

这与例 14.3 求得的解一致。

14.7　拉普拉斯变换的基本定理

现在来看两个定理——微分定理和积分定理,它们可以认为是在电路分析中需要使用拉普拉斯变换的原因。利用这两个定理,可以对电路的时域方程中的导数和积分进行变换。

14.7.1　时域微分定理

首先来看时域的微分。考虑时域函数 $v(t)$,已知其拉普拉斯变换存在,设为 **V**(s)。希望求出 $v(t)$的一阶导数的变换:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dv}{dt}\right\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\frac{dv}{dt}dt$$

使用分部积分的方法,有:

$$U = e^{-st} dV = \frac{dv}{dt}dt$$

于是：

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dv}{dt}\right\}=v(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty}+\mathbf{s}\int_{0^-}^{\infty}e^{-st}v(t)\,dt$$

当 t 趋于无穷大时，右边第一项必然趋于 0，否则 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ 不存在。因此：

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dv}{dt}\right\}=0-v(0^-)+\mathbf{s}\mathbf{V}(\mathbf{s})$$

于是：

$$\frac{dv}{dt}\Leftrightarrow\mathbf{s}\mathbf{V}(\mathbf{s})-v(0^-) \tag{14.23}$$

对于高阶导数，可以得到类似的关系：

$$\frac{d^2v}{dt^2}\Leftrightarrow\mathbf{s}^2\mathbf{V}(\mathbf{s})-\mathbf{s}v(0^-)-v'(0^-) \tag{14.24}$$

$$\frac{d^3v}{dt^3}\Leftrightarrow\mathbf{s}^3\mathbf{V}(\mathbf{s})-\mathbf{s}^2v(0^-)-\mathbf{s}v'(0^-)-v''(0^-) \tag{14.25}$$

其中 $v'(0^-)$ 表示 $v(t)$ 的一阶导数在初始时刻 $t=0^-$ 时的值，$v''(0^-)$ 表示 $v(t)$ 的二阶导数在初始时刻的值，以此类推。当所有初始条件为 0 时，可以看到，在时域中对 t 求一次微分相当于在频域中乘以 $\mathbf{s}$；在时域中求两次微分相当于在频域中乘以 $\mathbf{s}^2$，以此类推。因此，时域微分相当于频域相乘，这是一个实质上的简化！还将看到，即使初始条件不为 0，上面的说法也是成立的，下面将通过一个简单的例子来说明这一点。

例题 14.4 对于图 14.3 所示的串联 RL 电路，求流过 4 Ω 电阻的电流

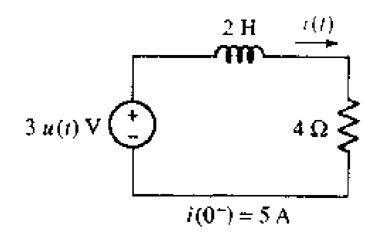


图 14.3 将微分方程 $2\,di/dt+4i=3u(t)$ 变换为 $2[\mathbf{s}\mathbf{I}(\mathbf{s})-i(0^-)]+4\mathbf{I}(\mathbf{s})=3/\mathbf{s}$ 来分析该电路

- 弄清问题的目标：

需要求出电流 $i(t)$ 的表达式。

- 收集已知信息：

网络由一个阶跃电压驱动，已知电流的初始值（$t=0^-$ 时刻的值）为 5 A。

- 选择最适合问题的已有方法：

如果对该电路应用 KVL，将得到一个以 $i(t)$ 为未知量的微分方程。不过，这一次不像以前那样去求解微分方程，而是先对各项做拉普拉斯变换，将该方程变换到频域。

- 建立适当的方程组：

使用 KVL，列出时域单回路方程，得到：

$$2\frac{di}{dt}+4i=3u(t)$$

对各项进行拉普拉斯变换，得：

$$2[\mathbf{sI}(\mathbf{s}) - i(0^-)] + 4\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \frac{3}{\mathbf{s}}$$

● 确定是否需要其他信息：

这时已经得到一个方程，从中可以求出与 $i(t)$ 对应的频域量 $\mathbf{I}(\mathbf{s})$。

● 试解：

然后求解 $\mathbf{I}(\mathbf{s})$，将 $i(0^-)=5$ 代入：

$$(2\mathbf{s}+4)\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \frac{3}{\mathbf{s}} + 10$$

于是：

$$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \frac{1.5}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+2)} + \frac{5}{\mathbf{s}+2}$$

而

$$\lim_{\mathbf{s}\to 0}[\mathbf{sI}(\mathbf{s})] = 0.75$$

以及

$$\lim_{\mathbf{s}\to -2}[(\mathbf{s}+2)\mathbf{I}(\mathbf{s})] = -0.75 + 5$$

因此：

$$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \frac{0.75}{\mathbf{s}} + \frac{4.25}{\mathbf{s}+2}$$

然后用已知的变换对进行逆变换，得：

$$\begin{aligned} i(t) &= 0.75u(t) + 4.25e^{-2t}u(t) \\ &= (0.75 + 4.25e^{-2t})u(t) \quad \text{A} \end{aligned}$$

● 证实所得解是否合理和满足要求：

根据以前求解这种类型电路的经验，知道这里的响应形式为一个直流受迫响应加上一个指数衰减的自由响应。当 $t=0$ 时，得到 $i(0)=5$ A，与初始条件一致，当 $t\to\infty$ 时，$i(t)\to\frac{3}{4}$ A，这和所预想的一致。

至此，完成了求解 $i(t)$ 的过程。$i(t)$ 既包含受迫响应 $0.75u(t)$，也包含自由响应 $4.25e^{-2t}u(t)$，而且自动满足初始条件。可以看到，在含有许多微分方程时，用这种方法求解完全响应并不太复杂。

练习

14.8　使用拉普拉斯变换的方法，求出图 14.4 所示电路中 $i(t)$ 的表达式。

答案：$(0.25+4.75e^{-20t})u(t)$ A

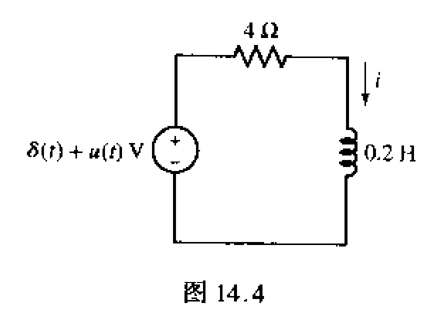


图 14.4

14.7.2 时域积分定理

当电路方程中含有时域积分方程时，也可以使用和上面的相类似的方法进行简化求解。首先来求时域函数 $\int_{0^-}^{t} v(x)dx$ 的拉普拉斯变换：

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^{t} v(x)dx\right\}=\int_{0}^{\infty} e^{-st}\left[\int_{0}^{t} v(x)dx\right]dt$$

采用分部积分，令：

$$u=\int_{0}^{t} v(x)dx,\quad dv=e^{-st}dt$$

$$du=v(t)dt,\quad v=-\frac{1}{\mathbf{s}}e^{-st}$$

则：

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^{t} v(x)dx\right\}=\left\{\left[\int_{0^-}^{t} v(x)dx\right]\left[-\frac{1}{\mathbf{s}}e^{-st}\right]\right\}_{t=0^-}^{t=\infty}-\int_{0^-}^{\infty}-\frac{1}{\mathbf{s}}e^{-st}v(t)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{\mathbf{s}}e^{-st}\int_{0^-}^{t} v(x)dx\right]_{0}^{\infty}+\frac{1}{\mathbf{s}}\mathbf{V}(\mathbf{s})$$

因为 $t\to\infty$ 时，$e^{-st}\to 0$，因此，右边第一项取积分上限的时候等于0，而当 $t\to 0^-$ 时，即该项取下限时也为0，于是只剩下 $\mathbf{V}(\mathbf{s})/\mathbf{s}$ 一项，因此：

$$\int_{0^-}^{t} v(x)dx \Leftrightarrow \frac{\mathbf{V}(\mathbf{s})}{\mathbf{s}} \tag{14.26}$$

即在时域中积分相当于在频域中除以 $\mathbf{s}$。同样，时域中相对复杂的微积分运算简化为频域中的代数运算。

例题 14.5 求图14.5所示的串联 RC 电路中当 $t>0$ 时 $i(t)$ 的表达式

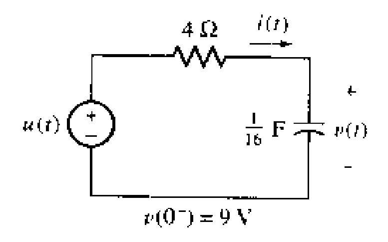


图 14.5 用拉普拉斯变换对 $\int_{0^-}^{t} i(t)dt \Leftrightarrow \frac{1}{\mathbf{s}}\mathbf{I}(\mathbf{s})$ 来分析电路的例子

首先列出单回路方程：

$$u(t)=4i(t)+16\int_{-\infty}^{t} i(t)dt$$

为了应用时域积分定理，对其进行整理，使得积分的下限为 0^-。因此，进行下面的变换：

$$16\int_{-\infty}^{t} i(t)dt=16\int_{-\infty}^{0^-} i(t)dt+16\int_{0^-}^{t} i(t)dt$$

$$=v(0^-)+16\int_{0}^{t} i(t)dt$$

于是：

$$u(t)=4i(t)+v(0^-)+16\int_{0^-}^{t}i(t)dt$$

然后对方程的两边做拉普拉斯变换。因为使用的是单边的拉普拉斯变换，因此$\mathcal{L}\{v(0^-)u(t)\}$可以简化为$\mathcal{L}\{v(0^-)\}$，于是：

$$\frac{1}{\mathbf{s}}=4\mathbf{I}(\mathbf{s})+\frac{9}{\mathbf{s}}+\frac{16}{\mathbf{s}}\mathbf{I}(\mathbf{s})$$

解出 $\mathbf{I}(\mathbf{s})$为：

$$\mathbf{I}(\mathbf{s})=\frac{-2}{\mathbf{s}+4}$$

然后立刻可以得到要求的结果：

$$i(t)=-2e^{-4t}u(t)\quad \text{A}$$

例题 14.6　求例题 14.5 电路中的 $v(t)$，为了方便起见，重新在图 14.6 中画出该电路

这时，只列出单节点方程：

$$\frac{v(t)-u(t)}{4}+\frac{1}{16}\frac{dv}{dt}=0$$

两边做拉普拉斯变换，得：

$$\frac{\mathbf{V}(\mathbf{s})}{4}-\frac{1}{4\mathbf{s}}+\frac{1}{16}\mathbf{s}\mathbf{V}(\mathbf{s})-\frac{v(0^-)}{16}=0$$

或

$$\mathbf{V}(\mathbf{s})\left(1+\frac{\mathbf{s}}{4}\right)=\frac{1}{\mathbf{s}}+\frac{9}{4}$$

因此：

$$\mathbf{V}(\mathbf{s})=\frac{4}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+4)}+\frac{9}{\mathbf{s}+4}=\frac{1}{\mathbf{s}}-\frac{1}{\mathbf{s}+4}+\frac{9}{\mathbf{s}+4}=\frac{1}{\mathbf{s}}+\frac{8}{\mathbf{s}+4}$$

做逆变换，得：

$$v(t)=(1+8e^{-4t})u(t)$$

这里，不需要使用常规的解微分方程的方法，就很快求得了电容上的电压。

然后来检验解的正确性，注意到$\left(\frac{1}{16}\right)dv/dt$ 应该等于前面求得的 $i(t)$在 $t>0$ 时的表达式：

$$\frac{1}{16}\frac{dv}{dt}=\frac{1}{16}(-32)e^{-4t}=-2e^{-4t}$$

这与例题 14.5 所得的结果一致。

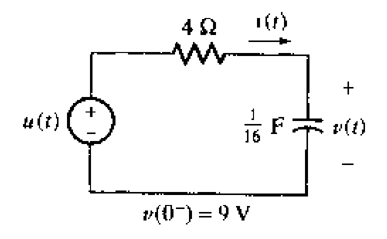


图 14.6　重画例题 14.6 中的图 14.5 所示的电路，求 $v(t)$

练习

14.9 求图 14.7 所示电路中 $v(t)$在 $t=800$ ms 时的值。

答案:802 mV

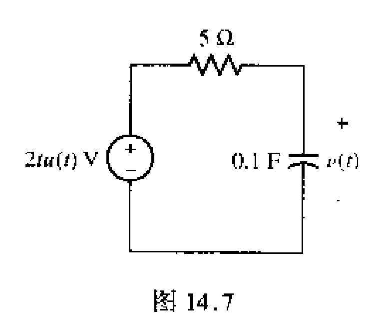


图 14.7

14.7.3 正弦函数的拉普拉斯变换

下面来求 $\sin\omega t\,u(t)$的拉普拉斯变换,这是一个非常重要的变换对,同时以此来进一步说明线性原理和时域微分定理,然后将求得的结果填入拉普拉斯变换表中。可以从定义式出发,然后使用分部积分来求得 $\sin\omega t\,u(t)$的拉普拉斯变换,但没有必要这么麻烦。事实上,可以使用下面的关系:

$$\sin\omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

根据线性原理,这两项的和的变换等于它们各自的变换的和,而每一项均为指数函数,已经知道它们的拉普拉斯变换。于是,立刻可以得到:

$$\mathcal{L}\{\sin\omega t\,u(t)\} = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{\mathbf{s}-j\omega} - \frac{1}{\mathbf{s}+j\omega}\right) = \frac{\omega}{\mathbf{s}^2+\omega^2}$$

$$\sin\omega t\,u(t) \Leftrightarrow \frac{\omega}{\mathbf{s}^2+\omega^2} \tag{14.27}$$

下一步,使用时域微分定理来求 $\cos\omega t\,u(t)$的变换,$\cos\omega t$ 与 $\sin\omega t$ 的导数成比例,于是:

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\,u(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}[\sin\omega t\,u(t)]\right\} = \frac{1}{\omega}\mathbf{s}\frac{\omega}{\mathbf{s}^2+\omega^2}$$

$$\cos\omega t\,u(t) \Leftrightarrow \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2+\omega^2} \tag{14.28}$$

注意到这里使用了这样一个事实,即 $\sin\omega t\big|_{t=0} = 0$。

14.7.4 时移定理

以前在求解瞬态问题时曾经看到,并不是所有的激励函数都是从 $t=0$ 时开始的。当时间函数仅仅是在时间上有一个确定的移位时,其拉普拉斯变换将会有什么变化呢?特别是,设 $f(t)u(t)$的变换为 $\mathbf{F}(\mathbf{s})$,那么将 $f(t)u(t)$延迟 a 秒(即在 $t<a$ 时为零)后的函数 $f(t-a)u(t-a)$的变换等于什么呢?直接从拉普拉斯变换的定义出发,对于 $t \geq a^-$,得到:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t}f(t-a)u(t-a)\,dt = \int_{a^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t}f(t-a)\,dt$$

采用新的积分变量 $\tau = t-a$,得到:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-s(\tau+a)} f(\tau)\,d\tau = e^{-as}\mathbf{F}(\mathbf{s})$$

因此：

$$f(t-a)u(t-a) \Leftrightarrow e^{-as}\mathbf{F}(\mathbf{s}), \quad (a \geqslant 0) \tag{14.29}$$

上式称为时移定理，它表明如果时域函数在时间上延迟了 a，那么其拉普拉斯变换在频域上为原拉普拉斯变换乘以 e^{-as}。

例题 14.7　求矩形脉冲 $v(t) = u(t-2) - u(t-5)$ 的拉普拉斯变换

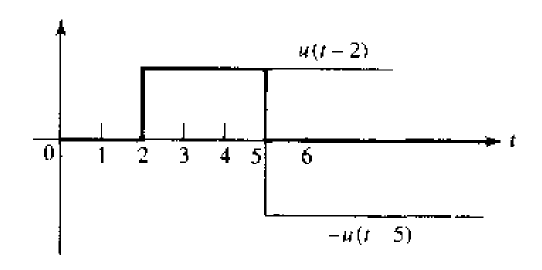


图 14.8　$u(t-2) - u(t-5)$ 的函数曲线

图 14.8 画出了该脉冲，在时间区间 $2 < t < 5$ 上其值为 1，在其他区间为 0。已知 $u(t)$ 的变换为 $1/\mathbf{s}$，而 $u(t-2)$ 只是将 $u(t)$ 延迟 2 s，则其变换为 $e^{-2s}/\mathbf{s}$，而 $u(t-5)$ 的变换为 $e^{-5s}/\mathbf{s}$。那么可以得到所求的变换为：

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{e^{-2s}}{\mathbf{s}} - \frac{e^{-5s}}{\mathbf{s}} = \frac{e^{-2s} - e^{-5s}}{\mathbf{s}}$$

没有必要根据拉普拉斯变换的定义式来求 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$。

练习

14.10　求图 14.9 所示的时域函数的拉普拉斯变换。

答案：$(5/s) \times (2e^{-2s} - e^{-4s} - e^{-5s})$

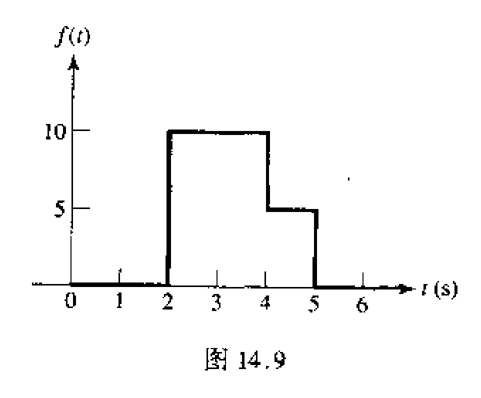


图 14.9

到目前为止，已经得到了拉普拉斯变换表中的许多项，其中包括冲激函数、阶跃函数、指数函数、斜坡函数、正弦函数和余弦函数以及两个指数函数和的拉普拉斯变换。另外，还知道了在时域中相加、乘以常数项、微分和积分分别在 s 域中产生的结果，这些结果也集中在表 14.1

和表14.2中，表中还包含了附录G的结果。

表 14.1 拉普拉斯变换对

$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{F}(s)\}$	$\mathbf{F}(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$t\,u(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t),\ n=1,2,\cdots$	$\frac{1}{s^n}$
$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$
$te^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t),\ n=1,2,\cdots$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$
$\frac{1}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t}-e^{-\beta t})u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$
$\sin\omega t\,u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t\,u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t+\theta)u(t)$	$\frac{s\sin\theta+\omega\cos\theta}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t+\theta)u(t)$	$\frac{s\cos\theta-\omega\sin\theta}{s^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\sin\omega t\,u(t)$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\cos\omega t\,u(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

表 14.2 拉普拉斯变换的性质

操作	$f(t)$	$\mathbf{F}(s)$
相加	$f_1(t)\pm f_2(t)$	$\mathbf{F}_1(s)\pm\mathbf{F}_2(s)$
乘以常数项	$kf(t)$	$k\mathbf{F}(s)$
时域微分	$\frac{df}{dt}$	$s\mathbf{F}(s)-f(0^-)$
	$\frac{d^2f}{dt^2}$	$s^2\mathbf{F}(s)-sf(0^-)-f'(0^-)$
	$\frac{d^3f}{dt^3}$	$s^3\mathbf{F}(s)-s^2f(0^-)-sf'(0^-)-f''(0^-)$
时域积分	$\int_{0^-}^{t}f(t)dt$	$\frac{1}{s}\mathbf{F}(s)$
	$\int_{-\infty}^{t}f(t)dt$	$\frac{1}{s}\mathbf{F}(s)+\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-}f(t)dt$
卷积	$f_1(t)*f_2(t)$	$\mathbf{F}_1(s)\mathbf{F}_2(s)$
时移	$f(t-a)u(t-a),\ a\geqslant 0$	$e^{-as}\mathbf{F}(s)$
频移	$f(t)e^{-at}$	$\mathbf{F}(s+a)$

（续表）

操作	$f(t)$	$\mathbf{F}(\mathbf{s})$
频域微分	$-tf(t)$	$\frac{d\mathbf{F}(\mathbf{s})}{ds}$
频域积分	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_{s}^{\infty} F(s)ds$
缩放	$f(at), a \geqslant 0$	$\frac{1}{a}\mathbf{F}\left(\frac{s}{a}\right)$
初值	$f(0^+)$	$\lim_{s\to\infty} \mathbf{sF}(\mathbf{s})$
终值	$f(\infty)$	$\lim_{s\to 0} \mathbf{sF}(\mathbf{s})$，$\mathbf{sF}(\mathbf{s})$的所有极点均在左半平面
时间周期	$f(t)=f(t+nT)$， $n=1,2,\cdots$	$\frac{1}{1-e^{-Ts}}\mathbf{F}_1(\mathbf{s})$，其中 $\mathbf{F}_1(\mathbf{s})=\int_{0^-}^{T} f(t)e^{-st}dt$

14.8　初值定理和终值定理

最后介绍两个定理，分别称为初值定理和终值定理。根据这两个定理，可以通过对 $\mathbf{sF}(\mathbf{s})$ 求极限来求得 $f(0^+)$ 和 $f(\infty)$。

14.8.1　初值定理

为了得出初值定理，重新来看导数的拉普拉斯变换：

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = \mathbf{sF}(\mathbf{s}) - f(0^-) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\frac{df}{dt}dt$$

现在令 s 趋于无穷，并将积分分成两部分：

$$\lim_{s\to\infty}[\mathbf{sF}(\mathbf{s}) - f(0^-)] = \lim_{s\to\infty}\left(\int_{0^-}^{0^+} e^{0}\frac{df}{dt}dt + \int_{0^+}^{\infty} e^{-st}\frac{df}{dt}dt\right)$$

可以看到，第二个积分在取极限时必为 0，因为其积分函数趋于 0。而 $f(0^-)$ 不是 s 的函数，因此可以将其从等式左边的极限中移出来：

$$-f(0^-) + \lim_{s\to\infty}[\mathbf{sF}(\mathbf{s})] = \lim_{s\to\infty}\int_{0^-}^{0^+} df = \lim_{s\to\infty}[f(0^+) - f(0^-)]$$

$$= f(0^+) - f(0^-)$$

最后，可以得到：

$$f(0^+) = \lim_{s\to\infty}[\mathbf{sF}(\mathbf{s})]$$

或写成：

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty}[\mathbf{sF}(\mathbf{s})] \tag{14.30}$$

这就是初值定理的数学描述。它说明时域函数 $f(t)$ 的初值可以通过将其拉普拉斯变换 $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ 乘以 s 并取极限得到。需要注意的是，这里得到的 $f(t)$ 的初值是右极限。

初值定理以及下面将要介绍的终值定理，可以用来检查拉普拉斯变换和逆变换的结果。例如，已经计算出 $\cos(\omega_0 t)u(t)$ 的变换为 $\mathbf{s}/(\mathbf{s}^2+\omega_0^2)$，又已知 $f(0^+)=1$，于是可以利用初值定

理对这个变换的结果进行检验：

$$\lim_{s\to\infty}\left(s\frac{s}{s^2+\omega_0^2}\right)=1$$

这样就完成了检验。

14.8.2 终值定理

终值定理没有初值定理那么常用，因为它只适合于某种特定类型的变换。为了确定一个变换 $\mathbf{F(s)}$是否属于这种类型，必须求出使 $\mathbf{F(s)}$的分母多项式为零的 s 的值，这些 s 值称为$\mathbf{F(s)}$的极点，它们非常重要。只有极点完全分布在 s 平面的左半平面（即 $\sigma<0$）的 $\mathbf{F(s)}$（极点 $s=0$ 除外），才能使用终值定理。同样地，考虑 df/dt 的拉普拉斯变换：

$$\int_{0^-}^{\infty}e^{-st}\frac{df}{dt}dt=\mathbf{sF(s)}-f(0^-)$$

这时，求 s 趋于 0 时的极限：

$$\lim_{s\to 0}\int_{0^-}^{\infty}e^{-st}\frac{df}{dt}dt=\lim_{s\to 0}[\mathbf{sF(s)}-f(0^-)]=\int_{0^-}^{\infty}\frac{df}{dt}dt$$

上式假定了 $f(t)$及其一阶导数的拉普拉斯变换均存在。现在将上式的最后一项表示为极限的形式：

$$\int_{0^-}^{\infty}\frac{df}{dt}dt=\lim_{t\to\infty}\int_{0^-}^{t}\frac{df}{dt}dt=\lim_{t\to\infty}[f(t)-f(0^-)]$$

由于 $f(0^-)$为常数，将上面两个方程进行比较可得：

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}[\mathbf{sF(s)}] \tag{14.31}$$

这就是终值定理。使用这个定理时，需要知道，当 t 趋于无穷时 $f(t)$的极限 $f(\infty)$存在，或者也可以说 $\mathbf{F(s)}$的所有极点都分布在 s 平面的左半平面，在原点的极点（如果存在的话）除外，这时乘积 $\mathbf{sF(s)}$的所有极点也分布在左半平面。

例题 14.8 使用终值定理，对于函数 $f(t)=(1-e^{-at})u(t)$，其中 $a>0$，求 $f(\infty)$

即使不使用终值定理，也可以立刻看出 $f(\infty)=1$。$f(t)$的变换为：

$$\mathbf{F(s)}=\frac{1}{\mathbf{s}}-\frac{1}{\mathbf{s}+a}=\frac{a}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+a)}$$

在下一章中将讨论 s 平面的概念和极点分布的重要性。

$\mathbf{F(s)}$的极点为 $s=0$ 和 $s=-a$，因为已知 $a>0$，所以 $\mathbf{F(s)}$的非零极点位于 s 平面的左半平面。因此，对于这个函数，可以使用终值定理。将 $\mathbf{F(s)}$乘以 s 并令 s 趋于零，得：

$$\lim_{s\to 0}[\mathbf{sF(s)}]=\lim_{s\to 0}\frac{a}{\mathbf{s}+a}=0$$

这和前面得到的 $f(\infty)$的值一致。

如果 $f(t)$为正弦函数，那么 $\mathbf{F(s)}$在 $j\omega$ 轴上有极点，这时，如果不顾这个前提而使用终值定理，将会得出 $f(t)$的终值为 0 的结论。但是，$\sin\omega_0 t$ 和 $\cos\omega_0 t$ 的终值都是不确定的，因此，必须注意在 $j\omega$ 轴上有极点的情况。

练习

14.11　不求出 $f(t)$，确定与下面的拉普拉斯变换函数相对应的时域函数的初值 $f(0^+)$ 和终值 $f(\infty)$：(a)$4e^{-2s}(\mathbf{s}+50)/\mathbf{s}$；(b)$(\mathbf{s}^2+6)/(\mathbf{s}^2+7)$；(c)$(5\mathbf{s}^2+10)/[2\mathbf{s}(\mathbf{s}^2+3\mathbf{s}+5)]$。

答案：0，200；∞，不确定（在 $j\omega$ 轴上有极点）；2.5，1

14.9　小结与复习

- 引入复频率的概念使得可以同时考虑函数的指数衰减部分和振荡部分。
- 复频率 $\mathbf{s}=\sigma+j\omega$ 为一般情况；直流（$\mathbf{s}=0$）、指数（$\omega=0$）和正弦函数（$\sigma=0$）为特殊情况。
- 在 s 域中分析电路使得时域的微积分方程变换为频域代数方程。
- 对于电路分析问题，可以使用单边拉普拉斯变换 $\mathbf{F}(\mathbf{s})=\int_{0^-}^{\infty}e^{-\mathbf{s}t}f(t)\,dt$ 将时域函数变换为频域函数。
- 拉普拉斯逆变换将频域表达式变换为时域表达式。一般不直接使用定义式来进行逆变换，因为通常可以使用拉普拉斯变换表来进行。
- 单位冲激函数是对非常窄的脉冲（指其宽度相对于电路时间常数而言非常窄）的近似，它只在一个点上取非零值，且其面积等于 1。
- $\mathcal{L}\{f_1(t)+f_2(t)\}=\mathcal{L}\{f_1(t)\}+\mathcal{L}\{f_2(t)\}$　（叠加性）
- $\mathcal{L}\{kf(t)\}=k\,\mathcal{L}\{f(t)\}$，$k=$ 常数　（齐次性）
- 可以使用微分定理和积分定理将时域微积分方程变换为简单的频域代数方程。
- 在求拉普拉斯逆变换时，通常使用部分分式分解的办法，以及表 14.2 的各种运算，将 s 域表达式简化为若干项的组合，而这些项均可以直接从变换表（比如表 14.1）中查到。
- 当只需要求 $f(t=0^+)$ 和 $f(t\to\infty)$ 的值时，可以使用初值定理和终值定理。

习题

1. 求下面各项的复频率：(a)$v(t)=5$ V；(b)$i(t)=3\cos 9t$ μA；(c)$i(t)=2.5e^{-8t}$ mA；(d)$v(t)=65e^{-1000t}\cos 1\,000t$ V；(e)$v(t)=8+2\cos t$ mV。
2. 求下面各式的复共轭：(a)$6-j$；(b)9；(c)$-j\,30$；(d)$5e^{-j6}$；(e)$24\angle -45°$；(f)$\dfrac{4-j18}{3.33+j}$；(g)$\dfrac{5\angle 0.1°}{4-j7}$；(h)$4-22\angle 92.5°$。
3. 令复时变电流 $\mathbf{i}(t)$ 的实部为 $i(t)$。求(a)$i_x(t)$，已知 $\mathbf{i}_x(t)=(4-j7)e^{(-3+j15)t}$；(b)$i_y(t)$，已知 $\mathbf{i}_y(t)=(4+j7)e^{-3t}(\cos 15t-j\sin 15t)$；(c)$i_A(0.4)$，已知 $\mathbf{i}_A(t)=\mathbf{K}_Ae^{\mathbf{s}_At}$，$\mathbf{K}_A=5-j8$，$\mathbf{s}_A=-1.5+j\,12$；(d)$i_B(0.4)$，已知 $\mathbf{i}_B(t)=\mathbf{K}_Be^{\mathbf{s}_Bt}$，其中 $\mathbf{K}_B$ 为 $\mathbf{K}_A$ 的共轭，$\mathbf{s}_B$ 为 $\mathbf{s}_A$ 的共轭。
4. 一个对准猎户座星云的射电望远镜检测到一个周期电流信号 $i(t)=2.33\cos(279\times$

$10^6 t$) fA。(a)该信号的频率(单位为 Hz)是多少？(b)如果该信号是通过将其流过一个精确的 1 TΩ 的电阻，并测量电阻两端的电压来检测，写出电压信号，用两个复指数的形式表示。

5. 如果某复时变电压可以表示为 $\mathbf{v}_s(t)=(20-j30)e^{(-2+j50)t}$ V，求(a)$\mathbf{v}_s(0.1)$，表示成极坐标形式；(b)$\mathrm{Re}\{\mathbf{v}_s(t)\}$；(c)$\mathrm{Re}\{\mathbf{v}_s(0.1)\}$；(d)$\mathbf{s}$；(e)$\mathbf{s}^*$。
6. 将一个简单 RL 串联电路接到北美的市电电源插座上，已知电源的电压为 $v(t)=179\cos(120\pi t)$ V。如果 $R=100\ \Omega$，$L=500\ \mu$H。(a)求相应的频域电压 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$的复频率；(b)在频域中进行计算，求流过该电路的电流 $\mathbf{I}(\mathbf{s})$；(c)求 $i(t)$。
7. (a)对于图 14.10 所示电路，设 $v_s=10e^{-2t}\cos(10t+30°)$ V，在频域中计算，求出 $\mathbf{I}_x$；(b)求 $i_x(t)$。
8. 将一个简单的 RC 串联电路接到日本的市电电源插座上，已知电源的电压为 $v(t)=339\cos(100\pi t)$ V。如果 $R=2$ kΩ，$C=100\ \mu$F。(a)求相应的频域电压 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$的复频率；(b)在频域中计算，求流过该电路的电流 $\mathbf{I}(\mathbf{s})$；(c)求 $i(t)$。
9. 如图 14.11 所示电路，设 $i_{s1}=20e^{-3t}\cos 4t$ A，$i_{s2}=30e^{-3t}\sin 4t$ A。(a)在频域中计算，求出 $\mathbf{V}_x$；(b)求 $v_x(t)$。

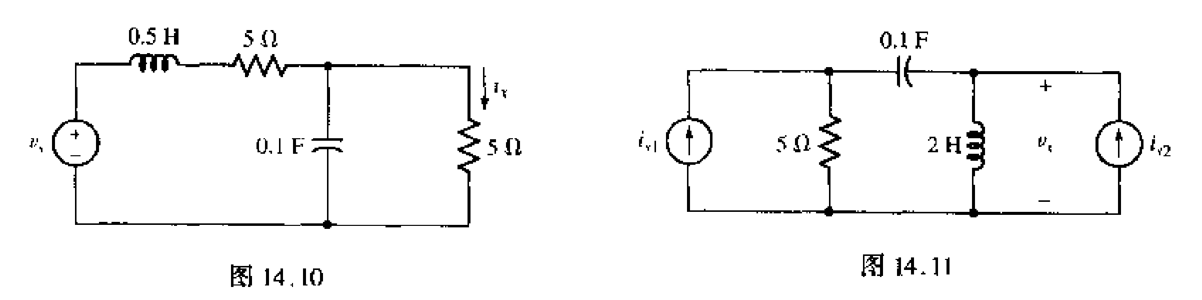


图 14.10　　　　图 14.11

10. 某工业电子设备从外部直流电源输出端看进去的戴维南等效电阻约为 3 mΩ(当该设备空转时比这个值稍大一些)。当供电电源从市电电源插座断开时，可以将它看做是指数电压源 $v(t)=240\sqrt{2}e^{-2t}\times\cos(120\pi t)$ V。(a)求流过电阻的电流 $i(t)$，要求在频域中计算；(b)在时域中计算，检验(a)的答案；(c)如果将一个 1 000 mF 的电容接到供电电源输出端(即与 R_{TH} 并联)，重做(a)。
11. 求 $Ku(t)$的单边拉普拉斯变换，其中 K 为实常数。
12. 根据式(14.14)求下列式子的拉普拉斯变换：(a)$3u(t)$；(b)$3u(t-3)$；(c)$3u(t-3)-3$；(d)$3u(3-t)$。
13. 根据式(14.14)求下列式子的拉普拉斯变换：(a)$2+3u(t)$；(b)$3e^{-8t}$；(c)$u(-t)$；(d)K，其中 K 为实常数。
14. 某电流源提供给 1 Ω 电阻的电流为 $4e^{-t}u(t)$ mA。(a)求电阻两端电压的频域表达式；(b)记住 $\mathbf{s}=\sigma+j\omega$，画出当 $\omega=0$ 时，频域电流的幅度随 σ 变化的曲线。
15. 将电压源 $v(t)=5u(t)-5u(t-2)$ V 接到一个 1 Ω 的电阻上。(a)求电压的频域表达式；(b)求流过电阻的电流频域表达式。
16. 确定拉普拉斯变换存在时 σ 的取值范围，如果当 $f(t)$等于：(a)$t+1$；(b)$(t+1)u(t)$；(c)$e^{50t}u(t)$；(d)$e^{50t}u(t-5)$；(e)$e^{-50t}u(t-5)$。

17. 求下列函数的单边拉普拉斯变换：(a)$8e^{-2t}[u(t+3)-u(t-3)]$；(b) $8e^{2t}[u(t+3)-u(t-3)]$；(c) $8e^{-2|t|}[u(t+3)-u(t-3)]$。

18. 求下面的单边拉普拉斯变换：(a)$\mathcal{L}^{-1}\{s^{-1}\}$；(b)$1+u(t)+[u(t)]^2$；(c)$t\,u(t)-3$；(d)$1-\delta(t)+\delta(t-1)-\delta(t-2)$。

19. 不用式(14.15)求下面的逆变换：(a) $\frac{1}{s+3}$；(b)1；(c)s^{-2}；(d)275；(e)$\frac{s^2}{s^3}$。

20. 设 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的拉普拉斯变换存在，证明 $\mathcal{L}\{f_1(t)+f_2(t)\}=\mathcal{L}\{f_1(t)\}+\mathcal{L}\{f_2(t)\}$。

21. 利用拉普拉斯变换的定义式计算当 $f(t)$ 等于下列式子时 $\mathbf{F}(1+j2)$ 的值：(a)$2u(t-2)$；(b)$2\delta(t-2)$；(c)$e^{-t}u(t-2)$。

22. 计算下列式子：(a)$\int_{-\infty}^{\infty} 8\sin 5t\,\delta(t-1)\,dt$；(b)$\int_{-\infty}^{\infty}(t-5)^2\delta(t-2)\,dt$；(c)$\int_{\infty}^{-\infty} 5e^{-3000t}\delta(t-3.333\times10^{-4})\,dt$；(d)$\int_{-\infty}^{\infty} K\delta(t-2)\,dt$，其中 K 为实常数。

23. 当 $f(t)$ 等于下列函数时，使用(单边)拉普拉斯变换的定义求 $\mathbf{F}(\mathbf{s})$：(a)$[u(5-t)][u(t-2)]u(t)$；(b)$4u(t-2)$；(c)$4e^{-3t}u(t-2)$；(d)$4\delta(t-2)$；(e)$5\delta(t)\sin(10t+0.2\pi)$。

24. 计算下列式子：

(a)$\int_{-\infty}^{\infty}\cos 500t\,\delta(t)\,dt$；(b)$\int_{-\infty}^{\infty} t^5\delta(t-2)\,dt$；(c)$\int_{-\infty}^{\infty} 2.5e^{-0.001t}\delta(t-1\,000)\,dt$；

(d)$\int_{-\infty}^{\infty} -K^2\delta(t-c)\,dt$，其中 K 为实常数。

25. 当 $f(t)$ 等于下列函数时，使用单边拉普拉斯变换的定义求 $\mathbf{F}(\mathbf{s})$：(a)$[2u(t-1)][u(3-t)]u(t^3)$；(b)$2u(t-4)$；(c)$3e^{-2t}u(t-4)$；(d)$3\delta(t-5)$；(e)$4\delta(t-1)[\cos\pi t-\sin\pi t]$。

26. 不必计算积分，也不使用 MATLAB，计算下列式子的拉普拉斯逆变换：(a)$5s^{-1}-16+(s+4.4)^{-1}$；(b)$1-s^{-1}+s^{-2}$；(c)$5(s+7)^{-1}+88s^{-1}+\frac{17}{(s+6)(s+1)}$。

27. 某 2 kΩ 电阻两端电压的频域表达式为 $\mathbf{V}(\mathbf{s})=5s^{-1}$ V，当 $t=1$ ms 时，流过该电阻的电流是多少？

28. 流过一个 100 MΩ 电阻的电流的频域表达式为 $5(s+10)^{-1}$ pA。(a)画出电阻两端的电压 $v(t)$ 随时间变化的曲线；(b)当 $t=100$ ms 时电阻吸收的功率是多少？(c)在什么时候电阻两端的电压降为其最大值的 1%？

29. 求 $f(t)$，如果 $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ 等于(a)$[(s+1)/s]+[2/(s+1)]$；(b)$(e^{-s}+1)^2$；(c)$2e^{-(s+1)}$；(d)$2e^{-3s}\cosh 2s$。

30. 如果 $\mathbf{N}(\mathbf{s})=5s$，当 $\mathbf{D}(\mathbf{s})$ 等于下列情况时，求 $\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{N}(\mathbf{s})/\mathbf{D}(\mathbf{s})\}$：(a)$s^2-9$；(b)$(s+3)(s^2+19s+90)$；(c)$(4s+12)(8s^2+6s+1)$；(d)用 MATLAB 验证(a)～(c)的解答。

31. 求 $f(t)$，如果 $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ 等于(a)$5/(s+1)$；(b) $5/(s+1)-2/(s+4)$；(c)$18/[(s+1)(s+4)]$；(d)$18s/[(s+1)(s+4)]$；(e)$18s^2/[(s+1)(s+4)]$。

32. 如果 $\mathbf{N}(\mathbf{s})=2s^2$，当 $\mathbf{D}(\mathbf{s})$ 等于下列情况时，求 $\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{N}(\mathbf{s})/\mathbf{D}(\mathbf{s})\}$：(a)$s^2-1$；(b)$(s+3)(s^2+19s+90)$；(c)$(8s+12)(16s^2+12s+2)$；(d)用 MATLAB 验证(a)～(c)的解答。

33. 求 $f(t)$，如果 $\mathbf{F}(s)$ 等于(a) $\frac{2}{s}-\frac{3}{s+1}$；(b) $\frac{2s+10}{s+3}$；(c) $3e^{-0.8s}$；(d) $\frac{12}{(s+2)(s+6)}$；(e) $\frac{12}{(s+2)^2(s+6)}$。

34. 如果 $\mathbf{F}(s)=2-s^{-1}+\frac{\pi}{(s^3+4s^2+5s+2)}$，求 $\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{F}(s)\}$。

35. 对下列有理函数进行部分分式分解，并求出相应的时域函数：(a) $\mathbf{F}(s)=[(s+1)(s+2)]/[s(s+3)]$；(b) $\mathbf{F}(s)=(s+2)/[s^2(s^2+4)]$。

36. 求下列方程的拉普拉斯变换：(a) $5di/dt-7d^2i/dt^2+9i=4$；(b) $m\frac{d^2p}{dt^2}+\mu_f\frac{dp}{dt}+kp(t)=0$，该方程描述了一个简单的减震系统的"无作用力"响应("force-free" response)；(c) $\frac{d\Delta n_p}{dt}=-\frac{\Delta n_p}{dt}+G_L$，它描述了 P 型硅在受到光照时其过剩电子($\Delta n_p$)的复合速率($G_L$ 为正比于光照强度的常数)。

37. 如果 $f(0^-)=-3$ 以及 $15u(t)-4\delta(t)=8f(t)=6f'(t)$，通过对微分方程两边求拉普拉斯变换，解出 $\mathbf{F}(s)$，再做逆变换求出 $f(t)$。

38. 参看图 15.12 所示的 RL 电路，(a)列出流过电感的电流 $i_L(t)$ 的微分方程；(b)求 $i_L(t)$ 的拉普拉斯变换 $\mathbf{I}_L(s)$；(c)对 $\mathbf{I}_L(s)$ 做拉普拉斯逆变换求出 $i_L(t)$。

39. (a)求出图 14.13 电路中 $v_C(0^-)$ 和 $v_C(0^+)$ 的值；(b)列出当 $t>0$ 时 $v_C(t)$ 的方程。(c)用拉普拉斯变换的方法求出 $\mathbf{V}_C(s)$ 然后求 $v_C(t)$。

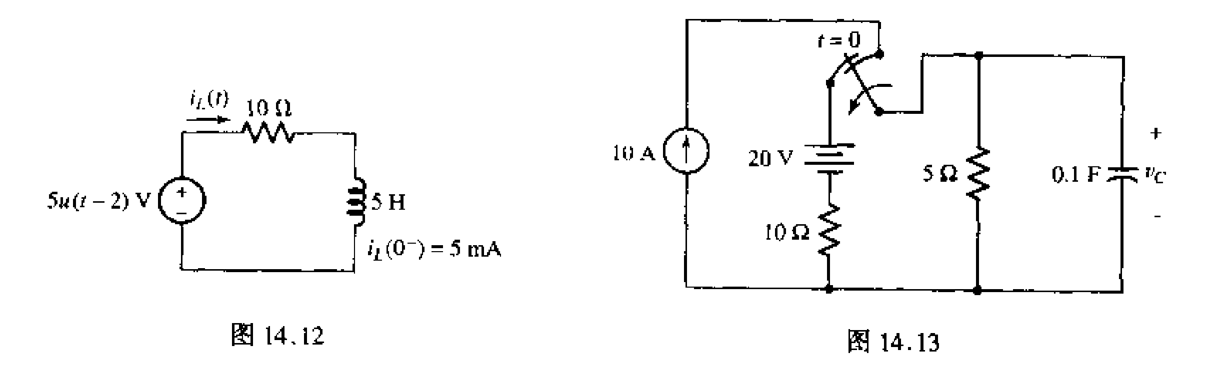


图 14.12　　　　图 14.13

40. (a)将电压源 $v_s(t)=-5u(t)$ V 与图 14.12 中的电压源 $5u(t-2)$ 串联，重做习题 38；(b)画出电感电流的函数曲线，并用 PSpice 仿真进行比较。

41. 给出微分方程 $12u(t)=20f'_2(t)+3f_2(t)$，其中 $f_2(0^-)=2$，对该方程做拉普拉斯变换，解出 $\mathbf{F}_2(s)$，然后求出 $f_2(t)$。

42. 求下列式子的拉普拉斯逆变换：(a) $2/s-4$；(b) $s/(s^2+99)$；(c) $1/(s^2+5s+6)-5$；(d) s；(e) s^2。

43. 给出下面两个微分方程 $x'+y=2u(t)$ 和 $y'-2x+3y=8u(t)$，其中 $x(0^-)=5$，$y(0^-)=8$，求 $x(t)$ 和 $y(t)$。

44. 如果 $\mathbf{F}(s)$ 等于下列式子，求 $f(t)$：(a) $8s+8+8s^{-1}$，$f(0^-)=0$；(b) $s^2/(s+2)-s+2$。

45. (a)求图 14.14 所示电路中 $i_C(0^-)$ 和 $i_C(0^+)$ 的值；(b)列出当 $t>0$ 时 $i_C(t)$ 的方程；

(c)用拉普拉斯变换的方法求出 $\mathbf{I}_C(\mathbf{s})$ 并求其逆变换 $v_C(t)$。

46. 求 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$，如果 $v(t)$ 等于(a)$4\cos(100t)$ V；(b)$2\sin(10^3t) - 3\cos(100t)$ V；(c)$14\cos(8t) - 2\sin(8°)$ V；(d)$\delta(t) + \sin(6t)u(6t)$；(e)$\cos(5t)\sin(3t)$ V。

47. 电阻 R，电容 C，电感 L 和理想电流源 $i_s = 100e^{-5t}u(t)$ A 并联在一起。设电流源两端的电压为 v，它的正极为 $i_s(t)$ 离开电流源的那一端。那么 $i_s = v' + 4v + 3\int_{0^-}^{t} v\,dx$。(a)求 R，L 和 C；(b)用时域拉普拉斯变换的方法求 $v(t)$。

48. 求 $\mathcal{L}\{v(t)\}$，如果 $v(t)$ 等于(a)$7 + (t-2)u(t-2)$ V；(b)$e^{-t+2}u(t-2)$ V；(c)$48\delta(t-1)u(t-1)$ V。

49. 如图 14.15 所示电路，列出关于 i_C 的微积分方程，并对该方程作拉普拉斯变换，求出 $\mathbf{I}_C(\mathbf{s})$，然后作逆变换求出 $i_C(t)$。

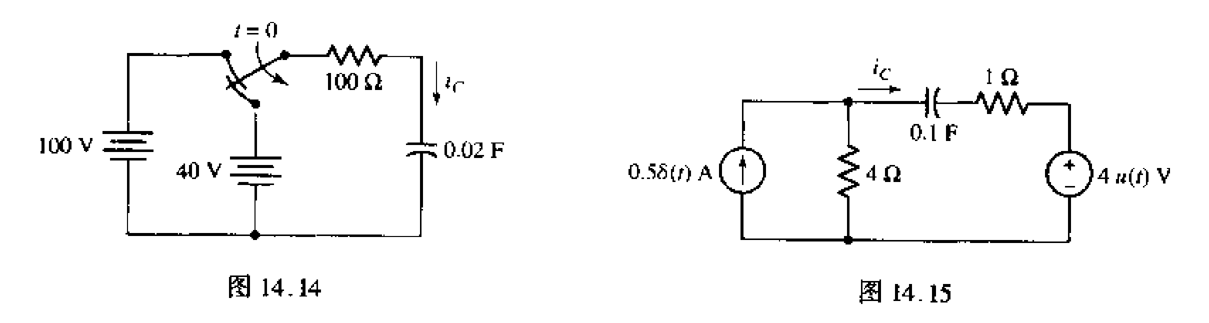


图 14.14　　　　图 14.15

50. 给出微分方程 $v' + 6v + 9\int_{0^-}^{t} v(z)\,dz = 24(t-2)u(t-2)$，设 $v(0^-) = 0$，求 $v(t)$。

51. 求时域函数的初值 $f(0^+)$ 和终值 $f(\infty)$，其相应的拉普拉斯变换为：(a)$5(\mathbf{s}^2+1)/(\mathbf{s}^3+1)$；(b)$5(\mathbf{s}^2+1)/(\mathbf{s}^4+16)$；(c)$(\mathbf{s}+1)(1+e^{-4\mathbf{s}})/(\mathbf{s}^2+2)$。

52. 不求出 $f(t)$，确定下列变换对应的 $f(0^+)$ 和 $f(\infty)$：(a)$(2\mathbf{s}^2+6)/[\mathbf{s}(\mathbf{s}^2+5\mathbf{s}+2)]$；(b)$2e^{-\mathbf{s}}/(\mathbf{s}+3)$；(c)$(\mathbf{s}^2+1)/(\mathbf{s}^2+5)$。

53. 求下列变换对应时间函数的 $f(0^+)$ 和 $f(\infty)$：(a)$5(\mathbf{s}^2+1)/(\mathbf{s}+1)^3$；(b)$5(\mathbf{s}^2+1)/[\mathbf{s}(\mathbf{s}+1)^3]$；(c)$(1-e^{-3\mathbf{s}})/\mathbf{s}^2$。

54. 令 $f(t) = (1/t)(e^{-at} - e^{-bt})u(t)$。(a)求 $\mathbf{F}(\mathbf{s})$；(b)分别计算等式 $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \lim\limits_{\mathbf{s}\to\infty}[\mathbf{sF}(\mathbf{s})]$ 两边的极限。

55. 求下列拉普拉斯变换函数相应的时域函数的初值和终值(如果不存在，则指出)：

(a)$\dfrac{8\mathbf{s}-2}{\mathbf{s}^2+6\mathbf{s}+10}$；(b)$\dfrac{2\mathbf{s}^3-\mathbf{s}^2-3\mathbf{s}-5}{\mathbf{s}^3+6\mathbf{s}^2+10\mathbf{s}}$；(c)$\dfrac{8\mathbf{s}-2}{\mathbf{s}^2-6\mathbf{s}+10}$；(d)$\dfrac{8\mathbf{s}^2-2}{(\mathbf{s}+2)^2(\mathbf{s}+1)(\mathbf{s}^2+6\mathbf{s}+10)}$。

第 15 章　s 域电路分析

本章要点：

- 将"阻抗"概念推广到复频域
- 学习画频域等效电路，用电流源或电压源表示初始条件
- 建立 s 域的节点、网孔、叠加、电源变换、戴维南和诺顿等效电路分析方法
- 使用 MATLAB 来处理 s 域的代数表达式和求解逆变换
- 求电路传递函数的极点和零点
- 利用卷积确定系统响应
- 画出 s 域表达式随 σ 和 ω 的变化曲线

15.1　引言

在上面的章节中，已经建立了复频域分析的概念，同时介绍了拉普拉斯变换（Laplace Transform）及其在解微分方程中的应用。经过一段练习，已经习惯于通过时域和频域之间的变换来解决问题了。下面将把这种有效工具应用到结构化电路分析中，利用这些方法能有效地求解任何线性电路的完全响应（包括瞬态响应和稳态响应）。

15.2　Z(s)和 Y(s)

在正弦稳态分析中，将电阻、电容和电感统一看成阻抗来处理，这使得相位的概念变得非常重要。同时，前面还介绍了节点分析法和网孔分析法、叠加原理、电压源和电流源转换等方法，以及戴维南等效和诺顿等效电路。可以将这些概念推广到 s 域，因为正弦稳态只是其特殊情形。

15.2.1　频域中的电阻

从最简单的情况开始分析，考虑电阻连接到电压源 $v(t)$ 的情况。根据欧姆定律，有：

$$v(t) = Ri(t)$$

对两边分别进行拉普拉斯变换得：

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = R\mathbf{I}(\mathbf{s})$$

可以看到，电压的频域表示除以电流的频域表示就是电阻 R，即：

$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) \equiv \frac{\mathbf{V}(\mathbf{s})}{\mathbf{I}(\mathbf{s})} = R \tag{15.1}$$

这是在频域考虑的，因此称之为阻抗，其单位仍取为欧姆（Ω）。这与正弦稳态分析中得到的结果一样，电阻的阻抗与频率无关。电阻的导纳 $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ 定义为 $\mathbf{I}(\mathbf{s})$ 与 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ 的比，等于 $1/R$，单位为西门子（S）。

15.2.2 频域中的电感

接下来，考虑电感接到时变电压源 $v(t)$ 的情形，如图 15.1(a)所示。已知：

$$v(t)=L\frac{di}{dt}$$

两边分别进行拉普拉斯变换，得：

$$\mathbf{V}(s)=L[s\mathbf{I}(s)-i(0^-)] \tag{15.2}$$

这里得到两项：$sL\mathbf{I}(s)$ 和 $Li(0^-)$。当电感初始时刻储存的能量为 0，即 $i(0^-)=0$ 时，有：

$$\mathbf{V}(s)=sL\mathbf{I}(s)$$

因此：

$$\mathbf{Z}(s)\equiv\frac{\mathbf{V}(s)}{\mathbf{I}(s)}=sL \tag{15.3}$$

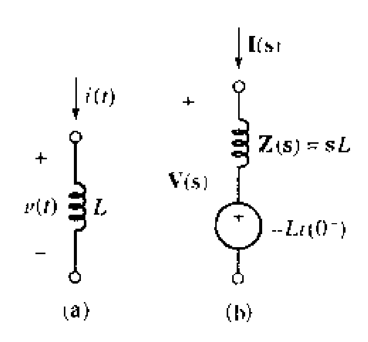


图 15.1　(a)时域中的电感；(b)频域中电感的完整模型，由阻抗 sL 和电压源 $-Li(0^-)$ 组成，其中电压源表示了元件初始条件的影响

如果只对正弦稳态响应感兴趣，可以进一步简化式(15.3)。这时可以忽略电感的初始状态，因为它只影响瞬态响应，令 $s=j\omega$，得：

$$\mathbf{Z}(j\omega)=j\omega L$$

这与第 10 章中得到得结果一致。

15.2.3 s 域中电感的建模

虽然式(15.3)中定义的 $\mathbf{Z}(s)$ 称为电感的阻抗，但是必须记住其中隐含了初始电流为零的假定。更一般的情况是，在 $t=0$ 时刻电感储存了能量，这时，式(15.3)的定义就不能充分反映电感在频域中的特性。不过，可以将电感看做是一个阻抗和电压源或电流源的组合的模型，以将电感的初始状态考虑进去。首先，将式(15.2)整理为：

$$\mathbf{V}(s)=sL\mathbf{I}(s)-Li(0^-) \tag{15.4}$$

等式右边第二项为常数：电感 L(单位为亨利)乘以电流 $i(0^-)$(单位为安培)，总的结果是一个与频率有关的项 $sL\mathbf{I}(s)$ 减去一个常数电压项。这时发现，在频域中，可以将电感 L 看成由两个单元组成的模型，如图 15.1(b)所示。

图 15.1(b)中，频域中的电感模型由一个阻抗 sL 和一个电压源 $Li(0^-)$ 组成，根据欧姆定律，阻抗 sL 两端的电压为$[sL]\mathbf{I}(s)$。由于图 15.1(b)所示的由两个单元组成的电感模型是线性的，因此，同样可以将前面介绍的电路分析方法用于 s 域中。比如，可以对该模型进行电源

变换，使得阻抗 $\mathbf{s}L$ 与电流源$[-Li(0^-)]/\mathbf{s}L=-i(0^-)/\mathbf{s}$ 并联。由式(15.4)可以解出 $\mathbf{I(s)}$：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I}(\mathbf{s}) &= \frac{\mathbf{V}(\mathbf{s}) + Li(0^-)}{\mathbf{s}L} \\
&= \frac{\mathbf{V}(\mathbf{s})}{\mathbf{s}L} + \frac{i(0^-)}{\mathbf{s}}
\end{aligned} \tag{15.5}
$$

在等式右边同样得到两项，第一项为导纳 $1/\mathbf{s}L$ 乘以 $\mathbf{V(s)}$，第二项的单位虽然为"安培·秒"但它仍代表电流。因此，可以用两个元素的模型来表示该方程：即用一个导纳 $1/\mathbf{s}L$ 和一个电流源 $i(0^-)/\mathbf{s}$ 的并联来表示，如图 15.2 所示。这样，电感模型可以用图 15.1(b)表示，也可以用图 15.2 表示。在分析包含电感的电路时，究竟使用哪个模型，要看哪个使得列出的方程更简单。需要注意的是，图 15.2 中所示的电感是用导纳 $\mathbf{Y(s)}=1/\mathbf{s}L$ 来进行标注的，也可以将其看成阻抗 $\mathbf{Z(s)}=\mathbf{s}L$，使用哪种方式进行标注主要取决于各人的习惯和哪个更方便。

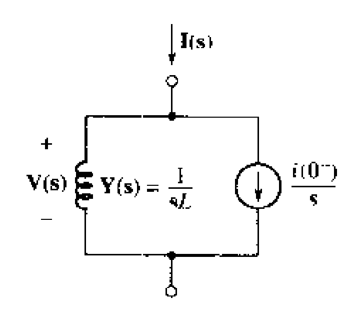


图 15.2 另一个频域中的电感模型，由导纳 $1/\mathbf{s}L$ 和电流源 $i(0^-)/\mathbf{s}$ 组成

下面简单解释一下有关单位的问题。当对电流 $i(t)$进行拉普拉斯变换时，对时间进行了积分，因此，严格地说 $\mathbf{I(s)}$的单位为"安培·秒"；类似地，$\mathbf{V(s)}$的单位为"伏特·秒"。但是，习惯上省略"秒"而取 $\mathbf{I(s)}$的单位为"安培"，取 $\mathbf{V(s)}$的单位为"伏特"。除非详细推究类似式(15.5)这样的方程，其中的项 $i(0^-)/\mathbf{s}$ 看起来与方程左边的 $\mathbf{I(s)}$的单位冲突，否则沿用这个习惯一般不会有什么问题。下面将继续使用"安培"或者"伏特"来度量这些"相量"(phasor quantities)，在对方程的单位进行仔细分析时，必须记住其中隐含了单位"秒"。

例题 15.1 如图 15.3(a)所示，已知初始电流 $i(0^-)=1$ A，计算电压 $v(t)$

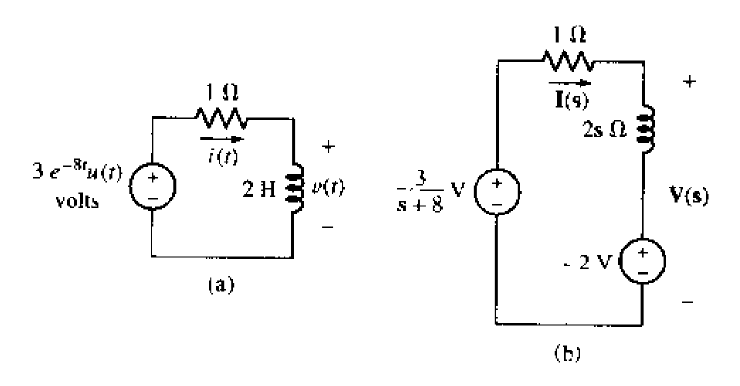


图 15.3 (a)一个简单的电阻－电感电路，求电压 $v(t)$；(b)频域等价电路，通过使用串联电压源 $-Li(0^-)$，将电感的初始电流包含进来

首先将图 15.3(a)所示的电路转换为其频域等效电路,如图 15.3(b)所示。其中,指数衰减电压源在频域中表示为 3/(s + 8) V,而电感在频域中可用两元素的模型表示为:阻抗 $sL = 2s\ \Omega$ 和独立电压源 $-Li(0^-) = -2(1) = -2$ V。

要求的是 V(s),而它的逆变换为 $v(t)$ 需要注意的是 V(s)指的是整个电感模型两端的电压,而不只是阻抗($sL = 2s\ \Omega$)两端的电压。

记住,感兴趣的只是 V(s),因此可以使用任何可行的电路分析的办法来求解 V(s)。这里可以直接写出:

$$\mathbf{I}(s) = \frac{\left[\frac{3}{s+8} + 2\right]}{1 + 2s} = \frac{s + 9.5}{(s+8)(s+0.5)}$$

又

$$\mathbf{V}(s) = 2s\mathbf{I}(s) - 2$$

所以:

$$\mathbf{V}(s) = \frac{2s(s+9.5)}{(s+8)(s+0.5)} - 2$$

在对该式做拉普拉斯逆变换之前,有必要花一点时间将其化简,得:

$$\mathbf{V}(s) = \frac{2s - 8}{(s+8)(s+0.5)}$$

进行部分分式分解(笔算或者借助于 MATLAB),可得:

$$\mathbf{V}(s) = \frac{3.2}{s+8} - \frac{1.2}{s+0.5}$$

查表 14.1,可得逆变换为:

$$v(t) = [3.2e^{-8t} - 1.2e^{-0.5t}]u(t)$$

练习

15.1　如图 15.4 所示,求电流 $i(t)$。

答案: $\frac{1}{3}[1 - 13e^{-4t}]u(t)$A

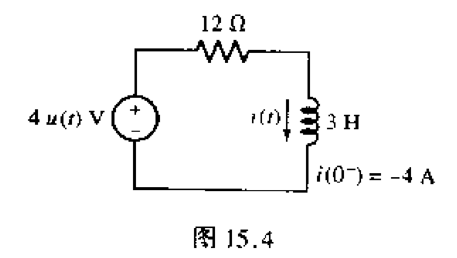


图 15.4

15.2.4 s 域中电容的建模

同样的想法也可以用于 s 域中的电容中。沿用无源符号规则，如图 15.5(a)所示，可以建立方程：

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

两边进行拉普拉斯变换得：

$$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = C[\mathbf{s}\mathbf{V}(\mathbf{s}) - v(0^-)]$$

或者：

$$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}C\mathbf{V}(\mathbf{s}) - Cv(0^-) \tag{15.6}$$

可以将其看做是导纳 $\mathbf{s}C$ 和电流源 $Cv(0^-)$ 并联的模型，如图 15.5(b)所示。对电流源进行等效变换（沿用无源符号规则），又可以得到电容的另一个等效模型，该模型为阻抗 $1/\mathbf{s}C$，源 $v(0^-)/\mathbf{s}$ 串联的形式，如图 15.5(c)所示。

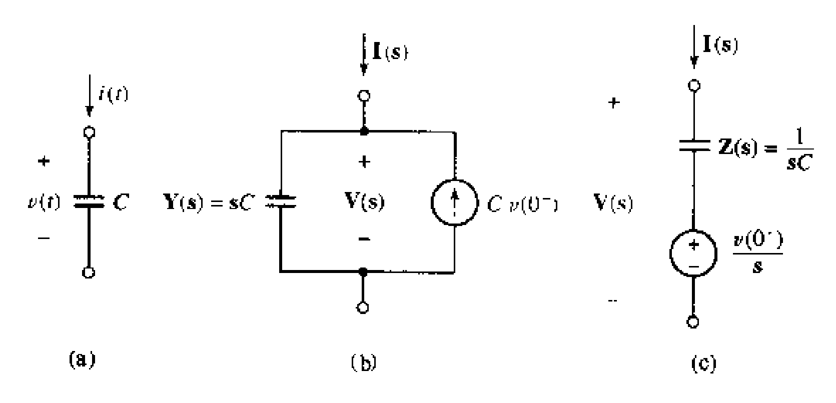


图 15.5 (a)时域中的电容，已标出 $v(t)$ 和 $i(t)$；(b)电容的频域模型，其中电容的初始电压为 $v(0^-)$；(c)通过电源变换得到的等效模型

在使用 s 域的等效模型过程中，在将初始条件包含进来时，要注意不要用错独立电源。电感的初始条件由 $i(0^-)$ 给出，既可以用电压源表示，也可以用电流源表示，取决于所使用的模型；电容的初始条件由 $v(0^-)$ 给出，同样，既可以用电压源表示，也可以用电流源表示。在进行 s 域分析时，初学者常犯的一个错误是总是使用 $v(0^-)$ 作为电压源，在对电感进行分析时也是如此。

例题 15.2 如图 15.6(a)所示，设初始电压 $v_C(0^-) = -2$ V，求 $v_C(t)$。

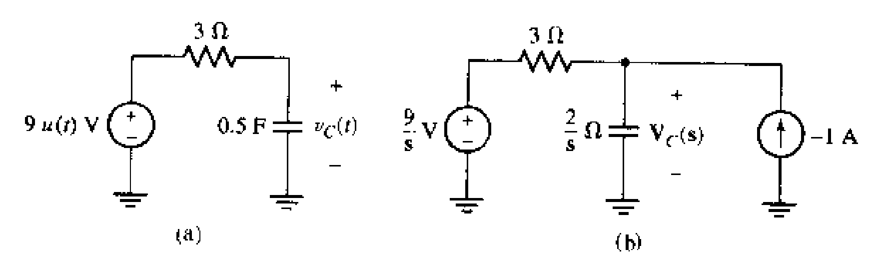


图 15.6 (a)一个简单的电路，求电压 $v_C(t)$；(b)频域等效电路，使用基于电流源的模型表示电容的初始条件

- 弄清问题的目标：

  要得到电容电压的表达式 $v_C(t)$。

- 收集已知信息：

  题中给出了电容的初始电压为 −2 V。

- 选择最适合问题的已有方法：

  第一步，画出频域的等效电路模型。由于电容的初始电压不为 0，这时，需要确定使用哪一种等效模型。对这样一个简单电路，任何一种模型并不比另一种要好，因此使用基于电流源的模型，如图 15.6(b)所示。

- 建立适当的方程组：

  继续进行分析，可列出如下简单节点方程：

$$-1 = \frac{\mathbf{V}_C}{2/\mathbf{s}} + \frac{\mathbf{V}_C - 9/\mathbf{s}}{3}$$

- 确定是否还需要其他信息：

  存在一个方程和一个未知量，其中未知量为电容电压的频域表达形式。

- 试解：

  由方程可以解出 $\mathbf{V}_C$：

$$\mathbf{V}_C = \frac{18/\mathbf{s} - 6}{3\mathbf{s} + 2} = -2 \times \frac{(\mathbf{s} - 3)}{\mathbf{s}(\mathbf{s} + 2/3)}$$

  进行部分分式分解可得：

$$\mathbf{V}_C = \frac{9}{\mathbf{s}} - \frac{11}{\mathbf{s} + 2/3}$$

  对该式进行拉普拉斯逆变换可以得到 $v_s(t)$：

$$v_C(t) = 9u(t) - 11e^{-2t/3}u(t) \text{ V}$$

  或者，可以进一步简写为：

$$v_C(t) = [9 - 11e^{-2t/3}]u(t) \text{ V}$$

- 证实所得解是否合理和满足要求：

将 $t = 0$ 代入，得 $v_C(t) = -2$ V，这和初始条件一致；另外，当 $t \to \infty$ 时，$v_C(t) \to 9$ V，这也和所预想的一致，如图 15.6(a)所示，当瞬态过程结束以后，电容两端的电压应该等于 9 V。

练习

15.2　使用基于电压源的电容模型，重做例题 15.2。

　　答案：$[9 - 11e^{-2t/3}]u(t)$ V

表 15.1 总结了本节所得出的结论，注意，这里使用了无源符号规则。

表 15.1 在时域和频域中各元件的响应小结

时域	频域	
电阻		
$v(t) = R\,i(t)$	$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = R\,\mathbf{I}(\mathbf{s})$	$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \frac{1}{R}\mathbf{V}(\mathbf{s})$
$i(t)$；+ $v(t)$ − ；R	$\mathbf{I}(\mathbf{s})$；+ $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ − ；$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = R$	$\mathbf{I}(\mathbf{s})$；+ $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ − ；$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \frac{1}{R}$
电感		
$v(t) = L\frac{di}{dt}$	$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}L\mathbf{I}(\mathbf{s}) - Li(0^-)$	$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}(\mathbf{s})}{\mathbf{s}L} + \frac{i(0^-)}{\mathbf{s}}$
$i(t)$；+ $v(t)$ − ；L	$\mathbf{I}(\mathbf{s})$；+ $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ − ；$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}L$；$-Li(0^-)$	$\mathbf{I}(\mathbf{s})$；+ $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ − ；$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \frac{1}{\mathbf{s}L}$；$\frac{i(0^-)}{\mathbf{s}}$
电容		
$i(t) = C\frac{dv}{dt}$	$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{I}(\mathbf{s})}{\mathbf{s}C} + \frac{v(0^-)}{\mathbf{s}}$	$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}C\mathbf{V}(\mathbf{s}) - Cv(0^-)$
$i(t)$；+ $v(t)$ − ；C	$\mathbf{I}(\mathbf{s})$；+ $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ − ；$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = \frac{1}{\mathbf{s}C}$；$\frac{v(0^-)}{\mathbf{s}}$	$\mathbf{I}(\mathbf{s})$；$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}C$；+ $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ − ；$Cv(0^-)$

15.3 *s* 域节点分析和网孔分析

在第 10 章中，学习了如何将正弦电源驱动的电路变换为其频域等效电路的方法。进行这种变换的好处是显而易见的，因为这样就不再需要求解积分微分方程了。对那些只需要求稳态响应的电路来说，使用节点分析和网孔分析可以得到关于 $j\omega$ 的代数表达式，其中 ω 为电源的频率。

现在知道，可以将阻抗的概念推广到复频域（$\mathbf{s} = \sigma + j\omega$）这种更一般的情况。将电路从时域变换到频域，使用节点分析和网孔分析得到的同样只是代数方程，只不过此时得到的是关于复频域 s 的方程，解这种方程通常需要用到变量代换、克莱姆法则（Cramer's rule）或者使用能进行符号运算的软件（如 MATLAB）。在这一节中，将通过两个难度适中的例子来更加详细地

讨论这些问题。不过，暂时放下这些例子，先来看看 MATLAB 能做什么。

计算机辅助分析

在上一章已经看到，可以用 MATLAB 来求 s 域中有理函数的留数，这使得求解拉普拉斯逆变换变得非常容易。但是，MATLAB 的功能远不止这些，它还包含许多内置的代数表达式运算程序。事实上，在本例中将看到，MATLAB 甚至可以对电路分析中得到的有理函数直接做拉普拉斯逆变换。

首先来看看 MATLAB 是怎样进行代数表达式运算的。在 MATLAB 中，表达式通过撇号(')来定义，并以字符串的形式来存储。比如，以前将多项式 $\mathbf{p(s)} = \mathbf{s}^3 - 12\mathbf{s} + 6$ 表示为矢量的形式：

```
EDU >> p = [1 0  -12 6];
```

但是，还可以把它表示为符号表达式：

```
EDU >> p = 's^3 - 12 * s + 6'
```

在 MATLAB 中，这两种表示形式并不是等价的，它们是两个不同的概念。在对代数表达式进行符号运算时，必须使用第二种表达形式。在解联立方程组时，采用第二种表达形式特别有用，可以从下面几个例子中看到这一点。考虑以下方程组：

$$(3\mathbf{s} + 10)\mathbf{I}_1 - 10\mathbf{I}_2 = \frac{4}{\mathbf{s}+2}$$

$$10\mathbf{I}_1 + (4\mathbf{s} + 10)\mathbf{I}_2 = \frac{-2}{\mathbf{s}+1}$$

根据 MATLAB 的符号表达式表示法，定义两个字符串变量：

```
EDU >> eqn1 = '(3 * s + 10) * I1 - 10 * I2 = 4/(s + 2) ';
EDU >> eqn2 = '- 10 * I1 + (4 * s + 10) * I2 = - 2/(s + 1) ';
```

注意到每个字符串均包含了一个方程，需要从这两个方程中解出 I1 和 I2，可以使用 MATLAB 函数 solve()来帮助求解，将方程(定义成字符串)列表和未知量列表(同样定义成字符串)作为参数来调用这个函数：

```
EDU >> solution = solve(eqn1, eqn2, 'I1', 'I2');
```

返回的结果保存在变量 solution 中，这种格式稍微有点特殊，称为“结构”，C 程序员对此应该比较熟悉。这时，需要知道的是如何从中提取出想要的解。如果输入：

```
EDU >> I1 = solution.I1
```

那么，可以得到：

```
I1 = 2 * (4 * s + 9)/(s + 1)/(6 * s^2 + 47 * s + 70)
```

这说明关于 s 的多项式已经赋给了变量 I1，类似地，可以得到变量 I2。

现在，使用函数 ilaplace( )可以直接得到拉普拉斯逆变换：

```
EDU >> i1 = ilaplace(I1)
```

```
i1 =
10/29 * exp( - t) - 172/667 * exp( - 35/6 * t) - 2/23 * exp( - 2 * t)
```

这样，对于从节点和网孔分析中得到的联立方程组，使用 MATLAB 很快就可以得到它的解以及相应的拉普拉斯逆变换。如果有必要，可以使用 ezplot(i1)函数来看解的形状。需要注意的是，复杂的表达式有时会把 MATLAB 弄"糊涂"，这时，ilaplace()将不能返回一个有意义的解。

这里有必要提一下其他一些相关的函数，使用它们可以快速地检验手工计算出来的结果是否正确。函数 numden()可以将有理函数分离成两个变量：一个为分子部分，另一个为分母部分。例如：

```
EDU >> [N,D] = numden(I1)
```

返回两个代数表达式，分别保存在 N 和 D 中：

```
N =
8 * s + 18
D =
(s + 1) * (6 * s^2 + 47 * s + 70)
```

为了使用以前用过的函数 residue()，需要将每个符号(字符串)表达式转化为以多项式系数为元素的矢量，这可以通过函数 sym2poly()来实现：

```
EDU >> n = sym2poly(N)
```

在对 D 进行转换之前，首先要使用函数 expand()将其转化为简单多项式，否则，residue()将返回错误的值。

```
EDU >> Dpoly = expand(D)
Dpoly =
6 * s^3 + 53 * s^2 + 117 * s + 70
```

然后，就可以求出留数：

```
EDU >> d = sym2poly(Dpoly);
EDU >> [r p y] = residue(n,d)
  r =          p =         y =
    -0.2579    -5.8333    [ ]
    -0.0870    -2.0000
     0.3448    -1.000
```

这和使用 ilaplace()得到的结果一致。

下面利用这些新学的 MATLAB 技巧(或者固执地用其他方法，如克莱姆法则和直接变量代换)，来分析几个电路。

例题 15.3 如图 15.7(a)所示，初始时刻电路中没有存储能量，求两个网孔电流 i_1 和 i_2

和以前一样，首先画出相应的频域等效电路。因为在 $t = 0^-$ 时，电路中没有存储能量，于是可以将 $\frac{1}{3}$ F 的电容替换为 3/s Ω 的阻抗，将 4 H 的电感替换为 4s Ω 的阻抗，如图 15.7(b)

所示。

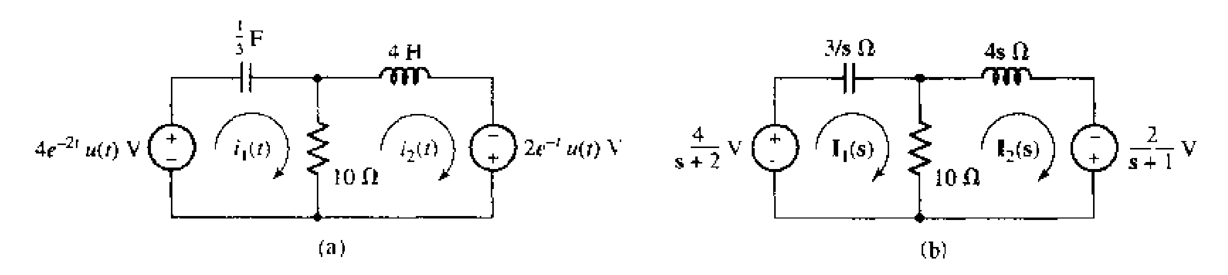


图 15.7　(a) 两个网孔的电路，求网孔电流；(b)频域等效电路

然后，列出两个网孔方程：

$$-\frac{4}{s+2}+\frac{3}{s}\mathbf{I}_1+10\mathbf{I}_1-10\mathbf{I}_2=0$$

或者：

$$\left(\frac{3}{s}+10\right)\mathbf{I}_1-10\mathbf{I}_2=\frac{4}{s+2}\qquad(\text{网孔 }1)$$

与

$$-\frac{2}{s+1}+10\mathbf{I}_2-10\mathbf{I}_1+4s\mathbf{I}_2=0$$

或

$$-10\mathbf{I}_1+(4s+10)\mathbf{I}_2=\frac{2}{s+1}\qquad(\text{网孔 }2)$$

求解 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$，得：

$$\mathbf{I}_1=\frac{2s(4s^2+19s+20))}{(20s^4+66s^3+73s^2+57s+30)}\ \text{A}$$

与

$$\mathbf{I}_2=\frac{30s^2+43s+6}{(s+2)(20s^3+26s^2+21s+15)}\ \text{A}$$

剩下的所有工作就是对每个函数求拉普拉斯逆变换，然后可以得到：

$$i_1(t)=-96.39e^{-2t}-344.8e^{-t}+841.2e^{-0.15t}\cos 0.8529t+197.7e^{-0.15t}\sin 0.8529t\ \text{mA}$$

与

$$i_2(t)=-481.9e^{-2t}-241.4e^{-t}+723.3e^{-0.15t}\cos 0.8529t+472.8e^{-0.15t}\sin 0.8529t\ \text{mA}$$

已知在 $t=0^-$ 时刻电感中没有电流，所以，$i_2(0^-)=0$，于是 $i_2(0^+)$ 也必然为 0。上面的解答满足这个要求吗？

练习

15.3　如图 15.8 所示电路，求网孔电流 i_1 和 i_2，假定在初始时刻即 $t=0^-$ 时电路没有存

储能量。

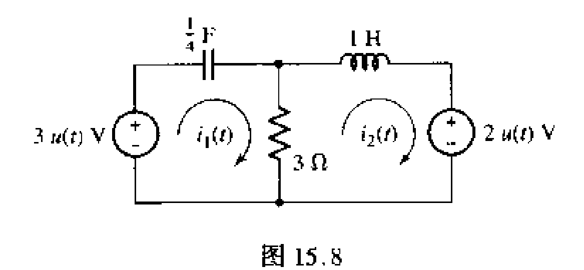


图 15.8

答案：$i_1 = e^{-2t/3}\cos\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}t\right) + (\sqrt{2}/8)e^{-2t/3}\sin\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}t\right)$；

$$i_2 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{-2t/3}\cos\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}t\right) + (13\sqrt{2}/24)e^{-2t/3}\sin\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}t\right)$$

例题 15.4 如图 15.9(a)所示电路，用节点分析法求出电压 v_1，v_2 和 v_3，已知在 $t = 0^-$ 时电路没有存储能量

电路中包含三个独立的能量存储元件，但在 $t = 0^-$ 时刻均没有存储能量，因此，可以将它们分别转换为相应的阻抗，如图 15.9(b)所示。注意到，图中存在一个受节点电压 $v_2(t)$ 控制的电流源。

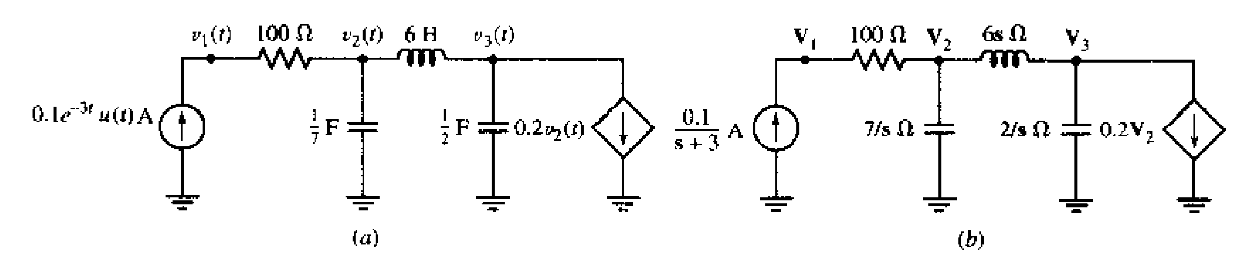


图 15.9 (a)四个节点的电路，其中包含两个电容和一个电感，它们在 $t = 0^-$ 时均没有存储能量；(b)频域等效电路

从节点 1 开始，列出下面的节点方程：

$$\frac{0.1}{\mathbf{s}+3} = \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{100}$$

即

$$\frac{10}{\mathbf{s}+3} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 \qquad (\text{节点 } 1)$$

对节点 2，有：

$$0 = \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{100} + \frac{\mathbf{V}_2}{7/\mathbf{s}} + \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_3}{6\mathbf{s}}$$

即

$$-42\mathbf{s}\mathbf{V}_1 + (600\mathbf{s}^2 + 42\mathbf{s} + 700)\mathbf{V}_2 - 700\mathbf{V}_3 = 0 \qquad (\text{节点 } 2)$$

最后，对节点 3，有：

$$-0.2\mathbf{V}_2=\frac{\mathbf{V}_3-\mathbf{V}_2}{6\mathbf{s}}+\frac{\mathbf{V}_3}{2/\mathbf{s}}$$

即

$$(1.2\mathbf{s}-1)\mathbf{V}_2+(3\mathbf{s}^2+1)\mathbf{V}_3=0$$

求解以上关于节点电压的方程组，可以得到：

$$\mathbf{V}_1=3\times\frac{100\mathbf{s}^3+7\mathbf{s}^2+150\mathbf{s}+49}{(\mathbf{s}+3)(30\mathbf{s}^3+45\mathbf{s}+14)}$$

$$\mathbf{V}_2=7\times\frac{3\mathbf{s}^2+1}{(\mathbf{s}+3)(30\mathbf{s}^3+45\mathbf{s}+14)}$$

$$\mathbf{V}_3=-1.4\times\frac{6\mathbf{s}-5}{(\mathbf{s}+3)(30\mathbf{s}^3+45\mathbf{s}+14)}$$

剩下的最后一步是对各电压分别进行拉普拉斯逆变换，可以得到 $t>0$ 时的解：

$$v_1(t)=9.789e^{-3t}+0.061\,73e^{-0.2941t}+0.148\,8e^{0.1471t}\cos(1.251t)+0.051\,72e^{0.1471t}\sin(1.251t)\ \text{V}$$

$$v_2(t)=-0.210\,5e^{-3t}+0.061\,73e^{-0.2941t}+0.148\,8e^{0.1471t}\cos(1.251t)+0.051\,72e^{0.1471t}\sin(1.251t)\ \text{V}$$

$$v_3(t)=-0.034\,59e^{-3t}+0.066\,31e^{-0.2941t}-0.031\,72e^{0.1471t}\cos(1.251t)-0.063\,62e^{0.1471t}\sin(1.251t)\ \text{V}$$

可以看出，响应以指数方式增长，这是由于受控电流源影响的结果。事实上，电路将变得失控，这意味着在某个时刻，某个元件将会溶化、爆炸或者产生其他类似的不良后果。虽然使用 s 域方法分析这种电路工作量比较大，但是与采用时域分析方法相比，其优势还是很明显的。

练习

15.4　如图 15.10 所示电路，采用节点分析方法，求解电压 v_1，v_2 和 v_3。假定 $t=0^-$ 时电感中没有存储能量。

答案：$v_1(t)=-30\delta(t)-14u(t)$ V；$v_2(t)=-14u(t)$ V；$v_3(t)=24\delta(t)-14u(t)$ V

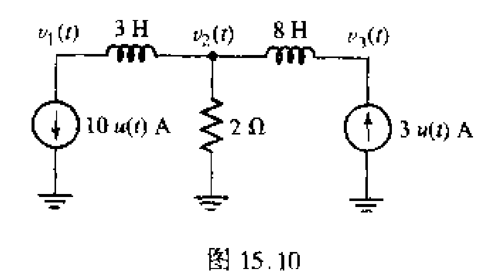


图 15.10

15.4 其他电路分析方法

对某个特定的电路而言,根据求解的目标不同,通过仔细选择分析方法,往往可以减少工作量。举个例子来说,对于一个含有215个独立电源的电路,采用线性叠加原理来计算一般是不可取的,因为这时一共需要分析215个独立电路!而如果将无源元件(比如电容和电感)看做阻抗,就可以使用第3章、第4章和第5章中学过的任何电路分析方法来分析它们的 s 域等效电路,这样可能会简单得多。

在 s 域中,线性叠加原理、电源变换、戴维南定理和诺顿定理均适用。

例题 15.5 使用电源变换化简图15.11(a)所示的电路,并求出电压 $v(t)$ 的表达式

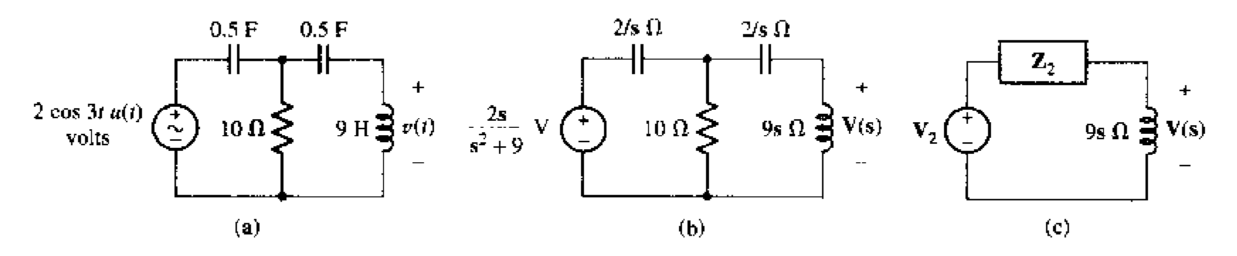


图15.11 (a)需要化简的电路(使用电源变换);(b)频域表示;(c)化简后的电路

和以前一样,首先将该电路转化为相应的频域等效电路。由于图中没有给出初始电流和初始电压,而电压源包含因子 $u(t)$,因此可以断定在初始时刻,电路中没有存储能量。这样,可以画出其频域等效电路,如图15.11(b)所示。

接下来,为了把两个 $2/\mathbf{s}\ \Omega$ 的阻抗和 $10\ \Omega$ 的电阻合并在一起,连续进行几次电源变换。因为 $9\mathbf{s}\ \Omega$ 的阻抗上的电压为所求电压 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$,因此不合并该阻抗。现在,将电压源和最左边的 $2/\mathbf{s}\ \Omega$ 的阻抗转化为下面的电流源与 $2/\mathbf{s}\ \Omega$ 的阻抗并联的形式:

$$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \left(\frac{2\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2+9}\right)\left(\frac{\mathbf{s}}{2}\right) = \frac{\mathbf{s}^2}{\mathbf{s}^2+9}\ \mathrm{A}$$

转换后,得到 $\mathbf{Z}_1 = (2/\mathbf{s}) \parallel 10 = 20/(10\mathbf{s}+2)\ \Omega$,它与电流源并联。再进行下一次电源变换,可以得到电压源 $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$ 为:

$$\mathbf{V}_2(\mathbf{s}) = \left(\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2+9}\right)\left(\frac{20}{10\mathbf{s}+2}\right)$$

该电压源与 $\mathbf{Z}_1$ 和剩下的 $2/\mathbf{s}$ 阻抗串联,将 $\mathbf{Z}_1$ 和这个 $2/\mathbf{s}$ 阻抗合并,得到新的阻抗 $\mathbf{Z}_2$ 为:

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{20}{10\mathbf{s}+2} + \frac{2}{\mathbf{s}} = \frac{40\mathbf{s}+4}{\mathbf{s}(10\mathbf{s}+2)}\ \Omega$$

图15.11(c)画出了最后得到的电路。这时,根据分压关系,可以得到电压 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ 的表达式为:

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \left(\frac{\mathbf{s}^2}{\mathbf{s}^2+9}\right)\left(\frac{20}{10\mathbf{s}+2}\right)\frac{9\mathbf{s}}{9\mathbf{s}+\left[\dfrac{40\mathbf{s}+4}{\mathbf{s}(10\mathbf{s}+2)}\right]}$$

$$= \frac{180s^4}{(s^2+9)(90s^3+18s^2+40s+4)}$$

分母中的两个因子均含有复根 使用 MATLAB 进行部分分式分解并求出留数：

```
EDU >> d1 = 's^2 + 9';
EDU >> d2 = '90 * s^3 + 18 * s^2 + 40 * s + 4';
EDU >> d = symmul(d1,d2);
EDU >> denominator = expand(d);
EDU >> den = sym2poly(denominator);
EDU >> num = [180 0 0 0 0];
EDU >> [r p y] = residue(num,den);
```

于是得到：

$$\mathbf{V}(s) = \frac{1.047 + j0.0716}{s - j3} + \frac{1.047 - j0.0716}{s + j3}$$
$$- \frac{0.0471 - j0.0191}{s + 0.04885 - j0.6573} - \frac{0.0471 + j0.0191}{s + 0.04885 + j0.6573} + \frac{5.590 \times 10^{-5}}{s + 0.1023}$$

注意到，含有复极点的项均与其共轭项一起出现，对任何物理系统，复极点总是以共轭对的形式出现。

对各项做逆变换，将 $1.047 + j0.0716$ 表示为 $1.049e^{j3.912^\circ}$，将 $0.047 + j0.0191$ 表示为 $0.05083e^{j157.9^\circ}$，得到：

$$v(t) = 1.049e^{j3.912^\circ}e^{j3t}u(t) + 1.049e^{-j3.912^\circ}e^{-j3t}u(t)$$
$$+ 0.05083e^{-j157.9^\circ}e^{-0.04885t}e^{-j0.6573t}u(t)$$
$$+ 0.05083e^{+j157.9^\circ}e^{-0.04885t}e^{+j0.6573t}u(t) + 5.590 \times 10^{-5}e^{-0.1023t}u(t)$$

将复指数形式转换为正弦形式，这样可以将电压写成简单一些的表达形式：

$$v(t) = [5.590 \times 10^{-5}e^{-0.1023t} + 2.098\cos(3t + 3.912^\circ)$$
$$+ 0.1017e^{-0.04885t}\cos(0.6573t + 157.9^\circ)]u(t)\ \text{V}$$

练习

15.5 使用电源变换的方法，将图 15.12 所示的电路化简为 s 域中一个电流源和一个阻抗并联的形式。

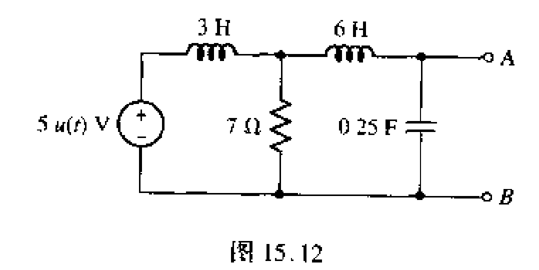
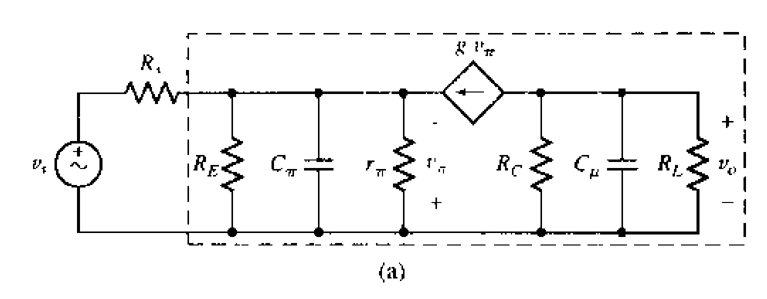


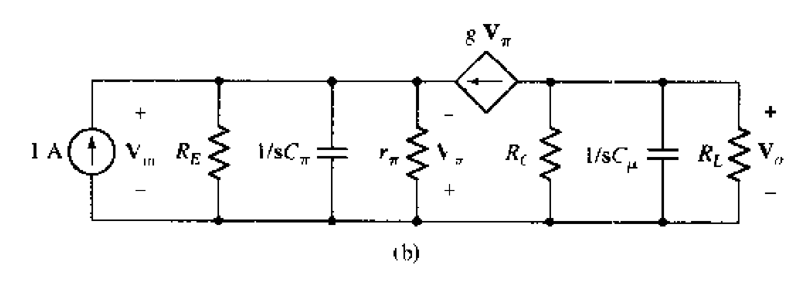
图 15.12

答案：$\mathbf{I}_s = \frac{35}{s_2(18s+163)}$ A，$\mathbf{Z}_s = \frac{72s^2+252s}{18s^3+21s^2+54s+28}$ Ω

例题 15.6 求图 15.13(a)中虚线框中的网络的戴维南等效电路



(a)



(b)

图 15.13 (a)晶体三极管"共基极"放大器等效电路;(b)频域等效电路,用 1 A 的测试电源代替了由 v_s 和 R_s 表示的输入电源

该电路称为晶体三极管共基极放大器的"混合 π"模型。其中,两个电容 C_π 和 C_μ 表示晶体管的内部电容,它们的数量级一般为 pF;电阻 R_L 表示输出设备的戴维南等效阻抗,输出设备可以是扬声器或者半导体激光器等;电压源 v_s 和电阻 R_s 合在一起代表输入设备的戴维南等效电路,输入设备可以是麦克风、光敏电阻或者是无线电天线等。

然后,来确定与输入设备连接的电路的戴维南等效阻抗,通常称之为放大器的输入阻抗。将电路转化为其频域等效电路之后,为求出输入阻抗,将输入设备(v_s 和电阻 R_s)替换为 1 A的"测试"电流源,如图 15.13(b)所示,这时,输入阻抗 $\mathbf{Z}_{in}$ 为:

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{\mathbf{V}_{in}}{1}$$

或者简单地表示为 $\mathbf{V}_{in}$,必须求出在这个 1 A 电流源驱动下,以电阻、电容以及受控源参数 g 表示的 $\mathbf{V}_{in}$的表达式。

对于输入点,列出节点方程:

$$1 + g\mathbf{V}_\pi = \frac{\mathbf{V}_{in}}{\mathbf{Z}_{eq}}$$

其中:

$$\mathbf{Z}_{eq} \equiv R_E \left\| \frac{1}{\mathbf{s}C_\pi} \right\| r_\pi = \frac{R_E r_\pi}{r_\pi + R_E + \mathbf{s}R_E r_\pi C_\pi}$$

因为 $\mathbf{V}_\pi = -\mathbf{V}_{in}$,所以:

$$\mathbf{Z}_{in} = \mathbf{V}_{in} = \frac{R_E r_\pi}{r_\pi + R_E + \mathbf{s}R_E r_\pi C_\pi + gR_E r_\pi}\ \Omega$$

练习

15.6 求出图 15.14 中,与 1 Ω 电阻相连的电路的戴维南等效电路,要求在频域中进行分析。

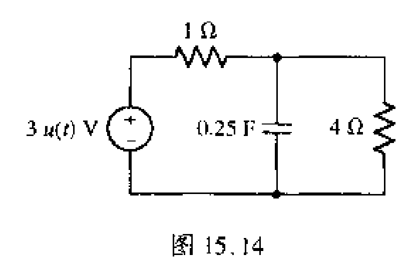


图 15.14

答案:$\mathbf{I}_{sc} = 3(\mathbf{s}+1)/4\mathbf{s}$ A; $\mathbf{Z}_{th} = 4/(\mathbf{s}+1)$ Ω

15.5 极点、零点和传递函数

考虑图 15.15(a)所示的简单电路,其 s 域等效电路如图 15.15(b)所示,使用节点分析可得:

$$0 = \frac{\mathbf{V}_{out}}{1/\mathbf{s}C} + \frac{\mathbf{V}_{out} - \mathbf{V}_{in}}{R}$$

整理并解出 $\mathbf{V}_{out}$,得:

$$\mathbf{V}_{out} = \frac{\mathbf{V}_{in}}{1 + \mathbf{s}RC}$$

或者:

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) \equiv \frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}} = \frac{1}{1 + \mathbf{s}RC} \tag{15.7}$$

H(s)称为该电路的传递函数(transfer function),定义为输出和输入的比值。可以随意指定一个电流是输入量还是输出量,这样,对于同一个电路将有不同的传递函数。在读电路图的时候,一般是从左往右的,因此,设计者们总是尽可能地以左边作为电路的输入端,而右边作为电路的输出端。

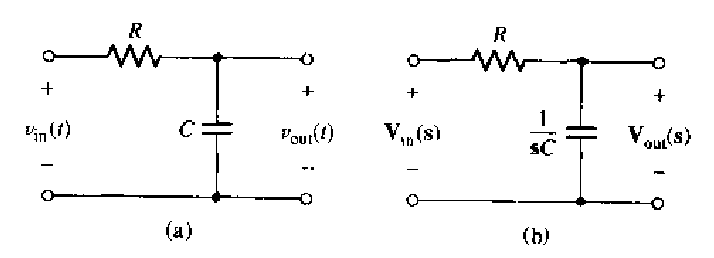


图 15.15 (a)简单的电阻 - 电容电路、输入电压和输出电压均已给定;(b)s 域的等效电路

不管是在电路分析还是在别的工程领域中,传递函数的概念都是非常重要的。这有两个原因,首先,一旦知道了某个电路的传递函数,对任何给定的输入,都可以很容易得到电路的输出,只要将输入的 s 域表达式乘以 H(s),然后对其进行逆变换即可。其次,传递函数的形式包含了电路(或者系统)特性的许多信息,而这些特性正是想要了解的。

下面将看到,为了判断系统的稳定性,需要确定传递函数的极点和零点。式(15.7)可以改写为:

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{1/RC}{\mathbf{s}+1/RC} \tag{15.8}$$

当 $\mathbf{s}\to\infty$ 时，其幅度趋于0，因此，$\mathbf{H}(\mathbf{s})$在 $\mathbf{s}=\infty$ 时有一个零点；当 $\mathbf{s}=-1/RC$ 时，该函数趋于无穷大，因此 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$在 $\mathbf{s}=-1/RC$ 时有一个极点。这些频率称为临界频率，如果可以尽早将它们找出，则能够减小绘制响应曲线的工作量。将在15.7节中讨论响应曲线。

15.6 卷积

这一节要介绍一种方法，使用它可以简化线性电路分析中的如下问题：即给定一个或几个激励函数(forcing function)，确定电路输出响应的表达式。将使用一种称为系统函数(system function)的传递函数来进行求解，后面将看到，系统函数即为电路的单位冲激响应的拉普拉斯变换。

15.6.1 冲激响应

考虑一个没有初始能量储存的线性电路网络 N，以激励函数 $x(t)$作为输入，则在这个电路中的某个点，将产生一个响应函数 $y(t)$。图15.16(a)中画出了电路的框图以及时间函数的草图。因为只有在时间区间 $a<t<b$ 内才有输入，因此只有在 $t>a$ 时，$y(t)$才有输出。

下面需要回答的问题是："如果知道了 $x(t)$的形式，那么 $y(t)$将有什么样的形式呢?"为了回答这个问题，需要对 N 的情况有一些了解。假定知道 N 在单位冲激 $\delta(t)$输入下的响应 $h(t)$，如图15.16(b)所示。通常称函数 $h(t)$为单位冲激响应函数，或者简称为冲激响应，在描述电路特性时这个概念非常重要。

有了拉普拉斯变换的基础，就可以从一个稍微有点不同的角度来看这个问题。设 $x(t)$的拉普拉斯变换为 $\mathbf{X}(\mathbf{s})$，$y(t)$的拉普拉斯变换为 $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$，将传递函数 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$定义为：

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{Y}(\mathbf{s})}{\mathbf{X}(\mathbf{s})}$$

如果 $x(t)=\delta(t)$，那么根据表14.1可知 $\mathbf{X}(\mathbf{s})=1$，于是 $\mathbf{H}(\mathbf{s})=\mathbf{Y}(\mathbf{s})$，因此，这时 $h(t)=y(t)$。

如果假定单位冲激不是作用在 $t=0$，而是 $t=\lambda$，那么可以看到输出发生的惟一变化是有一个时延。也就是说，当输入为 $\delta(t-\lambda)$时，输出为 $h(t-\lambda)$，如图15.16(c)所示。然后，假定输入的不是单位脉冲，而是有一定强度的脉冲，特别是，假设其强度在数值上等于 $t=\lambda$ 时$x(t)$的值，即等于 $x(\lambda)$，这是一个常数。已知对于线性电路而言，输入乘以一个常数将导致输出按相应的比例发生变化，因此，如果输入变为 $x(\lambda)\delta(t-\lambda)$，那么输出响应将变为 $x(\lambda)h(t-\lambda)$，如图15.16(d)所示。

将最后这个输入[即 $x(\lambda)\delta(t-\lambda)$]对所有可能的 λ 进行累加，并将累加的结果作为 N 的激励函数(forcing function)，根据线性原理可知，输出必为 $x(\lambda)h(t-\lambda)$对所有可能的 λ 进行累加的结果。不那么严格地说，输入的积分导致了输出的积分，如图15.16(e)所示。但是，现在输入是什么呢？根据单位冲激的时移特性[1]，可以看到输入正是原来的 $x(t)$。

[1] 在14.5节中介绍了冲激响应的时移特性，可以将其表示为 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$。

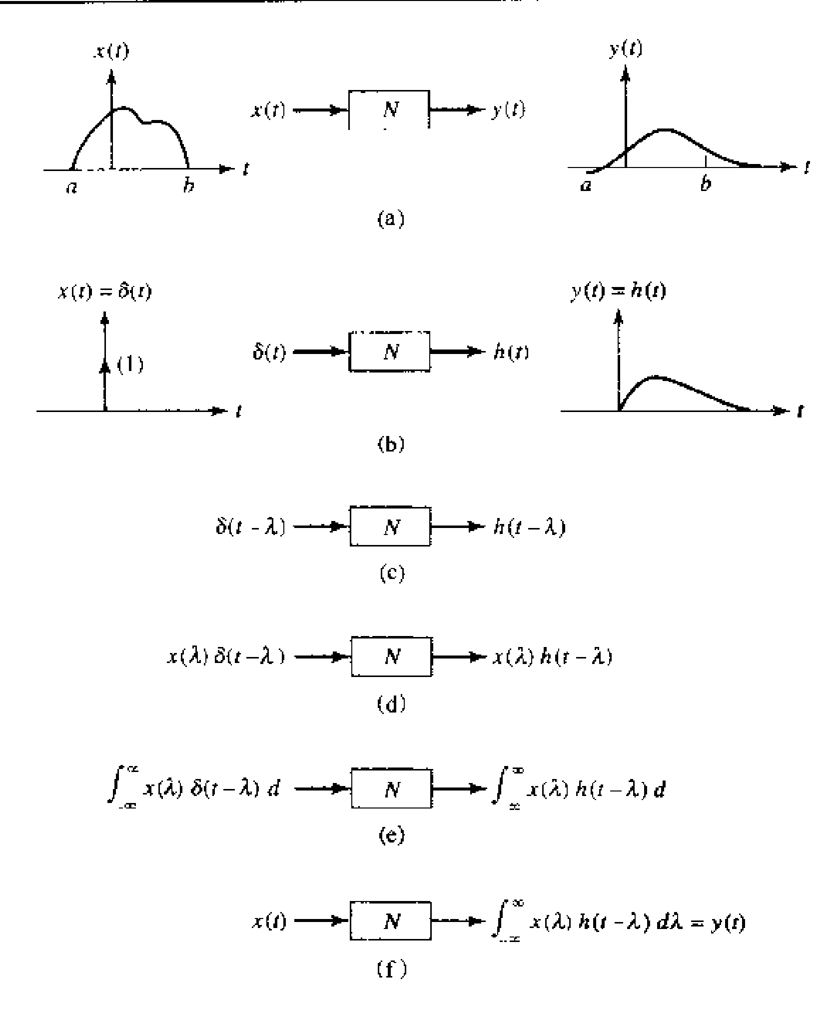


图 15.16　卷积积分的推演过程

15.6.2　卷积积分

现在终于得到了问题的答案。当给定 N 的输入 $x(t)$，并且知道 N 的冲激响应 $h(t)$ 时，其输出或者说响应函数可以表示为：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda \tag{15.9}$$

如图 15.16(f)所示。这个重要的关系称为卷积积分。换句话说，这个方程说明：输出等于输入与冲激响应的卷积，通常将其简写为：

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

注意不要把这个新运算符与乘法相混淆。其中星号读做“与……卷积”。

可以将(15.9)表示为稍有不同但等价的形式。令 $z = t - \lambda$，则 $d\lambda = -dz$，那么 $y(t)$ 的表达式变成：

$$y(t) = \int_{\infty}^{-\infty} -x(t-z)h(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-z)h(z)dz$$

因为积分的结果和积分变量名的选取无关，可以将(15.9)写成：

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(z)h(t-z)dz$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-z)h(z)dz \qquad (15.10)$$

要记住式(15.10)中两种卷积积分的表达形式。

15.6.3 卷积与物理可实现系统

式(15.10)中的结果对任何线性系统都是适用的，然而，通常感兴趣的是物理可实现系统，即那些已经存在或者能够存在的系统，这种系统的特性使得它的卷积积分的形式与一般形式略有不同，系统不能在激励函数作用之前产生响应。特别是，设 $h(t)$ 为系统在 $t=0$ 时单位冲激作用下产生的响应，那么，在 $t<0$ 时，$h(t)$ 并不存在。这样，当 $z<0$ 时，式(15.10)的第二个积分的被积函数等于零；当 $t-z<0$ 或者说 $z>t$ 时，第一个积分的被积函数也等于零。因此，对物理可实现系统，其卷积积分的积分限将有所不同：

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{t} x(z)h(t-z)dz$$
$$= \int_{0}^{\infty} x(t-z)h(z)dz \qquad (15.11)$$

式(15.10)和式(15.11)都是正确的，但是，当谈到线性可实现系统时，后者更为明确。

在进一步讨论冲激函数的重要性之前，先来看一个数值的例子，这样有助于了解卷积积分的计算过程。虽然积分表达式本身很简单，但有时候计算起来却很麻烦，特别是在选取积分范围的时候。

假定输入是一个 $t=0$ 时的矩形电压脉冲，宽度为 1 秒，幅度为 1 V：

$$x(t) = v_i(t) = u(t) - u(t-1)$$

同时，假定输入电路的冲激响应为指数衰减函数：

$$h(t) = 2e^{-t}u(t)$$

需要求的是输出电压 $v_0(t)$。可以立即写出积分形式的解答：

$$y(t) = v_0(t) = v_i(t) * h(t) = \int_{0}^{\infty} v_i(t-z)h(z)dz$$
$$= \int_{0}^{\infty} [u(t-z) - u(t-z-1)][2e^{-z}u(z)]dz$$

得到 $v_o(t)$ 的这种表达式是很简单的，但是积分里面的许多单位阶跃函数却使得化简十分麻烦，因为必须注意被积函数等于零的那些积分区间。

15.6.4 用图解法求卷积

使用图形可以帮助理解卷积积分的含义。首先画出若干条 z 轴，每条 z 轴画在另一条的上方，如图 15.17 所示。知道了 $v_i(t)$ 的形状，即知道了 $v_i(z)$ 的形状，如图 15.17(a)所示。而 $v_i(-z)$ 只是 $v_i(z)$ 相对于变量 z 的翻转，或者说是相对于纵轴的反折，如图 15.17(b)所示。然

后画出 $v_i(t-z)$，这可以将 $v_i(-z)$往右移动 $z=t$ 来得到，如图 15.17(c)所示。在下一条 z 轴上[图 15.17(d)]，画出了冲激响应 $h(z)=2e^{-z}u(z)$。

最后，将 $v_i(t-z)$和 $h(z)$相乘，如图 15.17(e)所示。因为 $h(z)$在 $z=0$[①] 之前没有定义，而 $v_i(t-z)$在 $z>t$ 时没有定义，因此可以看到，在 $t<1$ 时，这两个函数的乘积只有在 $0<z<t$ 时才有非零值；而当 $t>1$ 时，乘积的非零区间为 $(t-1)<z<t$。乘积曲线下面的区域(图中阴影部分)面积在数值上等于 v_o 在指定时刻 t 的输出，如图 15.17(e)所示。当 t 从零到无穷大变化时，乘积曲线下面的区域面积也随着增大，即 $v_o(t)$逐渐增大。但是，当 t 增加到 $t=1$ 时，乘积曲线下面的区域面积开始变小，逐渐趋于零。当 $t<0$ 时，$v_i(t-z)$和 $h(z)$没有重叠区间，因此乘积曲线下面的区域面积为零。下面利用上面这些图形来得到 $v_o(t)$的完整表达式。

当 t 大于 0 小于 1 时，积分区间为 $z=0$ 到 $z=t$；当 t 大于 1 时，积分区间为$(t-z)<z<t$。因此，可以得到：

$$v_o(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \int_0^t 2e^{-z}dz=2(1-e^{-t}), & 0\leqslant t\leqslant 1\\ \int_{t-1}^t 2e^{-z}dz=2(e-1)e^{-t}, & t>1\end{cases}$$

图 15.17(f)中画出了该函数相对于时间变量 t 的曲线，这样就完成了整个求解过程。

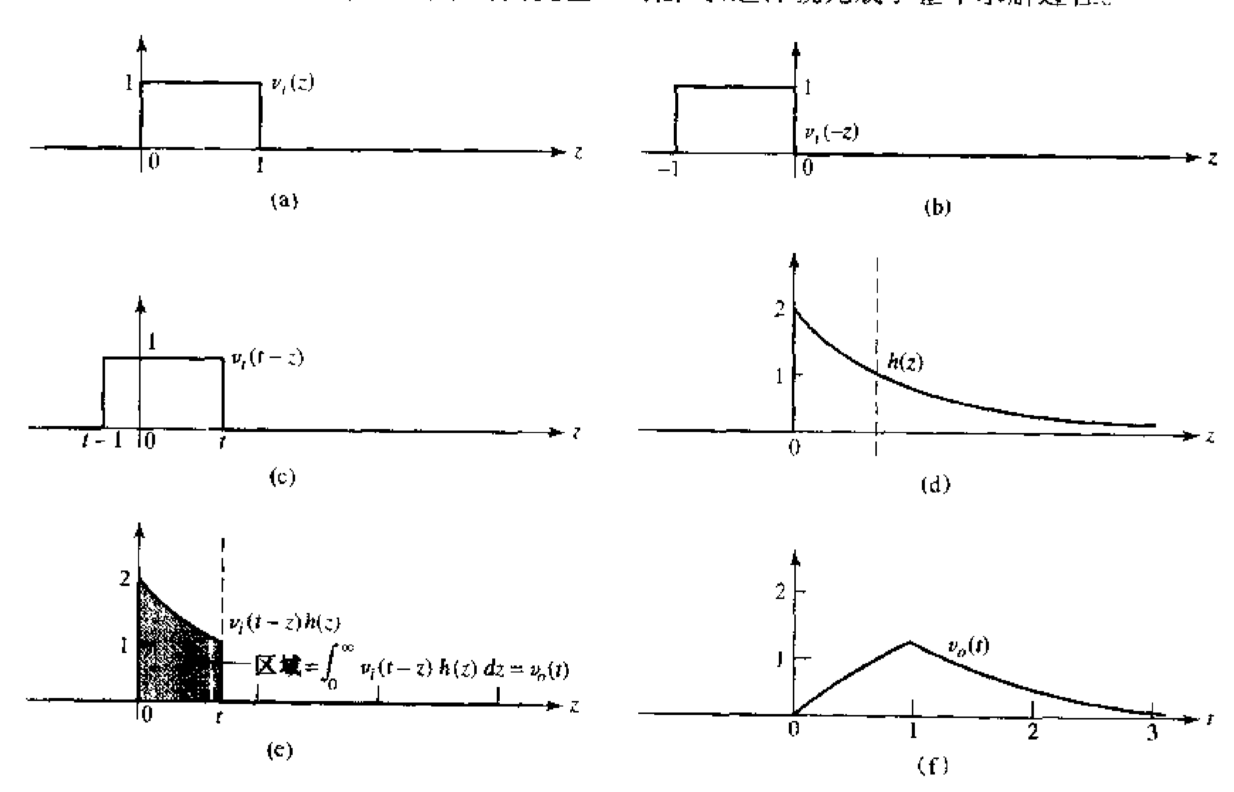


图 15.17　求卷积积分的图解法

① 原文为 $t=0$，有误——译者注。

例题 15.7 将单位阶跃函数 $x(t)=u(t)$ 输入到冲激响应为 $h(t)=u(t)-2u(t-1)+u(t-2)$ 的系统中，求相应的输出 $y(t)=x(t)*h(t)$。

首先，画出 $x(t)$ 和 $h(t)$，如图 15.18 所示，选择式(15.11)中的第一种积分形式来进行计算：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(z)h(t-z)\,dz$$

然后，画出一系列的草图来帮助选取合适的积分区间。图 15.19 依次画出了下面这些函数：输入 $x(z)$；冲激响应 $h(z)$；$h(z)$ 关于纵轴的反折 $h(-z)$ 以及 $h(t-z)$，它可以通过将 $h(-z)$ 往右移动 t 个单位得到（对于这个图，选择 t 的区间为 $0<t<1$）。

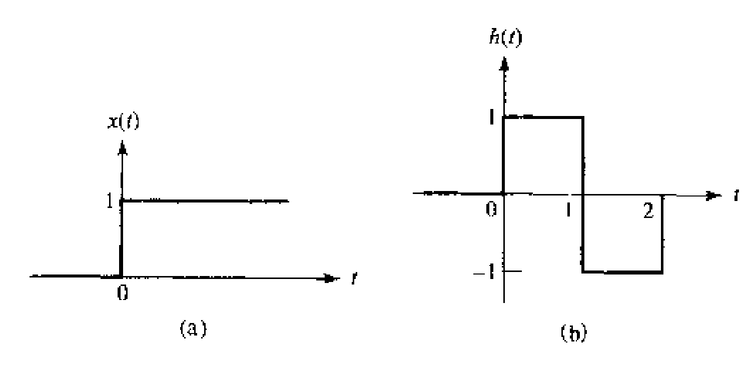


图 15.18 (a)输入信号 $x(t)=u(t)$；(b)线性系统的单位脉冲响应 $h(t)=u(t)-2u(t-1)+u(t-2)$

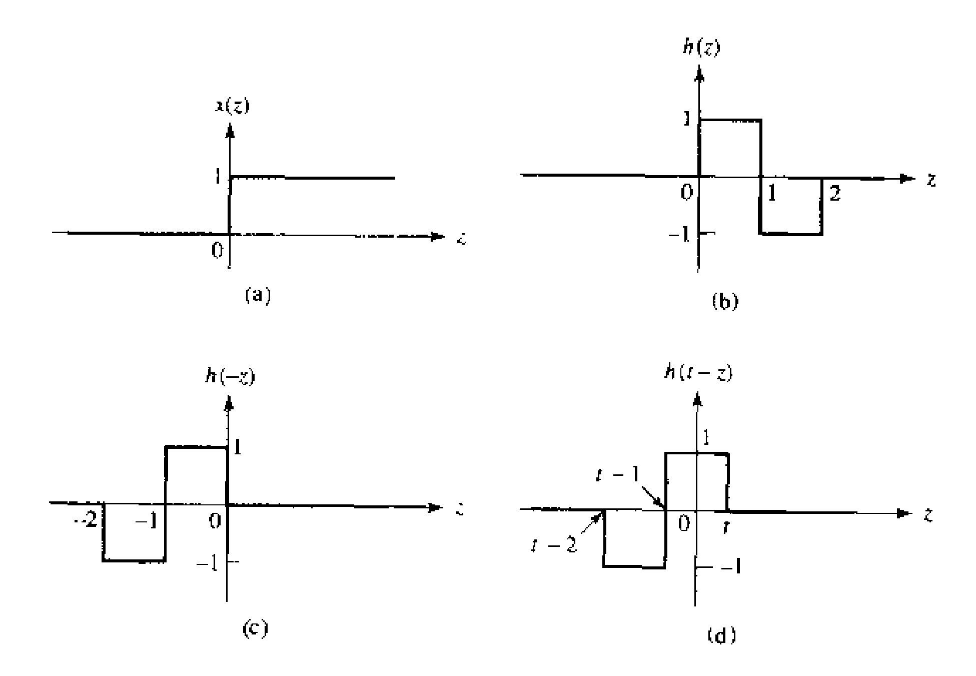


图 15.19 (a)输入信号；(b)以 z 为变量表示的单位冲激响应；(c)由 $h(z)$ 轴反折的 $h(-z)$ 函数；(d)当 $h(-z)$ 右移 t 单位时的 $h(t-z)$ 函数

现在，容易想像出在 t 的各区间下第一个图 $x(z)$ 和最后一个图 $h(t-z)$ 的乘积。当 t 小于 0 时，它们没有重叠区间，因此：

$$y(t)=0,\ t<0$$

对于图 15.19(d)中的曲线，它与 $x(z)$ 的重叠区间为 $z=0$ 到 $z=t$，在每一点上，乘积均为 1，因此：

$$y(t)=\int_0^t(1\times 1)dz=t,\quad 0<t<1$$

当 t 大于 1 小于 2 时，$h(t-z)$ 向右移动了足够远，使得部分负的方波进入阶梯函数的非零区间，这部分负的方波的区间为 $z=0$ 到 $z=t-1$。因此，有：

$$y(t)=\int_0^{t-1}[1\times(-1)]dz+\int_{t-1}^{t}(1\times 1)dz$$

$$=-z\Big|_{z=0}^{z=t-1}+z\Big|_{z=t-1}^{z=t}$$

因此：

$$y(t)=-(t-1)+t-(t-1)=2-t,\quad 1<t<2$$

当 t 大于 2 时，$h(t-z)$ 向右移动了足够远，这时它完全落在 $z=0$ 的右边，于是：

$$y(t)=\int_{t-2}^{t-1}[1\times(-1)]dz+\int_{t-1}^{t}(1\times 1)dz$$

$$=-z\Big|_{z=t-2}^{z=t-1}+z\Big|_{z=t-1}^{z=t}$$

即

$$y(t)=-(t-1)+(t-2)+t-(t-1)=0,\quad t>2$$

将这四段合并起来，得到 $y(t)$ 的连续的曲线如图 15.20 所示。

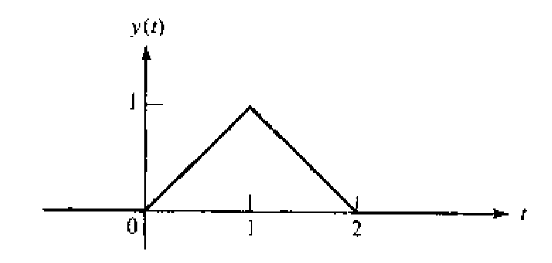


图 15.20　图 15.18 中 $x(t)$ 和 $h(t)$ 的卷积结果

练习

15.7　使用式(15.11)中第二种积分形式重做例题 15.7。

15.8　设网络的冲激响应为 $h(t)=5u(t-1)$，如果输入信号为 $x(t)=2[u(t)-u(t-3)]$，分别求当 t 等于(a) −0.5；(b) 0.5；(c) 2.5；(d) 3.5 时的输出 $y(t)$。

答案：15.8：0；0；15；25

15.6.5　卷积和拉普拉斯变换的关系

设 $\mathbf{F}_1(\mathbf{s})$ 和 $\mathbf{F}_2(\mathbf{s})$ 分别为 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的拉普拉斯变换，考虑 $f_1(t)*f_2(t)$ 的拉普拉斯变换：

$$\mathcal{L}\{f_1(t)*f_2(t)\}=\mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\lambda)f_2(t-\lambda)d\lambda\right\}$$

通常，这两个时域函数的其中之一为作用于线性电路输入端的激励函数，而另一个为电路的单

位冲激响应函数。

因为现在只考虑那些在 $t=0$ 之前等于零的函数(拉普拉斯变换的定义要求做这样的假定),因此,可以将积分的下限取为 0^-,根据拉普拉斯变换的定义,有:

$$\mathcal{L}\{f_1(t)*f_2(t)\}=\int_{0^-}^{\infty}e^{-st}\left[\int_{0^-}^{\infty}f_1(\lambda)f_2(t-\lambda)d\lambda\right]dt$$

因为 e^{-st} 和 λ 无关,可以将这个因子移到里面那个积分中,然后改变积分的顺序,得到:

$$\mathcal{L}\{f_1(t)*f_2(t)\}=\int_{0^-}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty}e^{-st}f_1(\lambda)f_2(t-\lambda)d\lambda\right]dt$$

因为 $f_1(\lambda)$ 与 t 无关,使用相同的技巧,可以将它移到里面那个积分的外面:

$$\mathcal{L}\{f_1(t)*f_2(t)\}=\int_{0}^{\infty}f_1(\lambda)\left[\int_{0^-}^{\infty}e^{-st}f_2(t-\lambda)d\lambda\right]dt$$

然后再对括号中的积分(可以将其中的 λ 视为常数)做变量替换 $x=t-\lambda$:

$$\mathcal{L}\{f_1(t)*f_2(t)\}=\int_{0}^{\infty}f_1(\lambda)\left[\int_{0^-}^{\infty}e^{-s(x+\lambda)}f_2(x)dx\right]d\lambda$$

$$=\int_{0^-}^{\infty}f_1(\lambda)e^{-s\lambda}\left[\int_{0}^{\infty}e^{-sx}f_2(x)dx\right]d\lambda$$

$$=\int_{0^-}^{\infty}f_1(\lambda)e^{-s\lambda}[\mathbf{F}_2(\mathbf{s})]d\lambda$$

$$=\mathbf{F}_2(\mathbf{s})\int_{0}^{\infty}f_1(\lambda)e^{-s\lambda}d\lambda$$

剩下的积分恰好等于 $\mathbf{F}_1(\mathbf{s})$,于是得到:

$$\mathcal{L}\{f_1(t)*f_2(t)\}=\mathbf{F}_1(\mathbf{s})\cdot\mathbf{F}_2(\mathbf{s}) \tag{15.12}$$

这个表达式可以描述为:两个拉普拉斯变换的乘积的逆变换,等于它们各自逆变换的卷积。有时,这个结果在求逆变换时很有用。

例题 15.8 设 $\mathbf{V}(\mathbf{s})=1/(\mathbf{s}+\alpha)(\mathbf{s}+\beta)$,应用卷积定理求出 $v(t)$

前面已经在 14.6 节中用部分分式分解的方法求出了它的逆变换。现在将 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$看做是两个变换的乘积:

$$\mathbf{V}_1(\mathbf{s})=\frac{1}{(\mathbf{s}+\alpha)}$$

和

$$\mathbf{V}_2(\mathbf{s})=\frac{1}{(\mathbf{s}+\beta)}$$

其中:

$$v_1(t)=e^{-\alpha t}u(t)$$

以及:

$$v_2(t)=e^{-\beta t}u(t)$$

立刻可以写出 $v(t)$ 的表达式：

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}_1(\mathbf{s})\mathbf{V}_2(\mathbf{s})\} = v_1(t) * v_2(t) = \int_{0^-}^{\infty} v_1(\lambda)v_2(t-\lambda)d\lambda$$

$$= \int_{0^-}^{\infty} e^{-\alpha\lambda}u(\lambda)e^{-\beta(t-\lambda)}u(t-\lambda)d\lambda = \int_{0}^{t} e^{-\alpha\lambda}e^{-\beta t}e^{\beta\lambda}d\lambda$$

$$= e^{-\beta t}\int_{0^-}^{t} e^{(\beta-\alpha)\lambda}d\lambda = e^{-\beta t}\frac{e^{(\beta-\alpha)t}-1}{\beta-\alpha}u(t)$$

或者，可以写成更简洁的形式：

$$v(t) = \frac{1}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})u(t)$$

这和前面用部分分式分解的方法得到的结果一致。需要注意的是，表达式中必须包含单位阶跃函数 $u(t)$，因为所有的（单边）拉普拉斯变换只对非负的时间范围才有意义。

用这种方法来求解是不是更容易一些？只有那些喜欢做卷积积分的人才不这么认为！当分式分解比较容易时，通常用部分分式分解方法比较简单。但是，一般情况下，在 s 域进行卷积更容易，因为只需要做乘法运算。

练习

15.9　重做例题 15.7，要求在 s 域中进行卷积。

15.6.6　对传递函数进一步的讨论

已经知道，可以通过把输入 $v_i(t)$ 和单位冲激响应 $h(t)$ 进行卷积得到输出 $v_o(t)$。但是必须记住，冲激响应是在所有初始条件为零时、并在 $t=0$ 时输入的单位冲激作用下得到的。在这些前提下，$v_o(t)$ 的拉普拉斯变换为：

$$\mathcal{L}\{v_o(t)\} = \mathbf{V}_o(\mathbf{s}) = \mathcal{L}\{v_i(t) * h(t)\} = \mathbf{V}_i(\mathbf{s})[\mathcal{L}\{h(t)\}]$$

因此，比值 $\mathbf{V}_o(\mathbf{s})/\mathbf{V}_i(\mathbf{s})$ 等于冲激响应的拉普拉斯变换，用 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ 表示：

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}_o(\mathbf{s})}{\mathbf{V}_i(\mathbf{s})} \tag{15.13}$$

从式（15.13）可以看到，冲激响应和传递函数构成拉普拉斯变换对：

$$h(t) \Leftrightarrow \mathbf{H}(\mathbf{s})$$

这个结论很重要，后面将利用它来分析一些电路的特性，而在此之前，分析这些电路很困难。

15.7　S 平面

现在来看一种更加一般的图形表示方法，它表示函数值随变量 s 变化的曲线，也就是说，将响应作为 σ 和 ω 的函数同时绘制出来。把激励函数关于复频率 s 的函数用图形表示出来，在电路分析中，以及在电路设计或者电路综合中，都是很有用，而且很有启发意义。有了复平面（或者说 s 平面）的概念之后，将会发现，根据 s 平面中的临界频率来对电路的行为特性

进行近似是一件很容易的事情。

相反的过程也同样很有意义：如果给定一个期望的响应曲线（比如一个滤波器的频率响应曲线），则可以根据其 s 平面中零点和极点的位置来进行滤波器综合。在分析反馈放大器和自动控制系统不希望出现的振荡时，s 平面也是一个基本的工具。

15.7.1 以 σ 为变量的响应函数

在得到以 $\mathbf{s}$ 为变量的响应函数之前，首先来考虑以 σ 或 ω 的为变量的函数来表示它。比如，假设网络的输入阻抗（或者说是激励点阻抗）由一个 3 Ω 的电阻和一个 4 H 的电感串接而成。它是 $\mathbf{s}$ 的函数，可得：

$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = 3 + 4\mathbf{s}\ \Omega$$

如果想得到以 σ 为变量的该阻抗的函数曲线，可以令 $\mathbf{s} = \sigma + j0$：

$$\mathbf{Z}(\sigma) = 3 + 4\sigma\ \Omega$$

可以看到，它在 $\sigma = -\frac{3}{4}$ 处和无穷远处各有一个零点。在 σ 轴中将这两个临界频率标出，然后确定在某个非临界频率处 $\mathbf{Z}(\sigma)$ 的值[比如取 $\mathbf{Z}(0) = 3$]，就很容易绘制出 $|\mathbf{Z}(\sigma)|$ 随 σ 变化的曲线，如图 15.21 所示，这个图提供了输入为指数激励函数时系统阻抗的信息。特别是，在直流（$\sigma = \omega = 0$）情况下，可以看出其阻抗为 3 Ω，这和预想的一致。

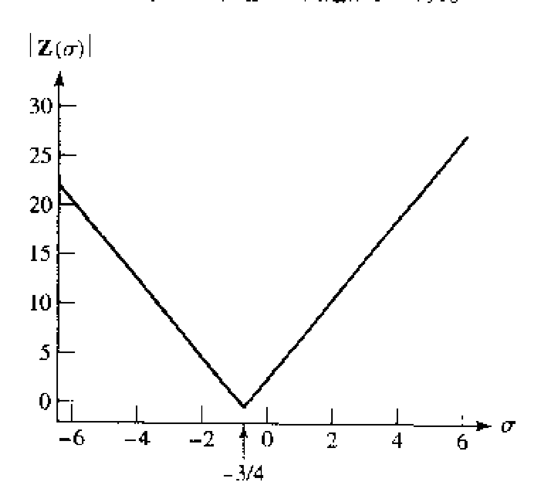


图 15.21 $|\mathbf{Z}(\sigma)|$ 随频率 σ 变化的曲线

15.7.2 以 ω 为变量的响应函数

为了画出响应函数随着角频率 ω 变化的曲线，令 $\mathbf{s} = 0 + j\omega$：

$$\mathbf{Z}(j\omega) = 3 + j4\omega$$

然后可以得到 $\mathbf{Z}(j\omega)$ 以 ω 为变量的幅度函数和相位函数：

$$|\mathbf{Z}(j\omega)| = \sqrt{9 + 16\omega^2} \tag{15.14}$$

$$\text{ang}\ \mathbf{Z}(j\omega) = \tan^{-1}\frac{4\omega}{3} \tag{15.15}$$

从幅度函数 $|\mathbf{Z}(j\omega)|$ 的表达式可以看出，它在无穷远处有惟一的一个极点，在 $\omega=0$ 处有一个最小值，很容易画出它随 ω 变化的曲线。当频率增大时，阻抗的幅度也随着增大，这也和预想的电感特性完全一致。相位函数为反正切函数，当 $\omega=0$ 时，它等于 0；当 $\omega=\pm 90°$ 时，它等于 $\pm\infty$，也很容易画出它随 ω 变化的曲线。图 15.22 中画出了式(15.14)和式(15.15)的曲线。

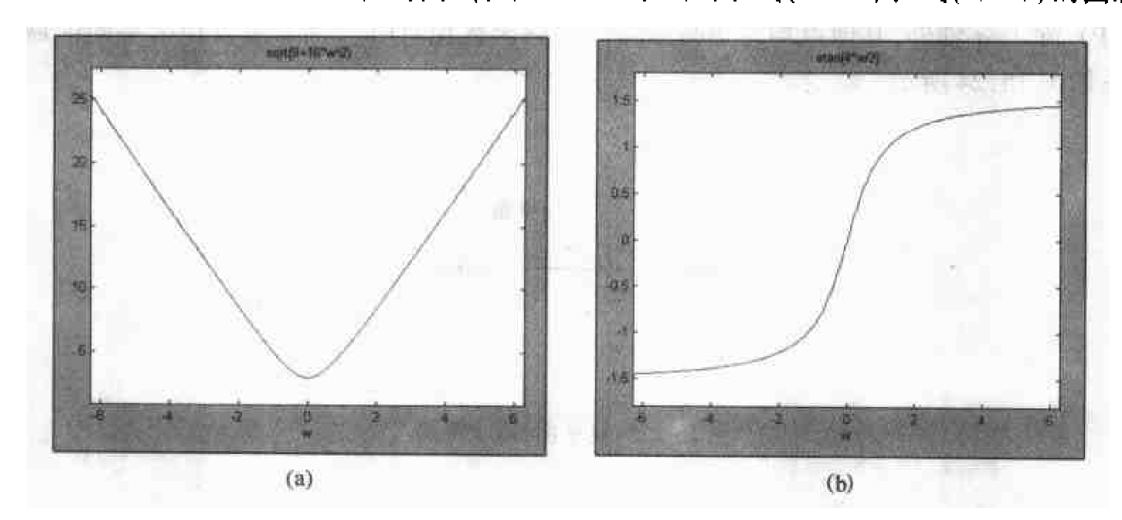


图 15.22　(a) $|\mathbf{Z}(j\omega)|$ 随频率变化的曲线，该曲线是使用 MATLAB 命令 EDU >> ezplot('sqrt(9 + 16 * w^2)')画出的；(b) $\mathbf{Z}(j\omega)$ 的相位随频率变化的曲线

描绘 $\mathbf{Z}(j\omega)$ 随 ω 变化的曲线需要两个两维的曲线：幅度函数曲线和相位函数曲线。假定激励为指数函数，如果允许 σ 既可以取正值，也可以取负值，那么可以用一个二维的图形将阻抗函数所有的信息表示出来。然而，为了将 $\mathbf{Z}(\sigma)$ 的幅度和 $\mathbf{Z}(j\omega)$ 的幅度进行更加仔细的比较，忽略了 $\mathbf{Z}(\sigma)$ 的相位角（它只取 0°和 ±180°这三个值）。值得注意的是，在指数函数的情况只有一个独立变量 σ，而在正弦函数的情况下只有一个独立变量 ω。现在来考虑，还有什么办法可以绘制出响应函数关于 s 变化的曲线。

15.7.3　在复平面上绘图

完整描述复频率 s 需要两个参数，σ 和 ω。因为响应也是复函数，所以必须考虑如何绘制幅度和相位随 s 变化的曲线，它们中的任何一个（比如幅度）都是关于两个参数 σ 和 ω 的函数，在二维的情况下中，只能用一簇曲线来描绘它，比如说以 σ 为参数，绘制幅度随着 ω 变化的函数；同样地，可以以 ω 为参数，绘制相位随着 σ 变化的函数。但是，绘制这样的一簇曲线意味着进行大量的工作，这正是需要避免的，即使获得了这样一簇曲线，能否从中得出任何有用的结论也是值得怀疑的。

一种较好的表示复数幅度响应曲线的方法是使用三维模型。在一张二维的纸上绘制这样的模型虽然很困难，但想像出这个模型却是容易的，因为无需给大脑提供什么工具就可以很快完成构图、修改和擦除，因此许多“绘制”的工作可以在大脑中完成。考虑放置在水平面（比如地面）上相互垂直的两个坐标轴，σ 轴和 $j\omega$ 轴，现在这个平面表示复平面，或者称为 s 平面，如图 15.23 所示。复平面上的每个点恰与 s 中的某个值相对应，而 s 中的每个值也对应于复平面上惟一的一个点。

已经熟悉了复频域 s 中的值与时域函数类型之间的对应关系，现在可以将 s 平面中的区

域与激励函数或者受激励响应的函数形式对应起来。比如,原点与直流量相对应;σ 轴上的点与指数函数相对应,当 $\sigma<0$ 时,对应衰减的指数函数,当 $\sigma>0$ 时,则对应增长的指数函数;正负 $j\omega$ 轴上的点与正弦函数相对应。s 平面的右半 s 平面(通常简写为 RHP)上的点,实部为正数,因此除了 σ 轴上的点以外,其他点均与指数增长的正弦函数相对应;而 s 平面的左半 s 平面(LHP),除了 σ 轴外,其他点均与指数衰减的正弦函数相对应。时域函数和 s 平面区域的对应关系如图 15.24 所示。

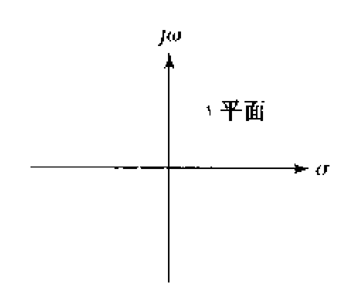


图 15.23 复平面,或 s 平面

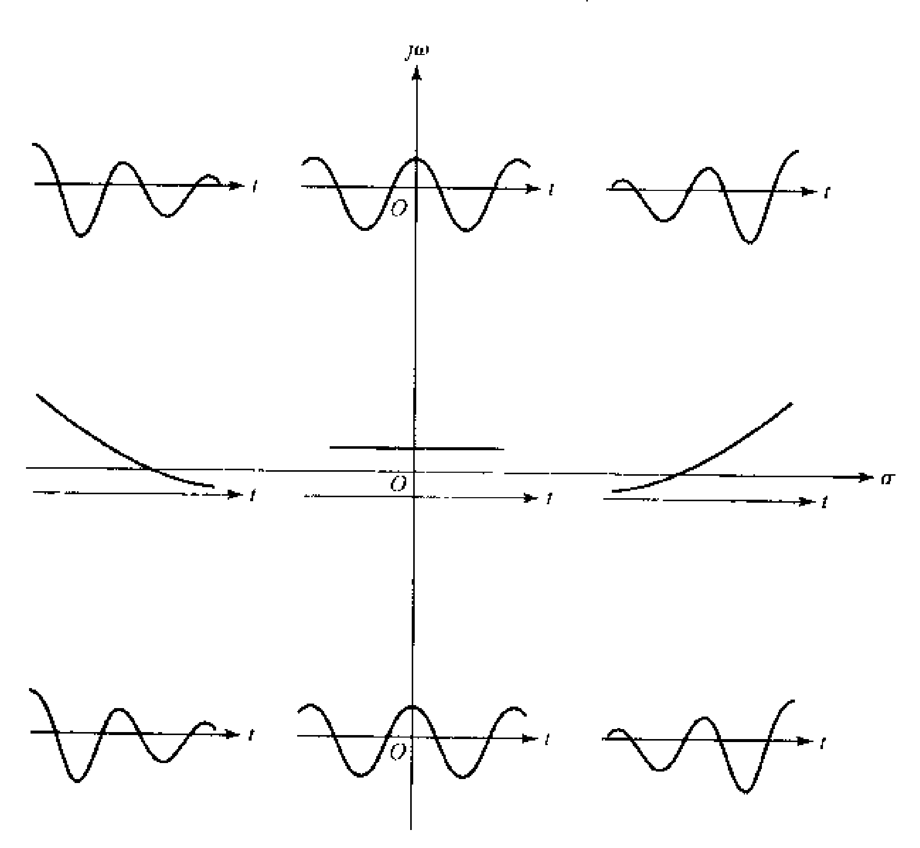


图 15.24 复平面上画出了各区域对应的时域函数特性

现在回到如何用图形表示响应函数随复频率 $\mathbf{s}$ 变化的问题上。响应的幅度可以用一个粘土构造的模型来表示,模型表面的每个点距离地面的高度对应于响应幅度在点 $\mathbf{s}$ 的值。换句话说,增加了一条新的轴,它通过原点并且垂直于 σ 轴和 $j\omega$ 轴,这条轴可以标注为 $|\mathbf{Z}|$, $|\mathbf{Y}|$, $|\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1|$ 或者别的合适的符号。对每一个 $\mathbf{s}$,响应的幅度都是确定的,把这些幅度点绘制在一起,就组成了 s 平面上方(或者与 s 平面相接触)的一个曲面。

例题 15.9　绘制出由一个 1 H 的电感和一个 3 Ω 的电阻串联组成的导纳随 $j\omega$ 和 σ 变化的草图

这两个串联的元件组成的导纳可以用下式表示：

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \frac{1}{\mathbf{s}+3}$$

做 $\mathbf{s} = \sigma + j\omega$ 替换，可以得到其幅度函数为：

$$|\mathbf{Y}(\mathbf{s})| = \frac{1}{\sqrt{(\sigma+3)^2+\omega^2}}$$

当 $\mathbf{s} = -3 + j0$ 时，响应的幅度趋于无穷大；而当 $\mathbf{s}$ 趋于无穷大时，$\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ 的幅度为零。因此在点 $(-3+j0)$ 上，模型的高度必然为无穷大，而在离原点无穷远的任何地方，模型的高度则必然为零。图 15.25(a)中画出了该模型的剖面图。

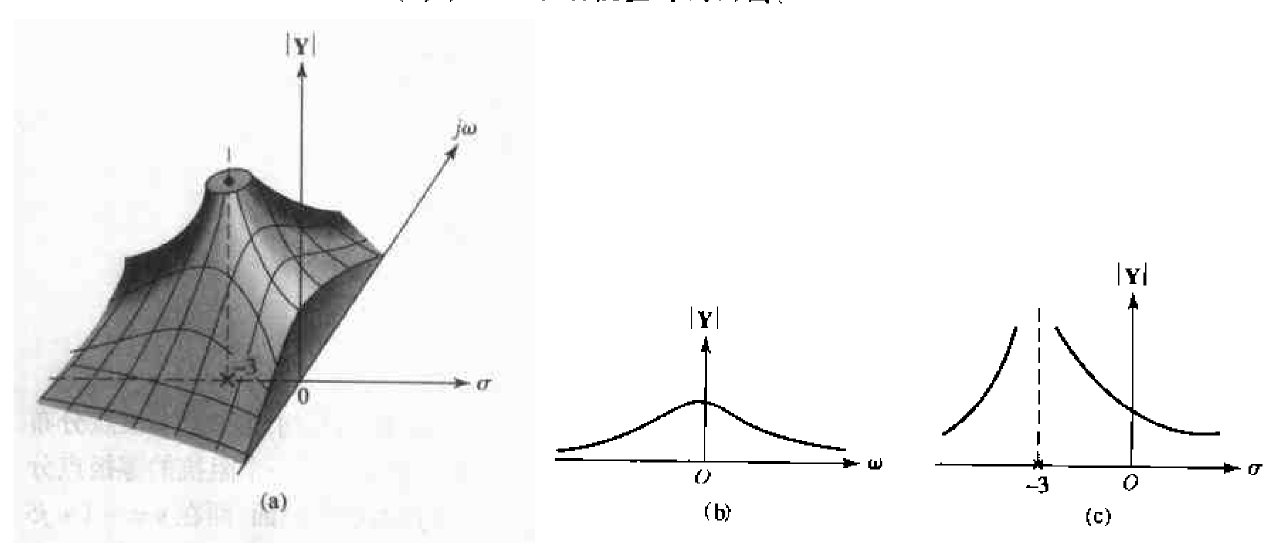


图 15.25　(a)粘土模型的剖面图，其上表面表示 1 H 电感和 3 Ω 电阻串联组成的导纳 $|\mathbf{Y}(\mathbf{s})|$；(b) $|\mathbf{Y}(\mathbf{s})|$ 随 ω 变化的曲线；(c) $|\mathbf{Y}(\mathbf{s})|$ 随 σ 变化的曲线

模型构造出来以后，不难想像，如果用一个包含 $j\omega$ 轴且与 s 平面垂直的 s 平面来切割该模型，那么就可以得到(当 $\sigma = 0$ 时) $|\mathbf{Y}|$ 随着 ω 变化的曲线。图 15.25(a)中显示的模型恰好是沿着这个 s 平面进行切割的，因此可以看到 $|\mathbf{Y}|$ 随着 ω 变化的曲线，在图 15.25(b)中重新把它绘出。同样地，用包含 σ 轴的垂直 s 平面来切割则可以得到(当 $\omega = 0$ 时) $|\mathbf{Y}|$ 随着 σ 变化的曲线，如图 15.25(c)所示。

练习

15.10　画出阻抗 $\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = 2 + 5\mathbf{s}$ 的幅度关于 σ 和 $j\omega$ 变化的曲线。

答案：参看图 15.26

15.7.4　零极点分布图

对于相对简单的函数来说，上面这种方法很有效，但通常情况下，需要一种更加实用的方法。重新将 s 平面想像为地面，然后在它上面覆盖一张很大的弹性薄层。现在将注意力集中到响应函数的所有零点和极点上，对于每个零点，响应为零，薄层的高度必然为零，因此，用“钉子”将它

固定在地面上；而在每个极点对应的 s 处，用一个很细的垂直棒把它支撑起来；对于无穷远处的零点和极点，则分别用半径很大的圆形夹环或者半径很大且很高的圆形篱笆来处理。如果所用的薄层尺寸为无穷大，没有重量并且有足够的弹性，而固定薄层的“钉子”非常细，支撑薄层的棒的半径为零，且高度为无穷大，那么薄层的高度将完全与响应的幅度成比例。

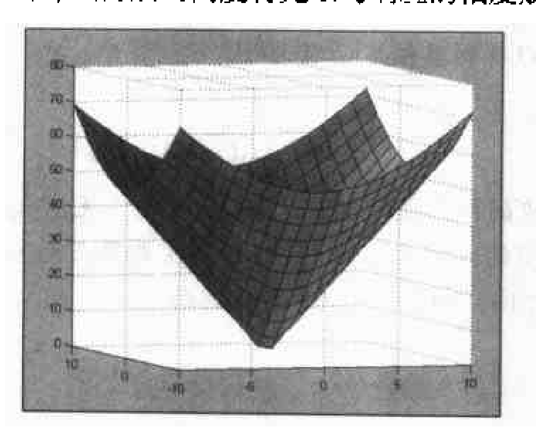
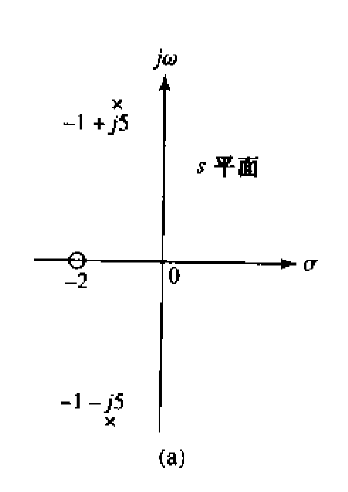


图 15.26 练习 15.10 的答案，它由以下的代码得到：

```
EDU >> sigma = linspace( - 10,10,21);
EDU >> omega = linspace( - 10,10,21);
EDU >> [X,Y] = meshgrid(sigma,omega);
EDU >> Z = abs(2 + 5 * X + j * 5 * Y);
EDU >> colormap(gray);
EDU >> s = [ - 5 3 8];
EDU >> surfl(X,Y,Z,s);
EDU >> view( - 20,5)
```

可以通过零极点的结构图来说明上面所描述的情形，零极点结构图有时也称为零极点分布图，它标出了频域量[比如阻抗 $\mathbf{Z}(\mathbf{s})$]的所有临界频率，图 15.27(a)中给出了一个阻抗的零极点分布图的例子。如果使用弹性薄层模型，在 $\mathbf{s} = -2 + j0$ 点用钉子将其固定在地面，而在 $\mathbf{s} = -1 + j5$ 和 $\mathbf{s} = -1 - j5$ 点用细棒将其支撑起来，将看到这样一个“地势”图，其特点是存在两个山峰和一个圆锥形的凹陷(或者说洼地)。图 15.27(b)中画出了其左半 s 平面(LHP)的上半部分。



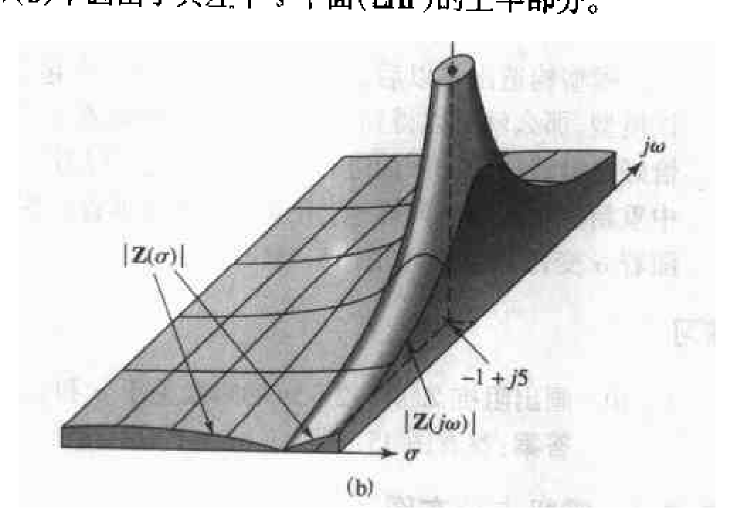


图 15.27 (a)某阻抗 $\mathbf{Z}(\mathbf{s})$的零极点分布图；(b)$\mathbf{Z}(\mathbf{s})$的弹性薄层模型的一部分

现在来求这个零极点分布图所对应的 Z(s)的表达式。这个零点说明分子中包含因子(s+2),而两个极点说明分母中包含因子(s+1−j5)和(s+1+j5)。除了系数 k 外,得到 Z(s)的形式为:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = k\frac{\mathbf{s}+2}{(\mathbf{s}+1-j5)(\mathbf{s}+1+j5)}$$

或

$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = k\frac{\mathbf{s}+2}{\mathbf{s}^2+2\mathbf{s}+26} \tag{15.16}$$

为了得到 k,假定 Z(s)的一个附加条件为 Z(0) = 1。将其代入式(15.16)中,可以求出 k 为 13,因此:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = 13\frac{\mathbf{s}+2}{\mathbf{s}^2+2\mathbf{s}+26} \tag{15.17}$$

从式(15.17)可以精确地得到$|\mathbf{Z}(\sigma)|$随着 σ 变化的曲线和$|\mathbf{Z}(j\omega)|$随着 ω 变化的曲线,不过,从该函数的零极点分布图和弹性薄层模型就可以清楚地知道它大致的样子,图 15.27(b)中模型的边界上画出了这两条曲线的一部分。

练习

15.11　将并联连接的 0.25 mH 的电感和 5 Ω 的电阻与并联连接的 40 μF 的电容和 5 Ω 串联起来。(a)求串联后的输入阻抗 $\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s})$;(b)求 $\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s})$的所有零点;(c)求$\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s})$的所有极点;(d)画出零极点分布图。

答案:$5(\mathbf{s}^2+10\,000\mathbf{s}+10^8)/(\mathbf{s}^2+25\,000\mathbf{s}+10^8)$ Ω; $-5\pm j8.66$ krad/s; −5; −20 krad/s

15.7.5　幅度和相位与频率的关系

迄今为止,已经使用 s 平面和弹性薄层模型来得到了 s 域函数的幅度随频率变化的定性关系。事实上,得到幅度和相位随频率变化的定量关系也是可能的,而且这可以说是一种新的有用的工具。

现在来考虑极坐标下的复频率表示,它可以用一个从 s 平面的原点出发,指向这个频率的箭头来表示,其中箭头的长度等于复频率的幅度,箭头与 σ 的正方向的夹角则等于这个复频率的相位。图 15.28(a)画出了频率为 $\mathbf{s}_1 = -3+j4 = 5\angle 126.9°$时的图形。

用箭头或者矢量来表示复平面上两个 s 值的差也是必要的。选取一个 s 值 s = j7,它与正弦曲线相对应,在复平面上也用一个矢量来表示它,如图 15.28 所示。s 与 $\mathbf{s}_1$ 的差 $\mathbf{s}-\mathbf{s}_1$ 可以用一个从 $\mathbf{s}_1$ 指向 s 的矢量来表示,如图 15.28(c)所示。注意到 $\mathbf{s}_1+(\mathbf{s}-\mathbf{s}_1)=\mathbf{s}$,在数值上,$\mathbf{s}-\mathbf{s}_1 = j7-(-3+j4) = 3+j3 = 4.24\angle 45°$,这个结果和图上画出的差是一致的。

现在来看怎样从差$(\mathbf{s}-\mathbf{s}_1)$的图形表示求得频域响应。考虑下面的导纳:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}+2$$

可以将这个表达式理解为感兴趣的某个频率点与零点的差,其中零点在 $\mathbf{s}_2 = -2+j0$ 处,而因

子 s + 2(可以将其写成 $s - s_2$)可以用一个从零点出发到频率点 s 的矢量来表示，希望求出在 s 处的响应。如果要求正弦响应，那么复频率 s 必须取 $j\omega$ 轴上的值，如图 15.29(a)所示，这时，可以画出当 ω 从零变到无穷大时，s + 2 的幅度的变化曲线。当 s 等于零时，这个矢量的幅度为 2，相位为 0°，因此 $\mathbf{Y}(0) = 2$。当 ω 增大时，幅度随着增大，开始时增长比较缓慢，后来几乎随着 ω 线性地增长；而相位开始时线性增长，当 ω 趋于无穷时则接近 90°，在 $\omega = 7$ 处，$\mathbf{Y}(j7)$的幅度为$\sqrt{2^2+7^2}$，相位为 $\tan^{-1}(3.5)$。图 15.29(b)中画出了 $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$的幅度和相位随着 ω 变化的曲线。

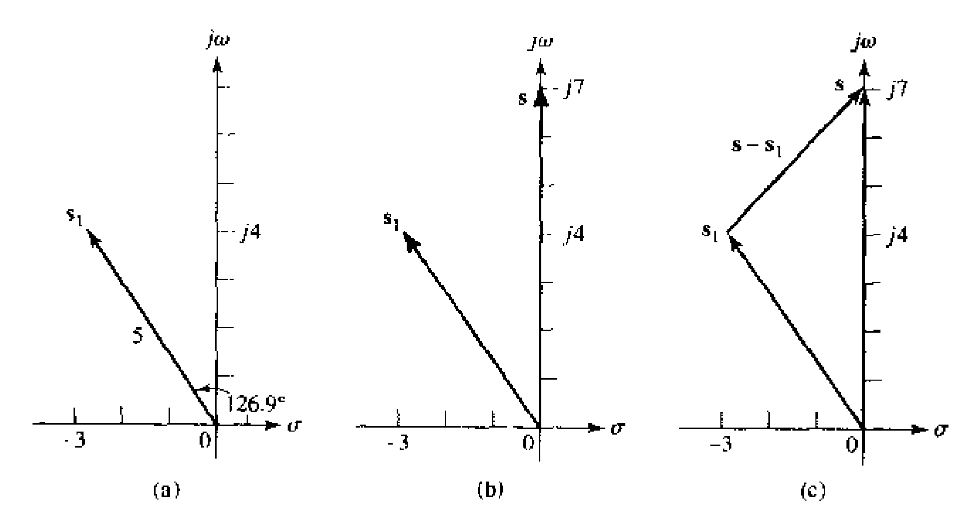


图 15.28 (a)用从原点指向 $s_1 = -3 + j4$ 的箭头来表示复频率 s_1；(b)频率 $s = j7$ 也表示成矢量的形式；(c)用从 s_1 到 s 的矢量表示差 $s - s_1$

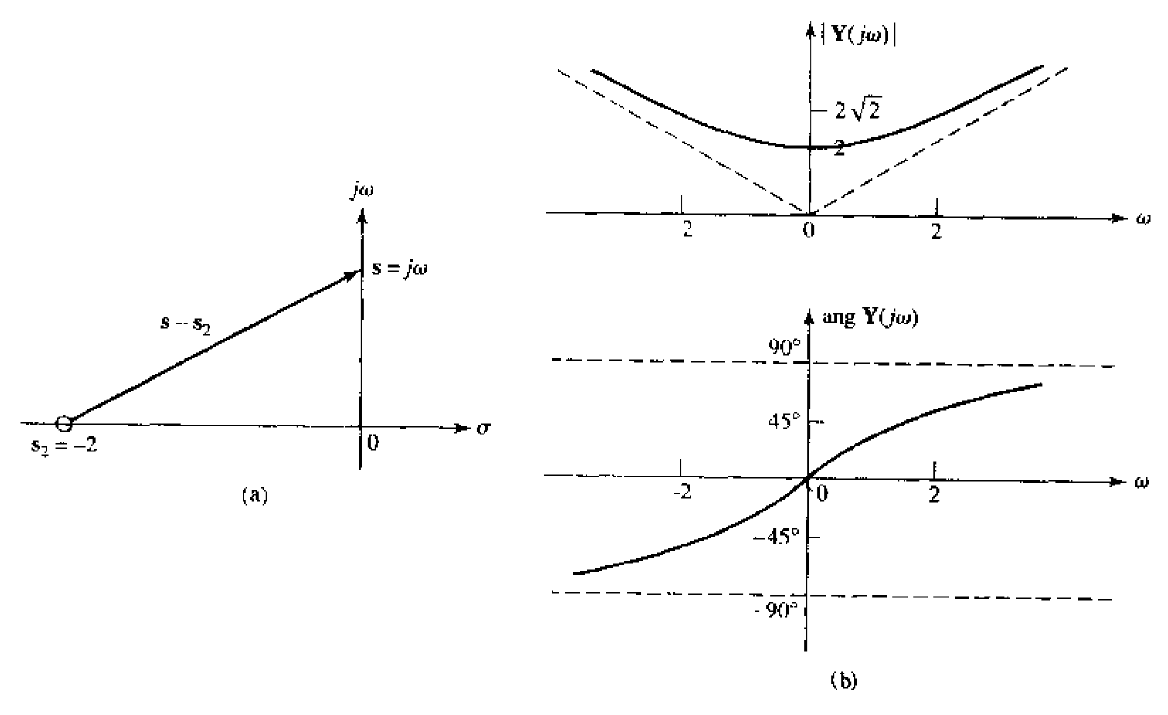


图 15.29 (a)$s = j\omega$ 时导纳 $\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \mathbf{s} + 2$ 的矢量表示；(b)当 s 从原点出发沿着 $j\omega$ 轴向上或者向下移动时，根据矢量的变化画出的 $|\mathbf{Y}(j\omega)|$ 和 ang $\mathbf{Y}(j\omega)$的草图

现在来看一个更实际的例子，考虑以下的频域方程，它由两个因式的比表示：

$$\mathbf{V}(s)=\frac{s+2}{s+3}$$

同样地，选取一个相应于正弦激励的s值，画出矢量s+2和s+3，其中矢量s+2起始于零点，指向选定的s值；矢量s+3起始于极点，也指向选定的s值，如图15.30(a)所示。这两个因式比的幅度等于两个矢量的幅度的比值，两个因式比的相位等于分子与分母相位的差。为了考察$|\mathbf{V}(s)|$随着ω变化的曲线，可以从原点出发，将s沿着$j\omega$轴向上移动，然后考察零点到$s=j\omega$的距离与极点到s的距离的比值。当$\omega=0$时，比值为2/3；当ω趋于无穷时，比值趋于1。

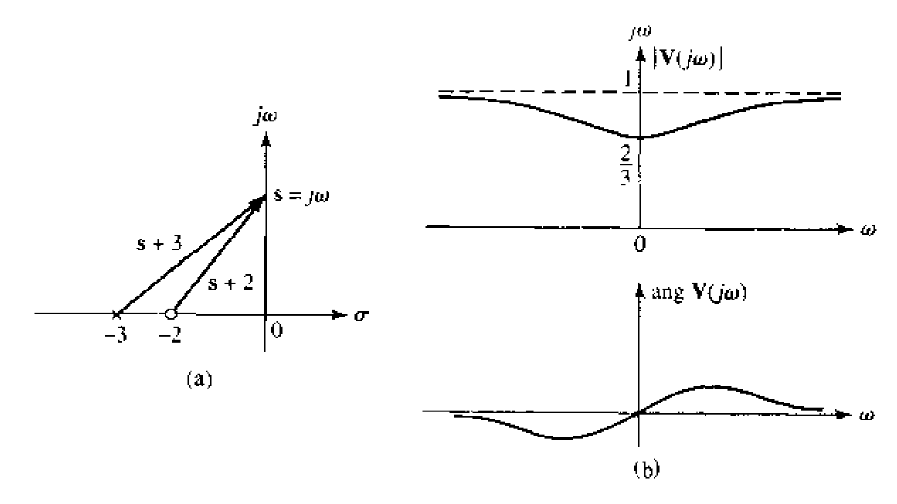


图15.30 (a)从电压响应$\mathbf{V}(s)=(s+2)/(s+3)$的两个临界频率画出的两个矢量；(b)根据(a)中所示的两个矢量的商画出的$\mathbf{V}(j\omega)$的幅度和相位曲线草图

考察两个相位的差可以发现，当$\omega=0$时，$\text{ang}\,\mathbf{V}(j\omega)=0°$。当$\omega$增大时，开始时$\text{ang}\,\mathbf{V}(j\omega)$随着增大，因为矢量s+2的相位比s+3的相位大；当ω进一步增大时，它开始减小；到最后，当ω趋于无穷时，它趋于0°，因为这时两个矢量的相位都等于90°。图15.30(b)显示了以上得到的结果，虽然图中没有定量地将曲线画出来，但是要做到这一点是很容易的。比如，在$s=j4$处，通过下面比值可以得到响应：

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(j4)&=\frac{\sqrt{4+16}\,\big/\tan^{-1}\left(\frac{4}{2}\right)}{\sqrt{9+16}\,\big/\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)}\\&=\sqrt{\frac{20}{25}}\,\Big/\left(\tan^{-1}2-\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right)\\&=0.894\,\underline{/10.3°}\end{aligned}$$

在设计电路中，为了得到某些希望的响应，绘制出从各临界频率出发，到$j\omega$轴上某个公共点的矢量，然后分析这些矢量的特性，这对设计很有帮助。举例来说，比如希望将图15.30(b)中响应的相位峰抬高一些，可以通过增加两个矢量的相位差来达到这一目的，而这又可以通过将图15.30(a)中的零点往原点方向移动或者将极点往远离原点的方向移动来达到。

以上讨论的这些方法，即通过图像来确定频域函数的幅度和相位随着频率变化关系的方法，在下面的章节中，考察那些具有高度选择性的滤波器(或者称为谐振电路)的频率特性时将会用到。如果要快速而清楚地理解电路网络和其他工程系统的特性，这些概念都是很基础的。

可以将这种分析过程概括为以下几个步骤：

1. 在 s 平面上画出频域函数的零极点分布图，然后指定一个测试点，希望求出这个频率点上的函数值。
2. 从每个零点和极点出发，画一条指向测试点的箭头。
3. 确定每个箭头的长度和相位。
4. 将所有从零点出发的箭头的长度除以所有从极点出发的箭头的长度，得到的商即为测试点所对应的频率处频域函数的幅度[除了一个常数因子外，因为 $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ 和 $k\mathbf{F}(\mathbf{s})$ 具有相同的零极点分布图]。
5. 将所有从零点出发的箭头的相位的和减去所有从极点出发的箭头的和，得到的差即为测试点所对应的频率处频域函数的相位。相位与常数因子 k 的值无关。

练习

15.12 图 15.31 中给出了三个零极点分布图，每个对应于一个电压增益 G。求出每个增益的表达式，用关于 s 的多项式的比值表示。

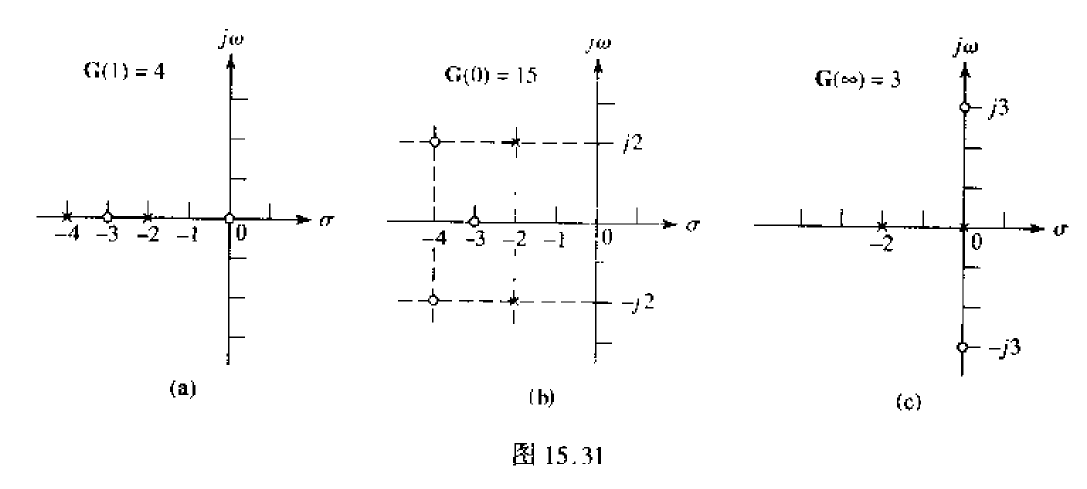


图 15.31

15.13 导纳 $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ 有一个极点 $\mathbf{s} = -10 + j0$[①] 和一个零点 $\mathbf{s} = z_1 + j0, z_1 < 0$；设 $\mathbf{Y}(0) = 0.1$ S。分别求出当(a) $\text{ang}\,\mathbf{Y}(j5) = 20°$ 和(b) $|\mathbf{Y}(j5)| = 0.2$ S 时的 z_1 值。

答案：15.12：$(15\mathbf{s}^2 + 45\mathbf{s})/(\mathbf{s}^2 + 6\mathbf{s} + 8)$；$(2\mathbf{s}^3 + 22\mathbf{s}^2 + 88\mathbf{s} + 120)/(\mathbf{s}^2 + 4\mathbf{s} + 8)$；$(3\mathbf{s}^2 + 27)/(\mathbf{s}^2 + 2\mathbf{s})$。15.13：−4.73 Np/s；−2.50 Np/s

15.8 自由响应与 s 平面

从上面的章节可以知道，s 平面的零极点分布图包含了大量的关于受激响应的信息。在本节中，考察在给定初始条件时，如何从电流受激响应的零极点图出发很快地写出在任意激励函数输入下电流的完全响应(即自由响应加上受激响应)。对于求解任意输入下电路电压的完全响应，也可以采用类似的方法。

考虑一个最简单的例子，如图 15.32 所示，这是一个串联 RL 电路。在 $t = 0$ 时刻合上开关

① 原文这里多了一个"s − 1"，有误——译者注。

后，在电压源 $v_s(t)$ 的作用下产生了电流 $i(t)$。$t>0$ 时，$i(t)$ 的完全响应由自由响应和受激响应组成：

$$i(t)=i_n(t)+i_f(t)$$

通过变换到频域，可以求出受激响应，当然其前提条件是可以将 $v_s(t)$ 变换到频域中。例如，对于 $v_s(t)=1/(1+t^2)$，因为不能把它变换到频域中，所以必须从基本的差分方程出发来求解。对于图 15.32 中的电路，有：

$$\mathbf{I}_f(\mathbf{s})=\frac{\mathbf{V}_s}{R+\mathbf{s}L}$$

或者写为：

$$\mathbf{I}_f(\mathbf{s})=\frac{1}{L}\frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{s}+R/L} \tag{15.18}$$

代入 $\mathbf{V}_s$，L 和 R 各自的值，再做拉普拉斯逆变换，即可以求出 $i_f(t)$。

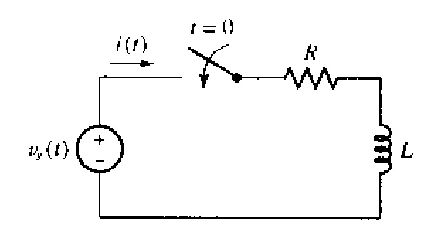


图 15.32　求解完全响应的一个例子，其中由电源看过去阻抗的临界频率为已知

现在来考虑自由响应，从以前的练习中，已经知道它的形式为以时间常数 L/R 指数衰减的函数。根据定义，自由（与激励源无关）响应的形式与激励函数无关，激励函数只是对自由响应的幅度有影响。为了得到自由响应的函数形式，去掉电路中所有的独立电源，对于本例，可用一根短路线代替 $v_s(t)$。然后，试着将自由响应看做是受激响应的一种极限情况来考虑。回到频域表达式(15.18)，令 $\mathbf{V}_s=0$，表面上看，$\mathbf{I}(\mathbf{s})$ 必须等于零，但在复频率上分析，对于只有一个极点的 $\mathbf{I}(\mathbf{s})$ 来说，情况未必如此。也就是说，分子和分母可能全部为零，从而导致 $\mathbf{I}(\mathbf{s})$ 不一定为零。

下面从一个稍微不同的但更好的出发点来思考这个新问题，将注意力集中到所求的受激响应与激励函数的比值上，称之为 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ 并将其定义为电路的传递函数，即：

$$\frac{\mathbf{I}_f(\mathbf{s})}{\mathbf{V}_s}=\mathbf{H}(\mathbf{s})=\frac{1}{L(\mathbf{s}+R/L)}$$

"工作在复频率"是什么意思？如何在实验室中做到这一点？这时，要记住复频率是如何引入的：它是描述频率为 ω 的正弦函数与指数函数 $e^{\sigma t}$ 相乘的的一种方法。在实验室中很容易产生（不是想像）这种信号。因此，为了在频率 $s=\sigma+j\omega$ 下"工作"，只需设置 σ 和 ω 的值即可。

在本例中，传递函数是从 $\mathbf{V}_s$ 看过去的输入导纳。为了求出自由响应，令 $\mathbf{V}_s=0$，但 $\mathbf{I}_f(\mathbf{s})=\mathbf{V}_s\mathbf{H}(\mathbf{s})$，如果 $\mathbf{V}_s=0$，则只有在 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ 的极点上，电流才有可能取非零值。因此，传递函数极点具有特别重要的意义。

回到 RL 串联电路，已知其传递函数的极点在 $\mathbf{s}=-R/L+j0$ 处，在该点处（也就是说令 $\mathbf{s}=-R/L$），电流惟一可能取的有限值是一个 s 域的常数。因此，可以求得自由响应为：

$$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = A \quad 且 \quad \mathbf{s} = -\frac{R}{L} + j0$$

其中 A 是一个未知的常数。下一步，需要将这个自由响应变换到时域中。这时，首先想到的办法可能是使用拉普拉斯逆变换，但是，由于已经事先指定了一个特定的 **s** 值，因此，这种方法不可行。不妨看看 e^{st} 的实部：

$$i_n(t) = \text{Re}\{Ae^{st}\} = \text{Re}\{Ae^{-Rt/L}\}$$

这时，可以得到：

$$i_n(t) = Ae^{-Rt/L}$$

因此，总的响应为：

$$i(t) = Ae^{-Rt/L} + i_f(t)$$

当电路的初始条件给定后，就可以求出 A。

15.8.1 更一般的情形

图 15.33(a)和图 15.33(b)画出了单个电源接到不含独立电源电路中的情况。要求的响应可能是电流 $\mathbf{I}_1(\mathbf{s})$ 或者电压 $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$，它们都可以通过以临界频率为根的一次因式连乘而得到的传递函数来表示。特别是，以图 15.33(a)中的响应 $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$ 为例：

$$\frac{\mathbf{V}_2(\mathbf{s})}{\mathbf{V}_s} = \mathbf{H}(\mathbf{s}) = k\frac{(\mathbf{s}-\mathbf{s}_1)(\mathbf{s}-\mathbf{s}_3)\cdots}{(\mathbf{s}-\mathbf{s}_2)(\mathbf{s}-\mathbf{s}_4)\cdots} \tag{15.19}$$

图 15.33 由(a)电压源 $\mathbf{V}_s$ 或(b)电流源 $\mathbf{I}_s$ 产生的响应 $\mathbf{I}_1(\mathbf{s})$ 或 $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$ 的极点，这些极点决定了自由响应 $i_{1n}(t)$ 或 $v_{2n}(t)$ 的形式。当电路具有初始能量存储时，用短路线代替 $\mathbf{V}_s$ 或者将 $\mathbf{I}_s$ 开路时就产生了自由响应

$\mathbf{H}(\mathbf{s})$ 的极点为 $\mathbf{s} = \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_4, \cdots$，在每个这些频率处，有限的电压值 $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$ 均必须是可能的自由响应形式。因此，考虑在输入端接入一个 0 V 的电压源（也就是说将输入端短路）的情况，此时，自由响应的形式必然可以表示为：

$$v_{2n}(t) = \mathbf{A}_2 e^{\mathbf{s}_2 t} + \mathbf{A}_4 e^{\mathbf{s}_4 t} + \cdots$$

这里的每个 **A** 都必须根据初始条件计算出来（初始条件包括任何接入输入端的电压源的初始值）。

为了求出图 15.33(a)中的自由响应 $i_{1n}(t)$ 的形式，需要知道传递函数 $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{I}_1(\mathbf{s})/\mathbf{V}_s$ 的所有极点。对于图 15.33(b)的电路，传递函数为 $\mathbf{I}_1(\mathbf{s})/\mathbf{I}_s$ 和 $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})/\mathbf{I}_s$，它们的极点分别决定了

自由响应 $i_{1n}(t)$ 和 $v_{2n}(t)$ 的形式。

如果网络中不包含任何独立电源，那么在求解自由响应时，可以将 $\mathbf{V}_s$ 和 $\mathbf{I}_s$ 插入到网络中任何合适的地方(其前提条件是去掉它们之后可以恢复原来的网络)，然后就可以求出传递函数及其极点，这些极点决定了自由响应的频率。需要注意的是，不管将电源插入什么地方，求出的自由响应的频率都必须是一样的。如果网络已经包含了一个电源，则可以将这个电源置为零，并将另一个电源插到一个更合适的地方。

15.8.2 特殊情况

从完整性的角度来说，在举例说明上述方法之前，首先来看一种可能发生的特殊情况。这种情况发生在当图 15.33(a)或者 15.33(b)中的网络包含两个或几个相互隔离的部分时。举个例子来说，假定一个电路由三个网络并联而成，这三个网络分别是：R_1 与 C 组成的串联网络；R_2 与 L 组成的串联网络；一个短接的电路。很明显，在 R_1C 串联支路上串接一个电压源不会在 R_2 和 L 上产生任何电流，因此其传递函数为零。如果希望求出电感上的电压的自由响应形式，那么必须将电压源置于 R_2L 网络中。如果在放置电源前先考察一下网络，通常可以发现这种特殊的情况，但是如果没有发现，那么将得到一个等于零的传递函数。当 $\mathbf{H}(\mathbf{s})=0$ 时，不会得到任何表征自由响应特性的频率信息，这时，必须选择一个更加合适的电源放置点。

例题 15.10 对于图 15.34 所示的无源电路，求出当 $t>0$ 时 i_1 和 i_2 的表达式。给定初始条件为 $i_1(0)=i_2(0)=11$ A

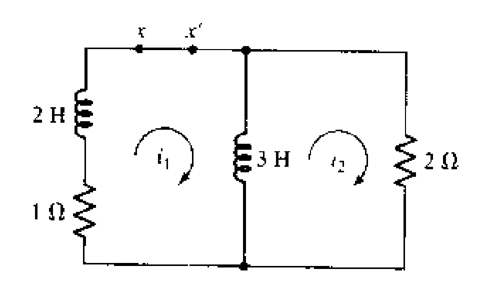


图 15.34 求电路的自由响应 i_1 和 i_2

在点 x 和 x' 之间放置一个电压源 $\mathbf{V}_s$，其传递函数为 $\mathbf{H}(\mathbf{s})=\mathbf{I}_1(\mathbf{s})/\mathbf{V}_s$，它就是从电压源处看到的输入导纳。有：

$$\mathbf{I}_1(\mathbf{s})=\frac{\mathbf{V}_s}{2\mathbf{s}+1+6\mathbf{s}/(3\mathbf{s}+2)}=\frac{(3\mathbf{s}+2)\mathbf{V}_s}{6\mathbf{s}^2+13\mathbf{s}+2}$$

或者：

$$\mathbf{H}(\mathbf{s})=\frac{\mathbf{I}_1(\mathbf{s})}{\mathbf{V}_s}=\frac{\frac{1}{2}\left(\mathbf{s}+\frac{2}{3}\right)}{(\mathbf{s}+2)\left(\mathbf{s}+\frac{1}{6}\right)}$$

根据经验，容易看出 i_1 必然是下面这样的形式：

$$i_1(t)=Ae^{-2t}+Be^{-t/6}$$

根据给定的初始条件，就可以求出 A 和 B 的值。已经给出 $i_1(0)$ 为 11 A：

$$11 = A + B$$

沿电路的边界，写出 KVL 方程，可以得到下面这个必要的附加条件：

$$i_1 + 2\frac{di_1}{dt} + 2i_2 = 0$$

从中解出导数：

$$\left.\frac{di_1}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{1}{2}[2i_2(0) + 1i_1(0)] = -\frac{22+11}{2} = -2A - \frac{1}{6}B$$

联立两个方程，可以求出 $A = 8, B = 3$。因此，所求的响应为：

$$i_1(t) = 8e^{-2t} + 3e^{-t/6}\ \text{A}$$

i_2 的固有频率与 i_1 相同，可以用类似的方法求出其中的待定常数，最后得到：

$$i_2(t) = 12e^{-2t} - e^{-t/6}\ \text{A}$$

练习

15.14 在图 15.35 所示的电路的 ab 端接上一个电流源 $i_1(t) = u(t)$ A，其中电流源的方向指向 a，求 $\mathbf{H(s)} = \mathbf{V}_{cd}/\mathbf{I}_1$，并指出 $v_{cd}(t)$ 的固有频率。

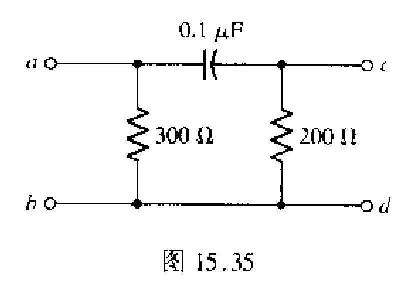


图 15.35

答案：$120s/(s+20\,000)\ \Omega$；$-20\,000\ s^{-1}$

除了当所求响应的初始值及其导数都很明显时，求解自由响应的幅度系数要简单一些，一般情况下都是比较复杂的。但是，确定出自由响应的形式却是非常容易的事情。

实 际 应 用

振荡电路的设计

在本书的很多个地方，考察了各种电路在正弦激励下的特性，但是，正弦波的产生本身就是一个很有意思的问题。很强的正弦电压或者电流可以用磁铁和旋转的线圈直接产生，但这种方法不适用于产生小信号波形。

对于弱电流的应用（指数量级为几个安培或者更小），较好的办法是使用合适的正反馈放大电路。例如图 15.36 的电路，称为文氏桥振荡器（Wien-bridge oscillator）。

这是一个同相运放电路，其中电阻 R_1 接在反相输入端和地之间，电阻 R_f 接在输出端和反相输入端之间。电阻 R_f 构成了负反馈通路，因为它将放大器的输出端与反相输入端连接起来，输出的任何增量 $\Delta\mathbf{V}_o$ 都将导致输入的减小，从而使得输出减小，这样增加了输出电压 $\mathbf{V}_o$ 的稳定性。运算放大器的增益定义为 $\mathbf{V}_o$ 与 $\mathbf{V}_i$ 的比值，它由 R_1 和 R_f 的相对大小来决定。

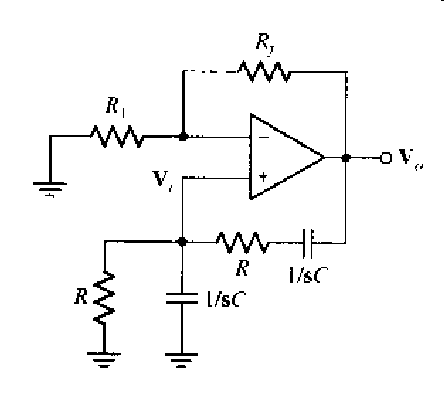


图 15.36　文氏振荡电路

正反馈环由两个独立的电阻-电容组合构成，定义为 $\mathbf{Z}_s = R + 1/\mathbf{s}C$ 和 $\mathbf{Z}_p = R \parallel (1/\mathbf{s}C)$。可以通过选择 R 和 C 的值，使得振荡器的振荡频率为所希望的频率(运算放大器本身的内电容限制了振荡器所能产生的最大频率)。为了确定 R 和 C 的值与振荡频率的关系，首先来求放大器的增益 $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_i$ 的表达式。

回忆第 6 章中所讨论的两个理想运放的定义，然后仔细考察图 15.36 所示的电路，注意到 $\mathbf{Z}_s$ 和 $\mathbf{Z}_p$ 构成分压器，因此：

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_o \frac{\mathbf{Z}_p}{\mathbf{Z}_p + \mathbf{Z}_s} \tag{15.20}$$

化简 $\mathbf{Z}_p$ 和 $\mathbf{Z}_s$ 的表达式，得 $\mathbf{Z}_p = R \parallel (1/\mathbf{s}C) = R/(1+\mathbf{s}RC)$，$\mathbf{Z}_s = R + 1/\mathbf{s}C = (1+\mathbf{s}RC)/\mathbf{s}C$，于是：

$$\frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{V}_o} = \frac{\dfrac{R}{1+\mathbf{s}RC}}{\dfrac{1+\mathbf{s}RC}{\mathbf{s}C} + \dfrac{R}{1+\mathbf{s}RC}} = \frac{\mathbf{s}RC}{1+3\mathbf{s}RC+\mathbf{s}^2R^2C^2} \tag{15.21}$$

因为只对放大器的正弦稳态情况感兴趣，因此将 s 替换为 $j\omega$，得到：

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{V}_o} &= \frac{j\omega RC}{1+3j\omega RC+(j\omega)^2R^2C^2} \\ &= \frac{j\omega RC}{1-\omega^2R^2C^2+3j\omega RC}\end{aligned} \tag{15.22}$$

只有当 $\omega = 1/RC$ 时，这个增益才是实数。因此，通过选择 R 和 C 的值，可以设计一个工作在特定频率 $f = \omega/2\pi = 1/2\pi RC$ 下的放大器。

作为一个例子，来设计一个文氏桥振荡器，使之产生频率为 20 Hz 的正弦信号，这是普遍认可的音频信号的下界频率。需要的频率 $\omega = 2\pi f = (6.28)\times(20) = 125.6$ rad/s。一旦取定了 R 的值，那么 C 的值也就知道了(反之亦然)。假设手头正有一个 1 μF 的电容，这时，可以

算出需要的电阻值为 $R=7\,962\ \Omega$，因为这不是一个标准的电阻值，所以必须使用几个电阻的串联及(或)并联的组合来得到这个电阻值。在使用 PSpice 来进行模拟之前，再来看一下图 15.36，注意到 R_f 和 R_1 的值是未知的。

虽然式(15.20)正确地描述了 $\mathbf{V}_o$ 和 $\mathbf{V}_i$ 的关系，但是还可以写出另一个与这两个量相关的方程：

$$0=\frac{\mathbf{V}_i}{R_1}+\frac{\mathbf{V}_i-\mathbf{V}_o}{R_f}$$

整理后得：

$$\frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i}=1+\frac{R_f}{R_1} \tag{15.23}$$

令 $\omega=1/RC$，代入式(15.22)中，得到：

$$\frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{V}_o}=\frac{1}{3}$$

因此，选取的 R_1 和 R_f 的值必须满足关系 $R_f/R_1=2$。遗憾的是，如果选取 $R_f=2\ \text{k}\Omega$，$R_1=1\ \text{k}\Omega$，使用 PSpice 对电路进行瞬态分析的话，很可能会对结果感到失望。为了保证电路处于不稳定状态(这正是产生振荡的必要条件)，必须使 R_f/R_1 稍大于 2。最后设计($R=7\,962\ \Omega$，$C=1\ \mu\text{F}$，$R_f=2.2\ \text{k}\Omega$，$R_1=1\ \text{k}\Omega$)的仿真结果如图 15.37 所示。注意到，图中振荡的幅度正在增大。在实际设计时，为了使电路的输出电压幅度稳定，还需要用到非线性元件。

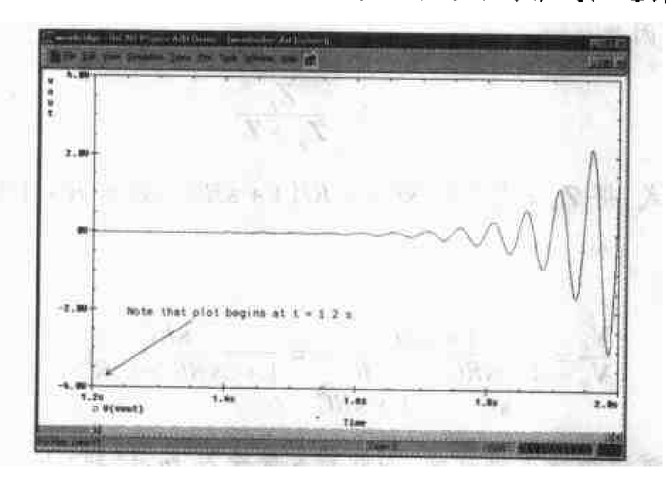


图 15.37 仿真振荡器输出

15.9 $H(s)=V_{out}/V_{in}$的综合方法

本章主要讨论了与传递函数的极点和零点相关的问题。我们已经学会了如何在复平面上表示极点和零点，并根据它们将传递函数表示为 s 域中的若干个因式(或者说是多项式)的比值，根据它们计算出了受迫响应，而且，在上一节中，利用传递函数的极点确定出自由响应的形式。

现在来看如何构造一个网络，使之产生希望的传递函数。这里只考虑这个一般性问题的

一小部分，即只考虑传递函数的形式为 $\mathbf{H}(\mathbf{s})=\mathbf{V}_{out}(\mathbf{s})/\mathbf{V}_{in}(\mathbf{s})$ 的情形，如图 15.38 所示。为简单起见，将 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ 的临界频率限制在 σ 轴的负半轴上（包括原点），也就是说，只考虑如下形式的传递函数：

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{s})=\frac{10(\mathbf{s}+2)}{\mathbf{s}+5}$$

或者：

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{s})=\frac{-5\mathbf{s}}{(\mathbf{s}+8)^2}$$

或者：

$$\mathbf{H}_3(\mathbf{s})=0.1\mathbf{s}(\mathbf{s}+2)$$

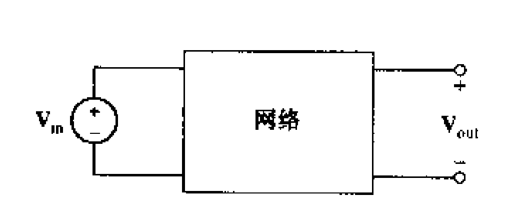


图 15.38　给定 $\mathbf{H}(\mathbf{s})=\mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$，求传递函数为 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ 的网络

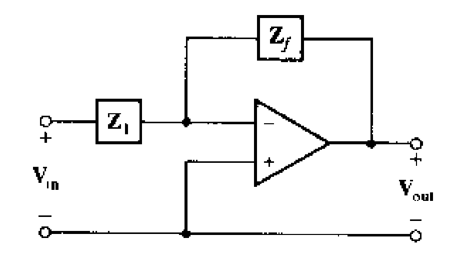


图 15.39　对理想运放，$\mathbf{H}(\mathbf{s})=\mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}=-\mathbf{Z}_f/\mathbf{Z}_1$

首先来求图 15.39 所示的网络的电压增益。网络中含有一个理想运放，运放的两个输入端之间的电压为零，其输入阻抗为无穷大，因此，流入运算放大器反相输入端的电压为零：

$$\frac{\mathbf{V}_{in}}{\mathbf{Z}_1}+\frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{Z}_f}=0$$

即：

$$\frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}}=-\frac{\mathbf{Z}_f}{\mathbf{Z}_1}$$

如果 $\mathbf{Z}_f$ 和 $\mathbf{Z}_1$ 都是电阻，那么这是一个反向放大器或者是一个阻尼器（如果比值小于 1 的话）。然而，现在感兴趣的是这两个阻抗其中之一为电阻，而另外一个为 *RC* 网络的情形。

图 15.40(a)中，令 $\mathbf{Z}_1=R_1$，而令 $\mathbf{Z}_f$ 为 R_f 和 C_f 的并联，那么：

$$\mathbf{Z}_f=\frac{R_f/\mathbf{s}C_f}{R_f+(1/\mathbf{s}C_f)}=\frac{R_f}{1+\mathbf{s}C_fR_f}=\frac{1/C_f}{\mathbf{s}+(1/R_fC_f)}$$

则：

$$\mathbf{H}(\mathbf{s})=\frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}}=-\frac{\mathbf{Z}_f}{\mathbf{Z}_1}=-\frac{1/R_1C_f}{\mathbf{s}+(1/R_fC_f)}$$

得到一个传递函数，它只有一个（有限的）临界频率，这个临界频率为极点 $\mathbf{s}=-1/R_fC_f$。

现在来看图 15.40(b)，将 $\mathbf{Z}_f$ 取为电阻，而 $\mathbf{Z}_1$ 为一个 *RC* 并联电路：

$$\mathbf{Z}_1=\frac{1/C_1}{\mathbf{s}+(1/R_1C_1)}$$

则：

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}} = -\frac{\mathbf{Z}_f}{\mathbf{Z}_1} = -R_f C_1\left(\mathbf{s} + \frac{1}{R_1 C_1}\right)$$

它惟一的有限的临界频率为一个零点 $\mathbf{s} = -1/R_1 C_1$。

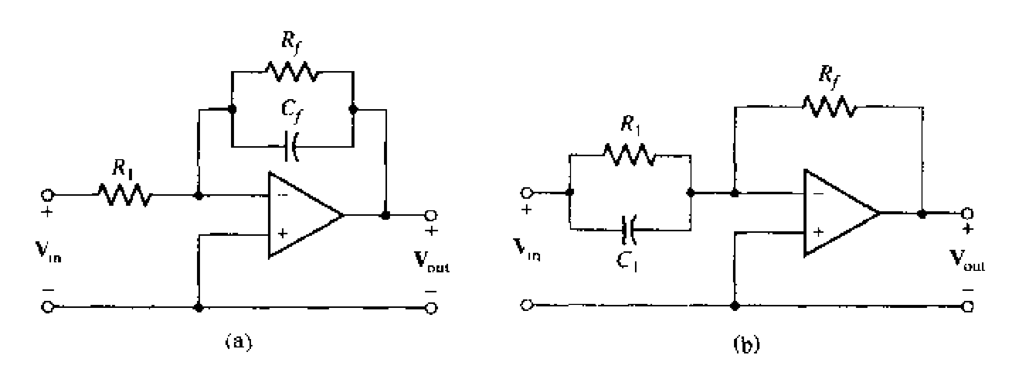


图 15.40 (a)传递函数 $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$ 在 $\mathbf{s} = -1/R_f C_f$ 处有一个极点；(b)此时在 $\mathbf{s} = -1/R_1 C1$ 处有一个零点

对理想运放，其输出阻抗或者说戴维南阻抗为零，所以 $\mathbf{V}_{out}$ 与 $\mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$ 均不是任何接在输出端的负载 $\mathbf{Z}_L$ 的函数(这里的负载当然也包括另一个运放的输入)。因此，可以将几个运放电路级联起来，也就是说将一个运放电路的输出端接到另一个运放的输入端，而每个运放电路具有指定的极点和零点，这样就可以得到希望得到的任何传递函数。

例题 15.11 设计一个电路，使其传递函数为 $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in} = 10(\mathbf{s}+2)/(\mathbf{s}+5)$

在 $\mathbf{s} = -5$ 处的极点可以通过图 15.40(a)所示的网络来产生，不妨称这个网络为 A，有 $1/R_{fA}C_{fA} = 5$。取定 $R_{fA} = 100\ \mathrm{k\Omega}$，则，$C_{fA} = 2\ \mu\mathrm{F}$，对于这部分电路，有：

$$\mathbf{H}_A(\mathbf{s}) = -\frac{1/R_{1A}C_{fA}}{\mathbf{s} + (1/R_{fA}C_{fA})} = -\frac{5\times 10^5/R_{1A}}{\mathbf{s}+5}$$

下一步，考虑在 $\mathbf{s} = -2$ 处的零点。根据图 15.40(b)，有 $1/R_{1B}C_{1B} = 2$，取定 $R_{1B} = 100\ \mathrm{k\Omega}$，则 $C_{1B} = 5\ \mu\mathrm{F}$，因此：

$$\mathbf{H}_B(\mathbf{s}) = -R_{fB}C_{1B}\left(\mathbf{s} + \frac{1}{R_{1B}C_{1B}}\right)$$
$$= -5\times 10^{-6}R_{fB}(\mathbf{s}+2)$$

于是：

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{H}_A(\mathbf{s})\mathbf{H}_B(\mathbf{s}) = 2.5\times\frac{R_{fB}}{R_{1A}}\frac{\mathbf{s}+2}{\mathbf{s}+5}$$

最后令 $R_{fB} = 100\ \mathrm{k\Omega}$，$R_{1A} = 25\ \mathrm{k\Omega}$，就完成了整个设计，如图 15.41 所示。本电路中，电容的值相当大，这是因为 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ 的极点和零点的频率取得小的缘故；如果 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ 变为 $10(\mathbf{s}+2\,000)/(\mathbf{s}+5\,000)$，那么就可以用 2 nF ~ 5 nF 的电容了。

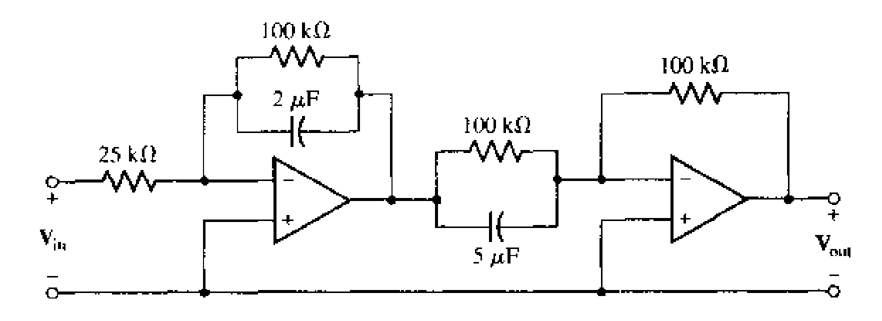


图 15.41 含有两个理想运放的网络,其电压传递函数为 $\mathbf{H}(s) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in} = 10(s+2)/(s+5)$

练习

15.15 使用级联方法实现传递函数 $\mathbf{H}(s) = -20s^2/(s+1\,000)$,分别求出三个级联电路的 $\mathbf{Z}_1$ 和 $\mathbf{Z}_f$ 的值。

答案:1 μF ‖ ∞,100 kΩ; 1 μF ‖ ∞,100 kΩ; 100 kΩ ‖ 10 nF,50 kΩ

15.10 小结与复习

- 在频域中,电阻可以用相同大小的阻抗来表示。
- 在频域中,电感可以用阻抗 $\mathbf{s}L$ 来表示。如果电感的初始电流不为 0,那么必须将这个阻抗替换为它与电压源 $-Li(0^-)$的串联或者是它与电流源 $i(0^-)/\mathbf{s}$ 的并联。
  表 15.1 中总结了这些模型。
- 在频域中,电容可以用阻抗 $1/\mathbf{s}C$ 来表示。如果电容的初始电压不为 0,那么必须将这个阻抗替换为它与电压源 $v(0^-)/\mathbf{s}$ 的串联或者是它与电流源 $Cv(0^-)$的并联。
- s 域中的节点分析和网孔分析可以得到关于 s 的多项式的联立方程组,对于求解这样的方程组,MATLAB 是一个特别有用的工具。
- 叠加原理、电源变换、戴维南等效定理和诺顿等效定理均适用于 s 域。
- 电路的传递函数定义为 s 域的输出与 s 域的输入的比值,这两个量可以是电压或者电流。
- $\mathbf{H}(s)$的零点为那些使其幅度值为零的 s 的值,而 $\mathbf{H}(s)$的极点则为使其幅度为无穷大的 s 的值。
- 当已知电路的冲激响应 $h(t)$时,卷积提供了解析和图解的方法。
- 有几种根据极点和零点来表示 s 域表达式的图形表示方法,可以借助这些方法来进行电路综合,以得到希望的响应。

习题

1. 画出图 15.42 所示电路所有可能的 s 域等效电路。
2. 画出图 15.43 所示电路所有可能的 s 域等效电路。

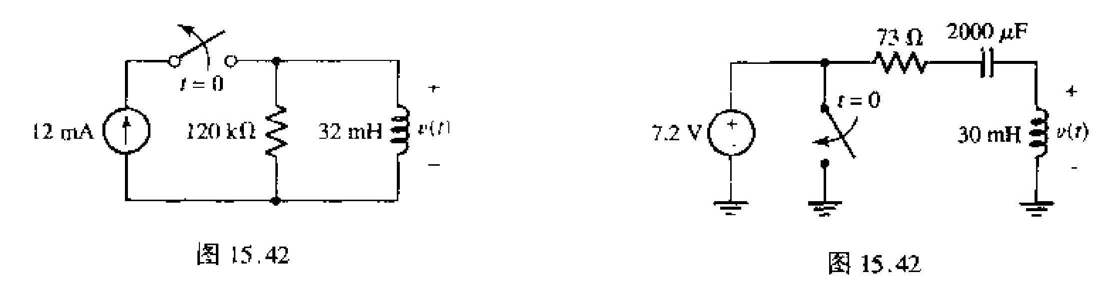


图 15.42　　　　图 15.42

3. 参看图 15.44，求(a)$\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s})$，写成关于 s 的两个多项式的比的形式；(b)$\mathbf{Z}_{in}(-80)$；(c)$\mathbf{Z}_{in}(j80)$；(d)*RL* 分支的导纳 $\mathbf{Y}_{RL}(\mathbf{s})$，写成关于 s 的两个多项式的比的形式；(e)*RC* 分支的导纳 $\mathbf{Y}_{RC}(\mathbf{s})$；(f)证明 $\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s}) = (\mathbf{Y}_{RL} + \mathbf{Y}_{RC})/\mathbf{Y}_{RL}\mathbf{Y}_{RC}$。
4. 如图 15.45 所示电路，求从左端看进去的戴维南等效阻抗。

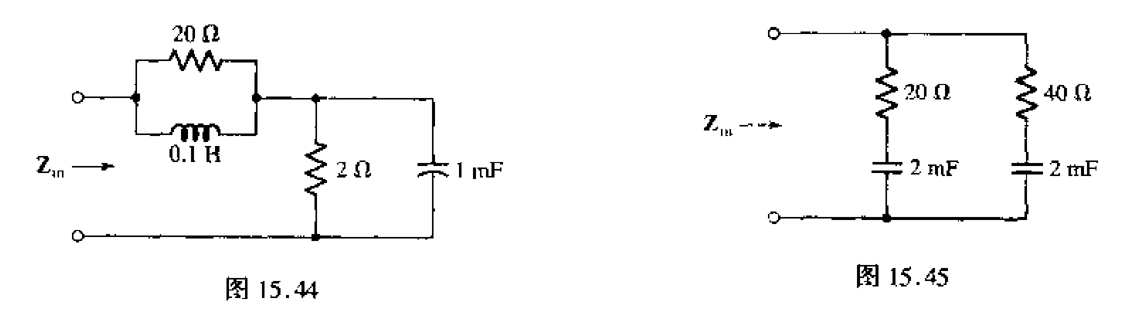


图 15.44　　　　图 15.45

5. (a)求图 15.46 中的 $\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s})$，写成关于 s 的两个多项式的比的形式；(b)求 $\mathbf{Z}_{in}(j8)$，写成直角坐标形式；(c)求 $\mathbf{Z}_{in}(-2+j6)$，写成极坐标形式；(d)将 16 Ω 的电阻改为何值时，使得在 $\mathbf{s} = -5 + j0$ 处 $\mathbf{Z}_{in} = 0$? (e)将 16 Ω 的电阻改为何值时，使得在 $\mathbf{s} = -5 + j0$ 处 $\mathbf{Z}_{in} = \infty$?
6. (a)对于图 15.47 所示的电路，求从左端看进去的戴维南等效阻抗；(b)画出在 $\sigma = 0$ 的条件下，阻抗的幅度关于频率 ω 变化的曲线。

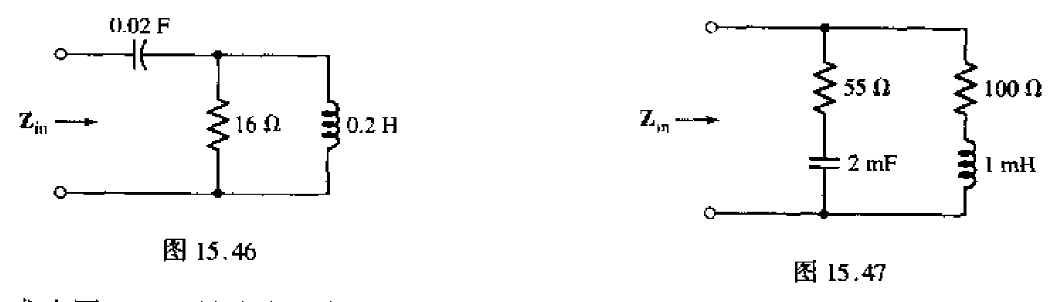


图 15.46　　　　图 15.47

7. 求出图 15.48 所示的电路的输入阻抗 $\mathbf{Z}_{in}$，这是一个共发射极双极型晶体管放大器的线性电路模型，其有效频率范围可达数 MHz。将解表示为关于 s 的多项式的比值形式。

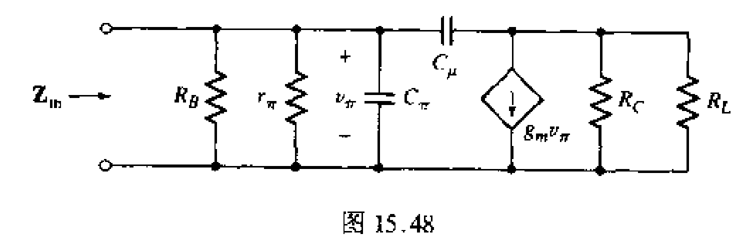


图 15.48

8. 求出图 15.49 所示电路中的 $v(t)$的表达式，要求转换到 s 域中求解。
9. 使用 s 域分析方法，求出图 15.50 中通过电容的电流 $i(t)$。
10. (a) 将图 15.51 的电路转化为正确的 s 域表示方式；(b)求电阻吸收的功率 $p(t)$的表达式。

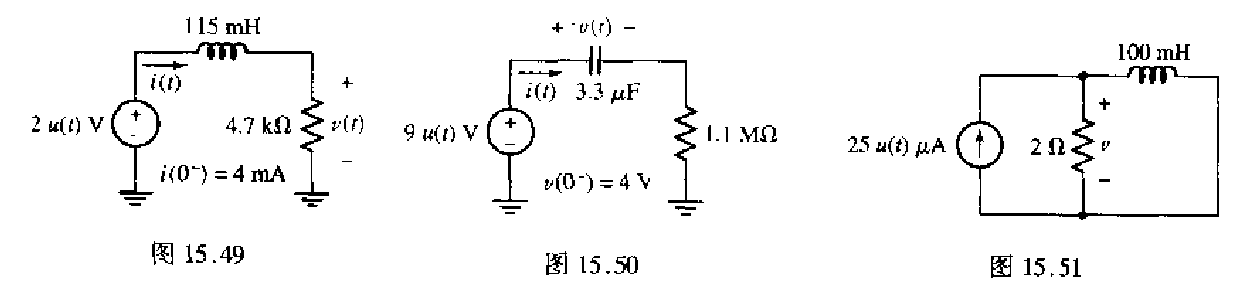


图 15.49　图 15.50　图 15.51

11. (a)如图 15.52 所示电路，令 $v_s = 10e^{-2t}\cos(10t + 30°)u(t)$ V，求 $\mathbf{I}_x$，要求在频域中进行求解；(b)求 $i_x(t)$。
12. 求图 15.53 所示电路的节点电压 $v_1(t)$，假定初始能量为 0。

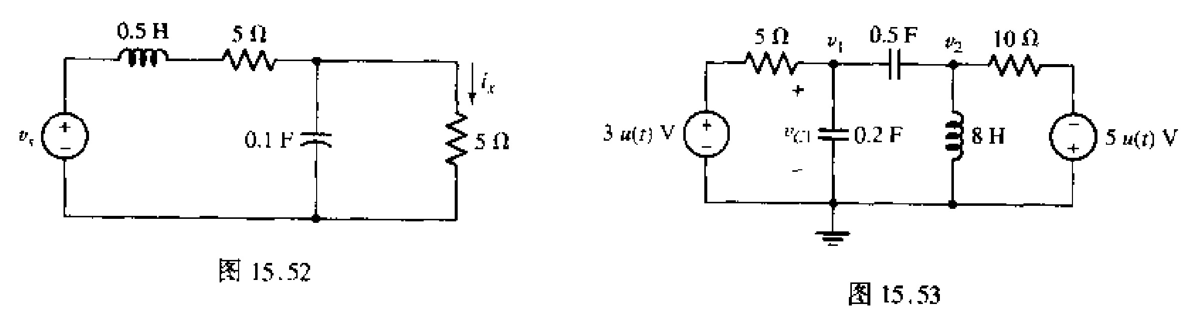


图 15.52　图 15.53

13. 对于图 15.53 的电路，求出中间那个网孔的网孔电流的时域表达式。假定初始能量为 0。
14. 求图 15.53 所示电路的节点电压 $v_1(t)$，设电容的初始电压为 $v_{C1}(0^-) = 9$ V，而其他元件没有存储能量。
15. 如图 15.54 所示电路，令 $i_{s1} = 20e^{-3t}\cos 4tu(t)$ A，$i_{s2} = 30e^{-3t}\sin 4tu(t)$ A。(a)求 $\mathbf{V}_x$，要求在频域中求解；(b)求 $v_x(t)$。
16. (a)对于图 15.55 所示的电路，求 $v(t)$的时域表达式，设 $v(0^-) = 75$ V，假定初始时刻电感中没有存储能量；(b)根据(a)的结果，确定流过 115 V 均方根(rms)电源的稳态电流；(c)采用相量分析法验证(b)的结果。

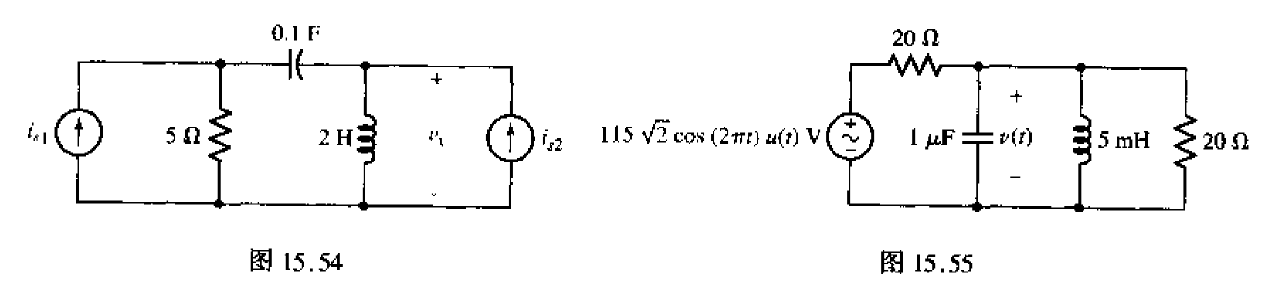


图 15.54　图 15.55

17. 求图 15.56 中的网孔电流 $i_1(t)$与 $i_2(t)$，假定 $t = 0^-$ 时流过 1 mH 的电感的电流($i_2 - i_4$)为 1 A，并用相量分析法验证你的结果在电路趋于稳态时是正确的。
18. 假定图 15.57 的电路在初始时刻没有存储能量，求当 t 等于下列时刻时 v_2 的值：

(a)1 ms；(b)100 ms；(c)10 s。

19. 假定图 15.56 所示电路的受控电压源在雷电中被损坏而不能工作(也就是说，可以将它看做开路)，求 2 Ω 的电阻所吸收的功率的表达式。你应该假定初始时刻电路所有能量均存储在电感上，因此，在 $t=0^-$ 时，流过 1 mH 的电感的电流(i_2-i_4)为 1 mA。

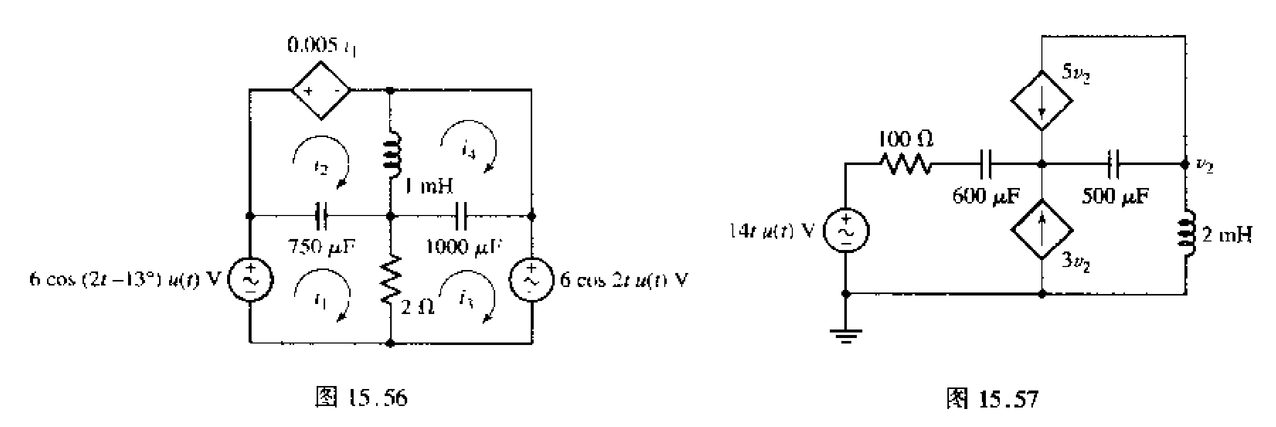


图 15.56　　图 15.57

20. (a)图 15.58 为共发射极双极型晶体管放大器的线性电路模型，求电压增益 $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$ 的表达式。假定初始时刻电容所存储的能量为 0；将你的答案写成关于 $\mathbf{s}$ 的多项式的比值的形式；(b)这个传递函数一共有几个极点？

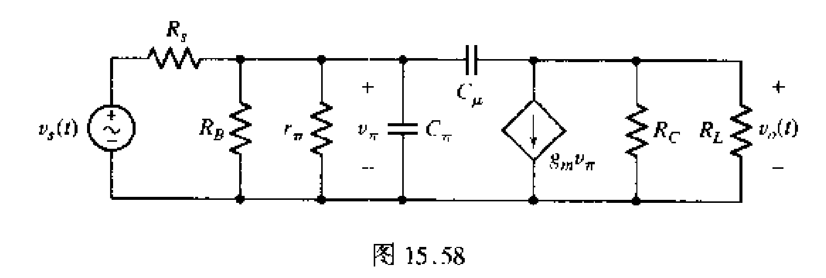


图 15.58

21. (a)将图 15.59 所示的电路转化为 s 域等效电路；(b)求从 1 Ω 电阻看过去的戴维南等效电路；(c) 根据化简后的电路，求流过 1 Ω 电阻的瞬态电流 $i(t)$ 的表达式。

22. 将图 15.59 中的电流源用一个 $20u(t)$ V 的电压源代替，上端为正的参考方向。(a) 将图 15.59 所示的电路转化为 s 域等效电路；(b)求从 1 Ω 电阻看过去的诺顿等效电路；(c)根据化简后的电路，求 $i_C(t)$ 的表达式。

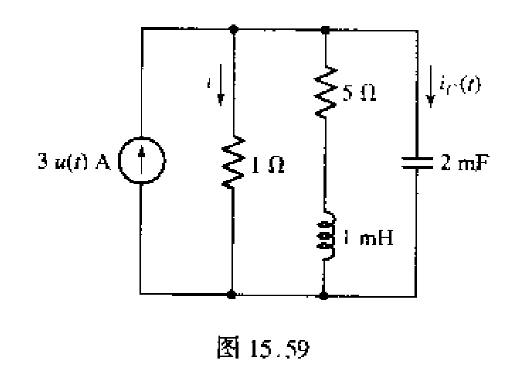


图 15.59

23. (a)在 s 域中使用叠加原理，求解图 15.60 所示电路中 $\mathbf{V}_1(\mathbf{s})$ 和 $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$ 的表达式；(b)求 $v_1(t)$ 与 $v_2(t)$。

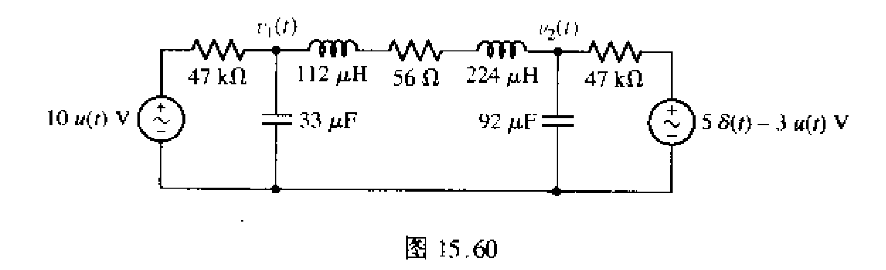


图 15.60

24. 对于图 15.60 的电路，求解图中 56 Ω 的电阻所吸收的功率，要求使用 s 域中的电源变换来求解。

25. (a)求图 15.60 中从 $10u(t)$ V 的电源看过去的 s 域诺顿等效电路；(b)求当 $t=1.5$ ms 时，流出 $10u(t)$ V 的电流。

26. (a)在 s 域中使用叠加原理求解图 15.61 中 $\mathbf{V}_1(\mathbf{s})$ 的表达式；(b)求 $v_1(t)$。

27. (a)使用 s 域中的电源变换，求图 15.62 所示电路的 $\mathbf{I}(\mathbf{s})$；(b)求 $i(t)$；(c)求 $i(t)$ 的稳态值。

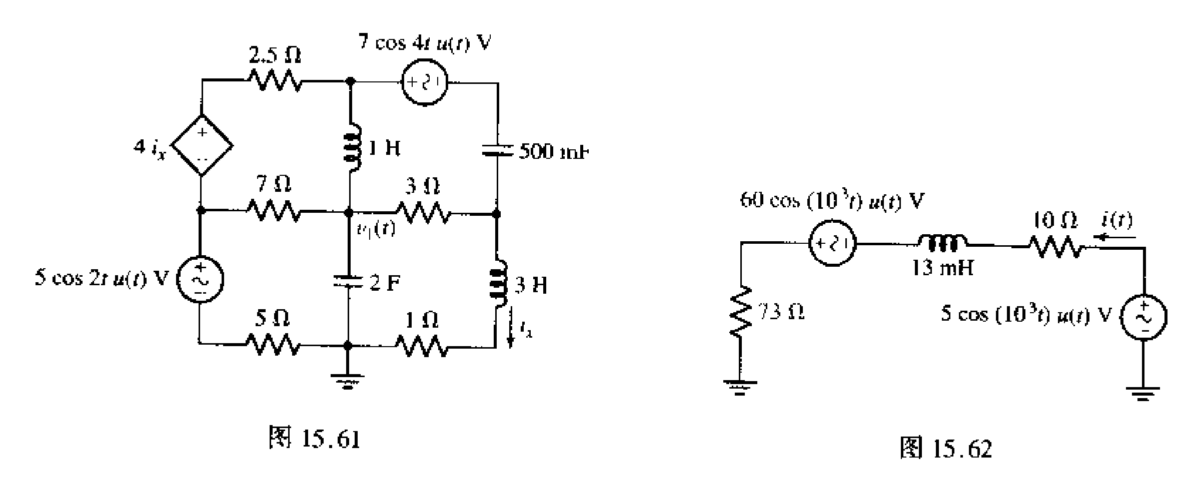


图 15.61

图 15.62

28. 将 5 Ω 电阻与 0.2 F 的电容串联，再用 2 Ω 电阻与 5 H 电感相串联，然后将这两个串联电路并联起来。(a)求这个并联电路的输入导纳 $\mathbf{Y}_1(\mathbf{s})$，将其写成两个关于 s 的多项式比值的形式；(b)求出 $\mathbf{Y}_1(\mathbf{s})$ 的所有极点和零点；(c)如果用一个 10 Ω 的电阻与 $\mathbf{Y}_1(\mathbf{s})$ 并联，求出这时输入导纳的所有极点；(d)如果用 10 Ω 的电阻与 $\mathbf{Y}_1(\mathbf{s})$ 串联，求出这时输入导纳的所有零点。

29. 求出(a)图 15.45 所示的电路的输入阻抗的所有极点和零点；(b)图 15.47 所示的电路的所有极点和零点。

30. 导纳 $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ 在 $\mathbf{s}=0$ 和 $\mathbf{s}=-10$ 处各有一个零点，在 $\mathbf{s}=-5$ 和 $\mathbf{s}=-20$ 处各有一个极点。如果 $\mathbf{s}\to\infty$ 时，$\mathbf{Y}(\mathbf{s})\to 12$ S，求(a)$\mathbf{Y}(j10)$；(b)$\mathbf{Y}(-j10)$；(c)$\mathbf{Y}(-15)$；(d)$5+\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ 的极点和零点。

31. 如图 15.63 所示的网络，(a)求 $\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s})$；(b)求 $\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s})$ 的临界频率。

32. 某电路的传递函数为 $\mathbf{H}(\mathbf{s})=(\mathbf{s}+2)/[(\mathbf{s}+5)(\mathbf{s}^2+6\mathbf{s}+25)]$。当输入下列信号时，求输出响应的 s 域表达式：(a)$\delta(t)$；(b)$e^{-4t}u(t)$；(c)$[2\cos 15t]u(t)$；(d)$te^{-t}u(t)$；(e)指出每个输出响应的极点和零点。

33. 某个线性系统的冲激响应为 $h(t)=5\sin\pi t[u(t)-u(t-1)]$。设输入信号为 $x(t)=$

$2[u(t)-u(t-2)]$，使用卷积，求输出 $y(t)$，并画出它的草图。

34. 令 $f_1(t)=e^{-5t}u(t)$，$f_2(t)=(1-e^{-2t})u(t)$，求 $y(t)=f_1(t)*f_2(t)$，要求(a)在时域中求卷积；(b)使用$\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{F}_1(\mathbf{s})\mathbf{F}_2(\mathbf{s})\}$。

35. 将冲激 $\delta(t)$V 接到某个双端口网络时，输出电源为 $v_o(t)=4u(t)-4u(t-2)$ V，求当输入为 $2u(t-1)$ V 时的输出，并画出它的草图

36. 令 $h(t)=2e^{-3t}u(t)$，$x(t)=u(t)-\delta(t)$，求 $y(t)=h(t)*x(t)$，要求(a)在时域中求卷积；(b)求出 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$和 $\mathbf{X}(\mathbf{s})$，然后求$\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{H}(\mathbf{s})\mathbf{X}(\mathbf{s})\}$。

37. 某电路的冲激电压响应为 $h(t)=5u(t)-5u(t-2)$。求下列输入电压 $v_{in}(t)$下的 s 域与时域响应：(a)$3\delta(t)$ V；(b)$3u(t)$ V；(c)$3u(t)-3u(t-2)$ V；(d)$3\cos 3t$ V；(e)画出(a)~(d)中求出的时域电压响应的草图。

38. 求图 15.64 所示的网络的 $\mathbf{H}(\mathbf{s})=\mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$，并找出它的所有临界频率。

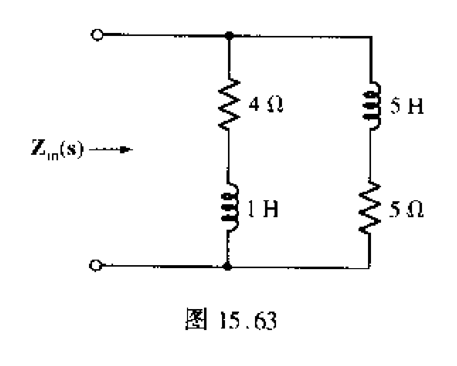


图 15.63

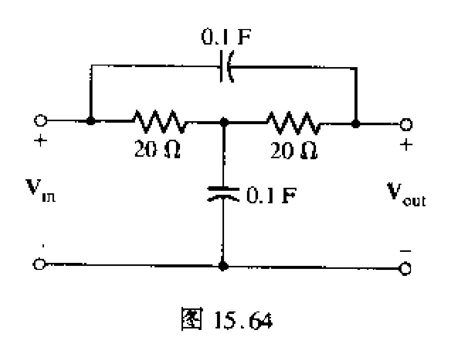


图 15.64

39. $\mathbf{H}(\mathbf{s})=\mathbf{V}_2(\mathbf{s})/\mathbf{V}_1(\mathbf{s})$的零极点分布图如图 15.65 所示，令 $\mathbf{H}(0)=1$。(a)画出当 $\omega=0$ 时，$\mathbf{H}(s)$随 σ 变化的草图；(b)画出当 $\sigma=0$ 时，$\mathbf{H}(s)$随着 ω 变化的草图；(c)求 $|\mathbf{H}(j\omega)|_{max}$。

40. 一个电力机械的输入阻抗有一个二重零点 $\mathbf{s}=-1$；有两个极点，分别为 $\mathbf{s}=-0.5+j\sqrt{3}/2$和 $\mathbf{s}=-0.5-j\sqrt{3}/2$；并且当 $\mathbf{s}=0$ 时，输入阻抗为 1。(a)画出这个阻抗的零极点分布图；(b)画出阻抗幅度的弹性薄层模型；(c)用若干电阻、电感和电容，构造一个具有相同阻抗的电路(提示：根据 s 域表达式进行反推)。

41. 给定电压增益 $\mathbf{H}(\mathbf{s})=(10\mathbf{s}^2+55\mathbf{s}+75)/(\mathbf{s}^2+16)$。(a) 在 s 平面上画出临界频率；(b)计算 $\mathbf{H}(0)$与 $\mathbf{H}(\infty)$；(c)如果使用一种标度模型，使得在原点处$|\mathbf{H}(\mathbf{s})|$的高度为3 cm，那么在 $s=j3$ 处的高度等于多少？(d)大致画出$|\mathbf{H}(\sigma)|$随 σ 变化的图形以及$|\mathbf{H}(\omega)|$随着 ω 变化的图形。

42. 在一个最高机密的政府实验室的屋子后角，一个研究人员发现了一个样子古怪的金属盒子，他的午餐被恶作剧的同事们藏了起来，显然他的同事们具有足够的空闲时间来"作弄"他。因为找不到食物，他决定测量盒子的导纳，发现这个导纳值可以用模型表示为$\mathbf{Y}(\mathbf{s})=(5\mathbf{s}^2+5\mathbf{s}+2)/(5\mathbf{s}^2+15\mathbf{s}+2)$ S。(a)画出导纳的零极点分布图。(b)画出导纳幅度的弹性薄层模型图；(c)如果分母多项式的系数对应于午餐位置的纬度(度、分、秒)，分子多项式的系数对应于午餐位置的经度(度、分、秒)。很显然，这个研究人员的同事们有太多的空闲时间了。

43. 图 15.66 为电流增益 $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{I}_{out}/\mathbf{I}_{in}$ 的零极点分布图，令 $\mathbf{H}(-2) = 6$。(a)将 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ 表示为关于 s 的多项式比值的形式；(b)求 $\mathbf{H}(0)$ 与 $\mathbf{H}(\infty)$；(c)确定从每个临界频率出发到 $\mathbf{s} = j2$ 的箭头的幅度和方向。

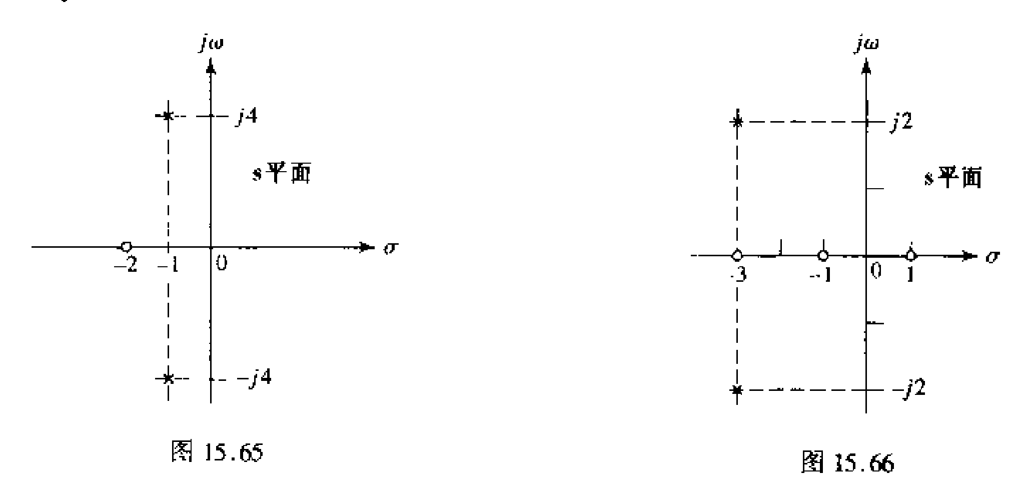


图 15.65　　图 15.66

44. 图 15.57 所示的三元件网络的输入阻抗 $\mathbf{Z}_A(\mathbf{s})$ 在 $\mathbf{s} = -10 + j0$ 处有一个极点。如果用一个 20 Ω 的电阻与这个网络串联后，所得到电路的输入阻抗零点为 $\mathbf{s} = -3.6 + j0$，求 R 与 C 的值。

45. 令 $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 100(\mathbf{s}+2)/(\mathbf{s}^2 + 2\mathbf{s} + 5)$，(a)画出 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ 的零极点图；(b)求 $\mathbf{H}(j\omega)$；(c)求 $|\mathbf{H}(j\omega)|$；(d)画出 $|\mathbf{H}(j\omega)|$ 随 ω 变化的曲线；(e)求当 $|\mathbf{H}(j\omega)|$ 取最大值时相应的频率值 ω_{max}。

46. 在图 15.68 中，$\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s}) = (5\mathbf{s}+20)/(\mathbf{s}+2)$ Ω，求(a)开路端的电压 $v_{ab}(t)$，设 $v_{ab}(0) = 25$ V；(b) ab 端的短路电流 $i_{ab}(t)$，设 $i_{ab}(0) = 3$ A。

47. 图 15.68 所示的无源网络中，$\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s}) = 5(\mathbf{s}^2 + 4\mathbf{s} + 20)/(\mathbf{s}+1)$ Ω。求当 $v_{ab}(t)$ 等于下列情况时，流入端点 a 的瞬态电流 $i_a(t)$：(a) $160e^{-6t}$ V；(b) $160e^{-6t}u(t)$ V，$i_a(0) = 0$，且 $t = 0$ 时，$di_a/dt = 32$ A/s。

48. (a)对图 15.69 所示电路，求 $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{I}_C/\mathbf{I}_s$；(b)求 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ 的极点。(c)求 RLC 电路的 α，ω_0 与 ω_d；(d)求受迫响应 $i_{C,f}(t)$；(e)求自由响应的形式 $i_{C,n}(t)$；(f)求 $i_C(0^+)$ 及 $t = 0^+$ 时 di_C/dt 的值；(g)求完全响应 $i_C(t)$。

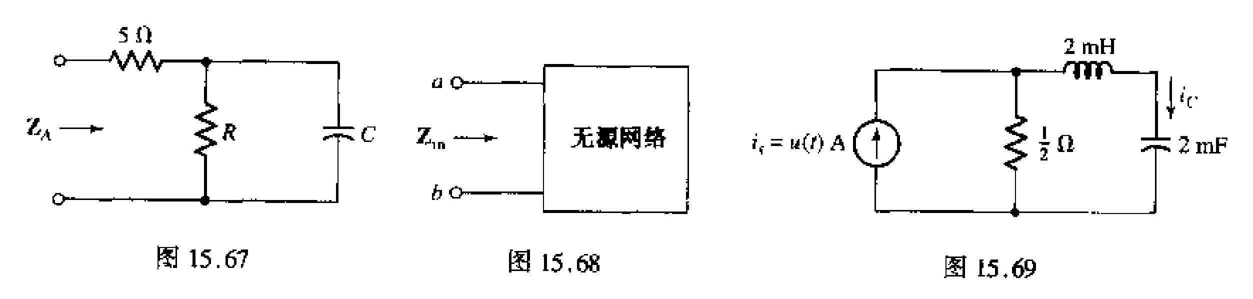


图 15.67　　图 15.68　　图 15.69

49. 对图 15.70 所示的电路：(a)求出 $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{I}_{in}/\mathbf{V}_{in}$ 的极点；(b)令 $i_1(0^+) = 5$ A，$i_2(0^+) = 2$ A，求当 $v_{in}(t) = 500u(t)$ V 时 $i_{in}(t)$ 的表达式。

50.(a)对图 15.71 所示电路,求 $\mathbf{H}(\mathbf{s})=\mathbf{V}(\mathbf{s})/\mathbf{I}_s(\mathbf{s})$,然后求出当 $i_s(t)$等于下列情况时$v(t)$的表达式:(b)$2u(t)$ A;(c)$4e^{-10t}$ A;(d)$4e^{-10t}u(t)$ A。

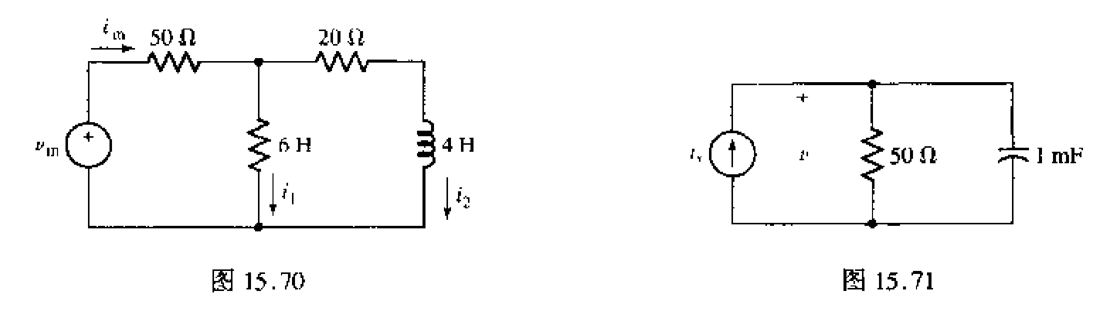


图 15.70　　图 15.71

51.对图 15.72 所示电路:(a)求 $\mathbf{H}(\mathbf{s})=\mathbf{V}_{C2}/\mathbf{V}_s$;(b)令 $v_{C1}(0^-)=0, v_{C2}(0^+)=0$,求当$v_s(t)=u(t)$ V 时 $v_{C2}(t)$的表达式。

52.如图 15.73 所示,求从电源看过去的阻抗 $\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s})$,根据所求的结果求出 $t>0$ 时 $v_{in}(t)$的表达式。

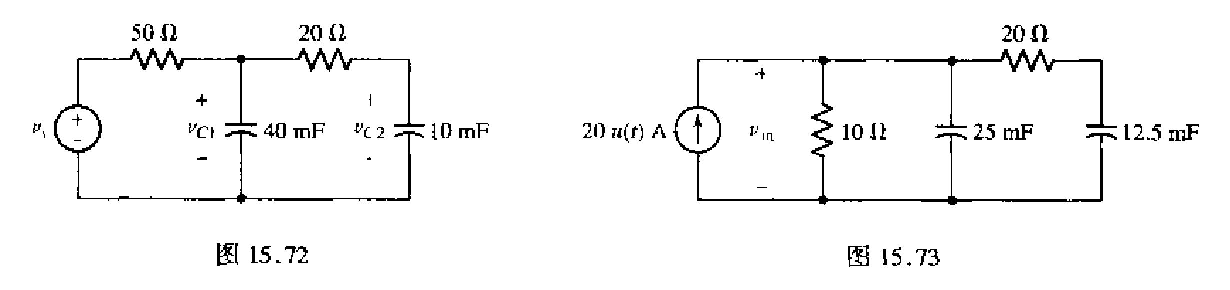


图 15.72　　图 15.73

53.如图 15.39 所示的运放电路,在阻抗为下列值(单位为 Ω)的情况下,分别求出 $\mathbf{H}(\mathbf{s})=\mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$,将其写成关于 s 的多项式比的形式:(a)$\mathbf{Z}_1(\mathbf{s})=10^3+(10^3/\mathbf{s}), \mathbf{Z}_f(\mathbf{s})=5\,000$;(b)$\mathbf{Z}_1(\mathbf{s})=5\,000, \mathbf{Z}_f(\mathbf{s})=10^3+(10^8/\mathbf{s})$;(c)$\mathbf{Z}_1(\mathbf{s})=10^3+(10^8/\mathbf{s}), \mathbf{Z}_f(\mathbf{s})=10^4+(10^8/\mathbf{s})$。

54.对于图 15.40(b)所示电路,令 $R_f=20$ kΩ,求出 R_1 和 C_f 的值,使得$\mathbf{H}(\mathbf{s})=\mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$分别为下列值:(a)$-50$;(b)$-10^{-3}(\mathbf{s}+10^4)$;(c)$-10^{-4}(\mathbf{s}+10^3)$;(d)$10^{-3}(\mathbf{s}+10^5)$,分两步完成。

55.如图 15.40(a)所示的运放电路,令 $R_f=20$ kΩ,求出 R_1 和 C_1 的值,使得 $\mathbf{H}(\mathbf{s})=\mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$ 分别为下列值:(a)-50;(b)$-10^3(\mathbf{s}+10^4)$;(c)$-10^4(\mathbf{s}+10^3)$;(d)$100(\mathbf{s}+10^5)$。分两步完成。

56.用几个运放的级联实现传递函数 $\mathbf{H}(\mathbf{s})=\mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}=-10^{-4}\mathbf{s}(\mathbf{s}+10^2)/(\mathbf{s}+10^3)$,要求只使用 10 kΩ 的电阻,以及开路电路或短路电路,并标出所使用电容的值。

57.设计一个振荡频率为 1 kHz 的文氏桥振荡电路。电阻值只使用本书最后给出的标准电阻值。用 PSpice 进行仿真,验证你的结果。

58.设计一个振荡频率为 60 Hz 的文氏桥振荡电路。用 PSpice 进行仿真,验证你的结果。

59.设计一个产生振荡频率为 440 Hz 正弦信号的文氏桥振荡电路。要求只使用本书最后给出的标准电阻值。用 PSpice 进行仿真,验证你的结果。设计的这个电路将产生什么样的音符。

60. 设计一个电路,使之产生的输出电压由频率为 220 Hz 和 440 Hz 的两种正弦波组成。用 PSpice 进行仿真,验证你的结果。这两个正弦波是否同相?

第 16 章　频 率 响 应

本章要点：

- 计算含有电感和电容电路的谐振频率
- 计算网络的品质因数
- 计算网络的带宽
- 掌握频率缩放和幅度缩放方法
- 学会使用波特(Bode)图来对频率响应曲线进行近似
- 介绍简单滤波器电路的设计

16.1　引言

前面几章中已经出现过了频率响应的概念，读者可能会觉得奇怪，为什么现在要用一章的篇幅来讲述它。在所有的科学和工程领域中，频率响应这个概念都非常重要，因为它是理解决定系统稳定性(或不稳定性)因素的基础，这里说的系统可以是电气系统、机械系统、化学系统或者生物系统等等。在电气工程应用中，当涉及到稳定性的问题时，通常需要用到频率响应的概念。比如，在通信系统中，常常碰到需要将感兴趣的频率分离出来的情况(例如单个电台信号)，只有对滤波器电路深刻理解了之后才能做得到这一点。简而言之，可以用很长的篇幅来阐述学习频率响应的好处；不过，还是言归正传，下面从最简单的并联电路着手分析谐振的概念，然后再讨论日常应用(如音频放大器)中的基本滤波器电路的设计问题。

16.2　并联谐振

虽然实际中很少遇到正弦激励函数，但为什么我们会对正弦激励函数的响应那么感兴趣呢？电力工业是一个例外，除了有时需要考虑由于一些非线性设备导致的其他频率成分以外，电流始终都是以正弦波的形式传播的。在其他大多数电气系统中，激励函数和受迫响应均不是正弦波的形式。对任何用来传递信息的系统来说，正弦波本身几乎没有什么价值；它包含了很有限的信息，因为它将来的值可以根据过去的值精确地估计出来。不仅如此，对任何非正弦的周期信号而言，当一个周期过去以后，剩下的信号也同样不包含任何信息。

设某激励函数含有频率为 10 Hz ~ 100 Hz 的正弦成分，现在，假定将它作用于一个网络，这个网络的特性为：频率为 0 Hz ~ 200 Hz 的所有正弦电压信号从输入端输入后，在输出端它们的幅度均变为原来的两倍，但相角不发生变化。这时，除了输出函数幅度为输入函数幅度的两倍外，前者为后者的无失真精确复制。然而，如果该网络对频率为 10 Hz ~ 50 Hz 的正弦信号和对频率为 50 Hz ~ 100 Hz 的正弦信号分别放大不同倍数，那么，一般情况下输出将会变形，不再是放大了的输入。在某些情况下可能希望输出产生变形，而在另一些情况下可能不希望这样。也就是说，通过精心地设计网络的频率响应，以滤去激励函数的某些频率成分，或者放大某些频率成分。

上面这些就是调谐电路或者说谐振电路的特征，本章将进行详细的讨论。在分析谐振时，可以应用前面在分析频率响应时讨论的所有方法。

16.2.1 谐振

本节开始学习一种非常重要的现象，它发生在含有电感和电容的电路中，这种现象称为谐振，不那么严格地说，可以认为谐振是任何物理系统对幅度固定的正弦激励函数，产生最大幅度响应的现象。不过，当发生这种现象时，即使激励不是正弦函数，通常也称为谐振。谐振系统可以是电气系统、机械系统、液压系统、声学系统和其他别的系统，但这里主要考虑电气系统。

谐振是一种常见的现象。比如，对于汽车，当减震器上下跳动的频率为某个适当的值（大约每秒跳一次）且减震器老化时，可以使汽车产生更加剧烈的振动；但是，如果跳动的频率增加或者减少，那么汽车的振动将显著变小。另一个例子存在于歌剧演员中，当他以某个特定频率唱出某个音符时，甚至可以震碎水晶玻璃酒杯。对于这些例子，可以认为当频率调谐到某个值时产生了谐振；当然，也可以改变振动物体的大小、形状和材料来造成谐振，不过改变这些可能没那么容易。

有些时候我们希望发生谐振，面有些时候却不希望它发生，这要看系统用来做什么。在上面的汽车例子中，由于谐振产生的较大幅度的振动可能有助于分开锁住的减震器，但当速度达到每小时 65 英里[①] 时，这种现象则让人讨厌。

现在给出谐振的更加精确的定义。在至少包含一个电感和一个电容的双端子网络中，定义当网络的输入阻抗为纯阻性时产生了谐振。也就是说：

当网络的输入电压和输入电流同相时，便会产生谐振。

后面将发现，当网络谐振时，将产生最大的幅度响应。

首先将谐振的定义应用于图 16.1 所示网络，这是一个由正弦电流源驱动的并联 *RLC* 网络。事实上，在实验室里使用很高输出阻抗的电源来驱动电感和电容的并联电路时，图 16.1 所示电路就是一个很好的近似。在稳态时，图中理想电流源所接的导纳为：

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \tag{16.1}$$

图 16.1 由电阻、电感和电容组成的并联网络，通常称为并联谐振电路

当输入端的电压和电流同相时发生谐振，这时导纳为实数，因此谐振发生的必要条件由下式给出：

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$$

① 1 英里等于 1.609 km——编者注。

可以通过调节 L, C 和 ω 来产生谐振条件,但这里只考虑变量为 ω 的情形。因此,谐振频率为:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{rad/s} \tag{16.2}$$

或

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{Hz} \tag{16.3}$$

谐振频率 ω_0 与第9章方程(9.10)中定义的谐振频率是一致的。

这里,导纳函数的零极点分布也非常有用。给定 $\mathbf{Y(s)}$:

$$\mathbf{Y(s)} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathbf{s}L} + \mathbf{s}C$$

或

$$\mathbf{Y(s)} = C\,\frac{\mathbf{s}^2 + \mathbf{s}/RC + 1/LC}{\mathbf{s}} \tag{16.4}$$

将分子分解因式,可以得到 $\mathbf{Y(s)}$的零点:

$$\mathbf{Y(s)} = C\,\frac{(\mathbf{s} + \alpha - j\omega_d)(\mathbf{s} + \alpha + j\omega_d)}{\mathbf{s}}$$

其中,α 和 ω_d 与9.5节中并联 RLC 电路的自由响应中的 α 和 ω_d 代表相同的量,即 α 为指数衰减系数:

$$\alpha = \frac{1}{2RC}$$

而 ω_d 为自由谐振频率(不是谐振频率 ω_0):

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

零极点分布图可以直接从分解的因式中得到,如图16.2(a)所示。

观察 α, ω_d 和 ω_0 之间的关系,很明显,从 s 平面的原点到导纳的一个零点的距离在数值上等于 ω_0。给出零极点分布图后,仅通过图形方法就可以求得谐振频率:只要以 s 平面的原点为圆心,画一条通过其中一个零点的弧,这条弧与 $j\omega$ 正半轴的交点即为点 $\mathbf{s} = j\omega_0$。显然,ω_0 略大于自由谐振频率 ω_d,当 ω_d 与 α 的比值增加时,ω_0 与 ω_d 的比值逐渐趋于1。

16.2.2 谐振与电压响应

现在来看响应幅度的变化情况,即图16.1中电压 $\mathbf{V(s)}$随激励函数的频率 ω 变化的情况。如果假定输入为幅度不变的正弦电流源,则电压响应与输入阻抗成比例,它可以由阻抗的零极点分布图得到:

$$\mathbf{Z(s)} = \frac{\mathbf{s}/C}{(\mathbf{s} + \alpha - j\omega_d)(\mathbf{s} + \alpha + j\omega_d)}$$

如图16.2(b)所示。开始时,频率响应的幅度显然为零,然后逐渐增大,在自由谐振频率附近达到最大值,当 ω 变成无穷大时又回到零,如图16.3所示。从图中可以看到,响应的最大值

等于 R 乘以电流源的幅度，这意味着该电路的输入阻抗幅度的最大值为 R；另外，响应的最大值处所对应的频率恰好为 ω_0。图中也标出了另外两个频率 ω_1 和 ω_2，后面将用它们来度量响应曲线的带宽。下面首先来证明输入阻抗幅度的最大值为 R，而且这个最大值出现在电路谐振时。

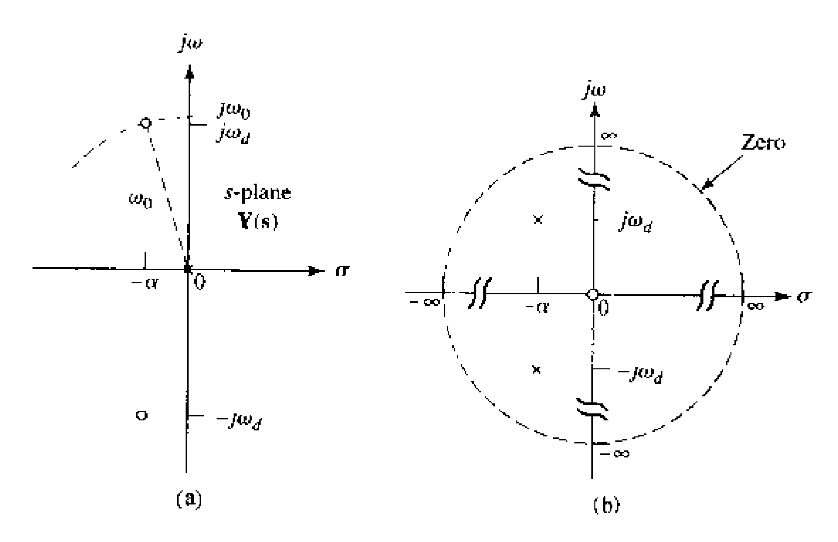


图 16.2 (a)s 平面画出了并联谐振电路的输入导纳的零极点分布图，其中 $\omega_0^2 = \alpha^2 + \omega_d^2$；(b)输入阻抗的零极点分布图，通常，这种类型的电路图没有画出无穷远处的零点和极点

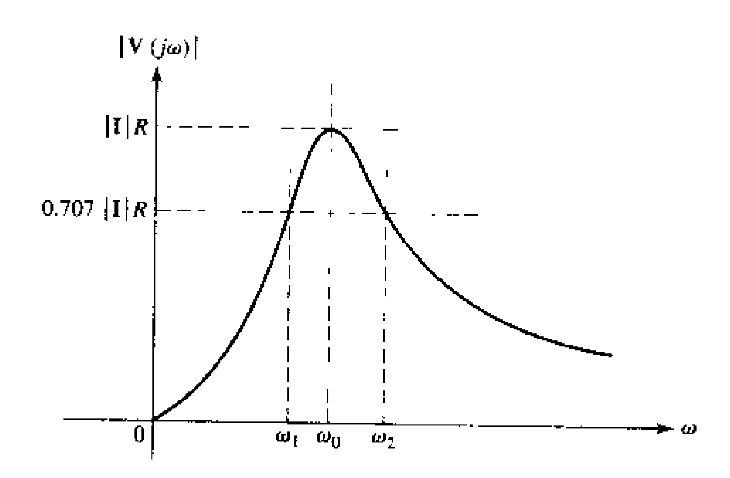


图 16.3 并联谐振电路的电压响应的幅度随频率变化的曲线

式(16.1)中的导纳由电导(conductance)和电纳(susceptance)两部分组成，其中电导为常数，电纳在谐振时达到最小值 0。因此，谐振时导纳的幅度最小，等于 $1/R$，即谐振时阻抗幅度最大，等于 R。

因此，在谐振频率处，图 16.1 所示的并联谐振电路两端的电压为 $\mathbf{I}R$，所有从电流源流出的电流均从电阻中流过。不过，谐振时 L 和 C 中也有电流流过，对于电感 $\mathbf{I}_{L,0} = \mathbf{V}_{L,0}/j\omega_0 L = \mathbf{I}R/j\omega_0 L$，对于电容 $\mathbf{I}_{C,0} = (j\omega_0 C)\mathbf{V}_{C,0} = j\omega_0 CR\mathbf{I}$，因为谐振时 $1/\omega_0 C = \omega_0 L$，因此可以得到：

$$\mathbf{I}_{C,0} = -\mathbf{I}_{L,0} = j\omega_0 CR\mathbf{I} \tag{16.5}$$

于是：

$$\mathbf{I}_{C,0} + \mathbf{I}_{L,0} = \mathbf{I}_{H} = 0$$

也就是说，流过 LC 组合电路的净电流为零。求解响应幅度的最大值及其对应的频率并不总是一件很容易的事，对于不那么标准的电路，可能发现，需要将响应的幅度写成解析形式（通常为实部与虚部的平方和再开平方的形式），然后将这个表达式对频率求导数并令导数为 0，从这个方程中求出最大幅度所对应的频率，最后将求得的频率代入幅度表达式中，就可以得到响应幅度的最大值。可以用上面这个简单的电路作为练习，来验证这个求解步骤的正确性，但前面已经看到，并不一定要按照这个步骤来求解

16.2.3 品质因数

需要强调的是，如果保持激励的幅度不变而改变元件的参数，可以发现图 16.3 所示的响应曲线的高度只与 R 的值有关，但曲线的宽度和边缘的陡峭程度却和其他两个元件有关。可以将"响应曲线的宽度"简称为"带宽"，但也可以用另一个非常重要的参数——品质因数(Q)来表示曲线的特征和电路元件的关系。

需要非常注意的是，不要将品质因数与电荷或者电抗功率相混淆，因为它们都用相同的字母 Q 来表示。

后面将发现，对于任何谐振电路，响应曲线的尖锐程度均由一个完整周期内它所能存储的最大能量与它消耗的能量的比值决定，将 Q 定义为：

$$Q = 品质因数 = 2\pi \frac{存储的最大能量}{每周期内消耗的能量} \tag{16.6}$$

将比例常数 2π 包含在定义式中是为了简化下面将要求出的更有用的 Q 的表达式。因为能量只能存储在电感和电容中，只能消耗在电阻中，因此可以用存储在每个电抗元件中的瞬态能量和消耗在电阻中的能量来表示 Q：

$$Q = 2\pi \frac{[w_L(t) + w_C(t)]_{max}}{P_R T}$$

其中 T 为计算 Q 时相应的正弦信号周期。

现在根据这个定义来求图 16.1 所示电路在谐振频率上的 Q 值，用 Q_0 表示。选取电流激励函数为：

$$i(t) = \mathbf{I}_m \cos \omega_0 t$$

可以求得谐振时的电压响应为：

$$v(t) = Ri(t) = R\mathbf{I}_m \cos \omega_0 t$$

此时，电容存储的瞬态能量为：

$$w_C(t) = \frac{1}{2} Cv^2 = \frac{\mathbf{I}_m^2 R^2 C}{2} \cos^2 \omega_0 t$$

而电感存储的瞬态能量由下式决定：

$$w_L(t) = \frac{1}{2} Li_L^2 = \frac{1}{2} L\left(\frac{1}{L}\int v dt\right)^2 = \frac{1}{2L}\left[\frac{R\mathbf{I}_m}{\omega_0} \sin \omega_0 t\right]^2$$

即

$$w_L(t)=\frac{\mathbf{I}_m^2R^2C}{2}\sin^2\omega_0 t$$

因此,瞬态能量的总和为常数:

$$w(t)=w_L(t)+w_C(t)=\frac{\mathbf{I}_m^2R^2C}{2}$$

这个常数必然也是最大值。为了求得一个周期内电阻消耗的能量,求出电阻吸收的能量求平均值(参见11.3节):

$$P_R=\frac{1}{2}\mathbf{I}_m^2R$$

然后乘以周期 T,可以得到:

$$P_RT=\frac{1}{2f_0}\mathbf{I}_m^2R$$

因此得到谐振时的品质因数为:

$$Q_0=2\pi\frac{\mathbf{I}_m^2R^2C/2}{\mathbf{I}_m^2R/2f_0}$$

即

$$Q_0=2\pi f_0RC=\omega_0RC \tag{16.7}$$

该式[也可以表示为式(16.8)]只适合于图16.1所示的简单并联 *RLC* 电路的情况。通过简单的代换可以得到 Q_0 的其他很有用的等效表达式:

$$Q_0=R\sqrt{\frac{C}{L}}=\frac{R}{|X_{C,0}|}=\frac{R}{|X_{L,0}|} \tag{16.8}$$

16.2.4 Q 的其他解释

无量纲常数 Q_0 是并联谐振电路中三个元件的函数。不过,Q 的概念不只局限于电路甚至电气系统中,可以用它来描绘任何谐振现象。例如,考虑一个跳跃的高尔夫球,假定其重量为 W,从高度为 h_1 的地方释放这个高尔夫球,它从非常坚硬(没有能量损失)的水平表面弹回的高度为 h_2,初始能量存储为 Wh_1,一个周期所损失的能量为 $W(h_1-h_2)$,因此 Q_0 为:

$$Q_0=2\pi\frac{h_1W}{(h_1-h_2)W}=\frac{2\pi h_1}{h_1-h_2}$$

理想情况下,高尔夫球将弹回到其初始高度,这时 Q_0 为无穷大,而典型的 Q_0 值为35。需要注意的是,在这个机械系统的例子中,Q 是通过自由响应而不是受迫响应来计算的。如果知道电路的自由响应,也可以计算出电路的 Q 值,参见后面将得出的式(16.10)和式(16.11)。

考察电感和电容的电流值,可以得到 Q 值的另一个有用的解释,由式(16.5)可以得到:

$$\mathbf{I}_{C,0}=-\mathbf{I}_{L,0}=j\omega_0CR\mathbf{I}=jQ_0\mathbf{I} \tag{16.9}$$

注意到，每个电流的幅度均等于 Q_0 乘以电流源的电流幅度，只是它们之间有一个 180°的相位差。因此，如果将一个电流源接到 Q_0 等于 50 的并联谐振电路中，并且在谐振频率处，电流源的电流为 2 mA，这时电阻中的电流为 2 mA，而电感和电容中的电流均为 100 mA。因此可以将并联谐振电路看做是电流放大器，不过，显然不是能量放大器，因为它是无源网络。

下面来推导并联谐振电路各个参数之间的关系。很早以前，就已经讨论过 α，ω_d 和 ω_0 这三个参数与自由响应的关系。根据定义，谐振是一个正弦稳态概念，从根本上说，它与受迫响应有关，因为它是通过输入(纯阻性)阻抗来定义的。谐振电路的两个最重要的参数要数谐振频率 ω_0 和品质因数 Q_0 了，指数衰减系数和自由谐振频率均可以用 ω_0 和 Q_0 表示：

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(Q_0/\omega_0 C)C}$$

即

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q_0} \tag{16.10}$$

且

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

即

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \tag{16.11}$$

16.2.5 阻尼系数

为了以后引用方便，这里有必要给出另一个与 ω_0 和 Q_0 有关的关系式。式(16.4)的分子中的二次因式：

$$\mathbf{s}^2 + \frac{1}{RC}\mathbf{s} + \frac{1}{LC}$$

可以写成用 α 和 ω_0 表示的形式：

$$\mathbf{s}^2 + 2\alpha\mathbf{s} + \omega_0^2$$

在系统理论或自动控制理论领域中，通常将该因式写成略有不同的形式，其中含有无量纲常数 ζ，称为阻尼系数：

$$\mathbf{s}^2 + 2\zeta\omega_0\mathbf{s} + \omega_0^2$$

比较这两个表达式，可以得到 ζ 和其他参数的关系：

$$\zeta = \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{1}{2Q_0} \tag{16.12}$$

例 16.1 某并联谐振电路的参数如下：$L = 2.5$ mH，$Q_0 = 5$，$C = 0.01\ \mu$F，求 ω_0，α，ω_d 和 R 的值

根据式(16.2)，可以得到 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 200$ krad/s，因此 $f_0 = \omega_0/2\pi = 31.8$ kHz。

这时，根据式(16.10)，立刻可以得到 α 的值：

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q_0} = \frac{2\times 10^5}{(2\times 5)} = 2\times 10^4 \text{ Np/s}$$

然后利用第 9 章中常用到的关系式：

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

于是：

$$\omega_d = \sqrt{(2\times 10^5)^2 - (2\times 10^4)^2} = 199.0 \text{ krad/s}$$

然后求并联电路中电阻的值，这可由式(16.7)得到：

$$Q_0 = \omega_0 RC$$

即

$$R = \frac{Q_0}{\omega_0 C} = \frac{5}{(2\times 10^5 \times 10^{-8})} = 2.50 \text{ k}\Omega$$

练习

16.1 并联谐振电路各元件的值分别为：$R = 8$ kΩ，$L = 50$ mH，$C = 80$ nF。求(a)ω_0；(b)Q_0；(c)ω_d；(d)α；(e)ζ。

16.2 求并联谐振电路元件 R，L 和 C 的值，使得 $\omega_0 = 1\,000$ rad/s，$\omega_d = 998$ rad/s，且谐振时 $\mathbf{Y}_{in} = 1$ mS。

答案：16.1：15.811 krad/s；10.12；15.792 krad/s；781 Np/s；0.049 4。16.2：100 Ω；126.4 mH；7.91 μF

下面我们用并联 RLC 电路的导纳 $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ 的零极点分布图来解释 Q_0。保持 ω_0 为常数(这可以通过保持 L 和 C 为常数而改变 R 的值来做到)，当 Q_0 增大时，根据 α，Q_0 和 ω_0 之间的关系可知，$\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ 的两个零点将向 $j\omega$ 轴靠近，而且逐渐远离 σ 轴。如果我们回想起，可以通过画一条以原点为圆心，经过零点的弧来在 $j\omega$ 正半轴上确定点 $\mathbf{s} = j\omega_0$ 的位置，那么这两个零点随着 Q_0 而移动的规律将变得很清楚。由于 ω_0 保持不变，则半径也保持不变，因此当 Q_0 增大时，两个零点必然沿着这条弧朝着 $j\omega$ 正半轴方向移动。

图 16.4 中画出了这两个零点，图中的箭头表示当 R 增大时它们移动的轨迹。当 R 为无穷大时，Q_0 也变为无穷大，这时，两个零点将出现在 $j\omega$ 轴上 $\mathbf{s} = \pm j\omega_0$ 处。当 R 减小时，两个零点将沿着弧线朝着 σ 轴移动，当 $R = \frac{1}{2}\sqrt{L/C}$ 或者 $Q_0 = \frac{1}{2}$ 时，在 σ 轴上 $\mathbf{s} = -\omega_0$ 处将出现二重零点，这是临界阻尼的情况，这时 $\omega_d = 0$，$\alpha = \omega_0$。如果 R 和 Q_0 继续减小，那么 σ 负半轴上的两个零点将朝着相反的方向移动，但这些小的 Q_0 值实际上并不代表典型的谐振电路，因此不做进一步讨论。

后面，我们以 $Q_0 \geq 5$ 作为高 Q 电路的标准。对于本例，当 $Q_0 = 5$ 时，零点位置为 $\mathbf{s} = -0.1\omega_0 \pm j0.995\omega_0$，这时 ω_0 和 ω_d 只差 0.5%。

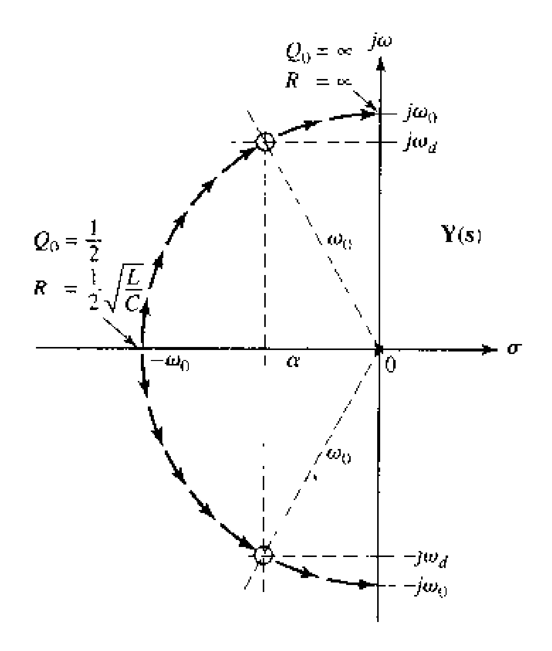


图 16.4 导纳 Y(s)的两个零点位于 $s=-\alpha\pm j\omega_d$ 处,并画出了当 R 从$\frac{1}{2}\sqrt{L/C}$增加到∞时零点的半圆形的轨迹图

16.3 并联谐振的更多内容

下面继续讨论并联谐振电路,首先定义半功率频率和半功率带宽,然后利用这些新定义的量来对高 Q 电路的响应数据进行近似。将给出响应曲线"宽度"(例如图 16.3)的更精确定义,然后将其与 Q_0 联系起来。首先,定义半功率频率 ω_1 和 ω_2,在这些频率上,并联谐振电路的输入导纳幅度为谐振时的幅度的$\sqrt{2}$倍。因为图 16.3 所示的曲线为以频率为参数的正弦电流源在并联电路上产生的电压的响应曲线,因此,在半功率频率上,电压响应幅度为最大值的$\sqrt{2}$,即 0.707 倍,对于阻抗的幅度也有同样的关系。称 ω_1 为下半功率频率,称 ω_2 为上半功率频率。

这两个名字源于这样一个事实,即如果某个电压为谐振电压的 $1/\sqrt{2}$倍,相当于该电压的平方为谐振时电压平方的一半,因此,在半功率频率上,电阻吸收的功率为谐振时它所吸收的功率的一半。

16.3.1 带宽

谐振电路的(半功率)带宽定义为两个半功率频率的差:

$$B\equiv\omega_2-\omega_1 \tag{16.13}$$

虽然曲线从 $\omega=0$ 一直延伸到 $\omega=\infty$,实际宽度为无穷大,但通常倾向于认为带宽是响应曲线的"宽度"。更确切地说,半功率带宽为响应曲线上大于或等于最大值的 70.7%部分的宽度。

下面将带宽表示为 Q_0 和谐振频率的函数,首先写出并联 RLC 电路的导纳:

$$\mathbf{Y}=\frac{1}{R}+j\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)$$

将其改写为：

$$\mathbf{Y}=\frac{1}{R}+j\frac{1}{R}\left(\frac{\omega\omega_0 CR}{\omega_0}-\frac{\omega_0 R}{\omega\omega_0 L}\right)$$

即

$$\mathbf{Y}=\frac{1}{R}\left[1+jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] \tag{16.14}$$

再一次看到，谐振时导纳的幅度为 $1/R$。同时，注意到只有在合适的频率下，使得括号中虚部的幅度为 1 时，导纳的幅度才等于$\sqrt{2}/R$，即：

$$Q_0\left(\frac{\omega_2}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_2}\right)=1 \quad 和 \quad Q_0\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)=-1$$

记住 $\omega_2>\omega_0$，而 $\omega_1<\omega_0$

解之得：

$$\omega_1=\omega_0\left[\sqrt{1+\left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2}-\frac{1}{2Q_0}\right] \tag{16.15}$$

$$\omega_2=\omega_0\left[\sqrt{1+\left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2}+\frac{1}{2Q_0}\right] \tag{16.16}$$

虽然这两个表达式看起来很繁琐，但它们的差的表达式却非常简单，因此得到带宽的公式为：

$$\mathcal{B}=\omega_2-\omega_1=\frac{\omega_0}{Q_0}$$

将式(16.15)和式(16.16)乘起来，可以发现 ω_0 恰好等于两个半功率频率的几何平均：

$$\omega_0^2=\omega_1\omega_2$$

或

$$\omega_0=\sqrt{\omega_1\omega_2}$$

Q_0 值较高的电路带宽较窄，也就是说响应曲线较尖锐，它们有较高的频率选择性，或者说有较高的品质因数。

16.3.2 高 Q 电路的近似

许多谐振电路均设计为具有很高的 Q_0 值，这是为了充分利用它们带宽窄或频率选择性高的特性。当 Q_0 大于 5 时，可以对上下半功率频率的表达式和谐振点附近的响应的表达式进行很好近似，因此将 Q_0 大于或等于 5 的电路称为“高 Q 电路”。图 16.5 中画出了一个 Q_0 约等于 5 的并联 RLC 电路的零极点分布图。因为：

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q_0}$$

所以：

$$\alpha = \frac{1}{2}B$$

两个零点 s_1 和 s_2 的位置可以近似为：

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$$
$$\approx -\frac{1}{2}B \pm j\omega_0$$

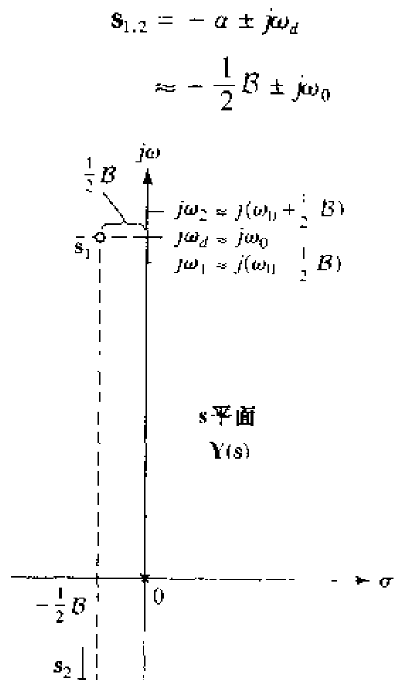


图16.5　并联 RLC 电路的 $\mathbf{Y}(s)$ 的零极点分布图。两个零点到 $j\omega$ 轴的距离等于 $\frac{1}{2}B$ Np/s（或 rad/s），到 σ 轴的距离约为 $j\omega_0$ rad/s（或 Np/s）。上下半功率频率的距离等于 B rad/s，且它们与谐振频率和自由谐振频率的距离大约为 $\frac{1}{2}B$ rad/s

此外，两个半功率频率（在 $j\omega$ 正半轴上）也可以近似为下面的简洁形式：

$$\omega_{1,2} = \omega_0\left[\sqrt{1+\left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \mp \frac{1}{2Q_0}\right] \approx \omega_0\left(1 \mp \frac{1}{2Q_0}\right)$$

或

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \mp \frac{1}{2}B \tag{16.17}$$

也就是说，对于高 Q 电路，每个半功率频率与谐振频率的距离约等于带宽的一半，从图16.5可以看到这一点。

将式(16.17)中 ω_1 和 ω_2 的近似表达式加起来，可以得到结论：对于高 Q 电路，ω_0 约等于 ω_1 和 ω_2 的算术平均：

$$\omega_0 \approx \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

下面在 $j\omega$ 轴上的 $j\omega_0$ 上方离 $j\omega_0$ 很近的地方画一个测试点。为了求出在这个频率下并联 RLC 网络的导纳，构造三个从临界频率指向测试点的矢量。如果测试点很接近 $j\omega_0$，那么从极点指向测试点的矢量长度约等于 $j\omega_0$，而从下面那个零点指向测试点的矢量长度约为 $j2\omega_0$，因此，导纳可以用下式近似表示为：

$$\mathbf{Y(s)} \approx C\frac{(j2\omega_0)(\mathbf{s}-\mathbf{s}_1)}{j\omega_0} \approx 2C(\mathbf{s}-\mathbf{s}_1) \tag{16.18}$$

其中 C 为电容，和式(16.4)中的一样。为了得到矢量($\mathbf{s}-\mathbf{s}_1$)的好的近似，我们来看零点 $\mathbf{s}_1$ 附近那部分平面的放大图(图 16.6)。采用直角坐标，$\mathbf{s}-\mathbf{s}_1$ 可以表示为：

$$\mathbf{s}-\mathbf{s}_1 \approx \frac{1}{2}\mathcal{B} + j(\omega - \omega_0)$$

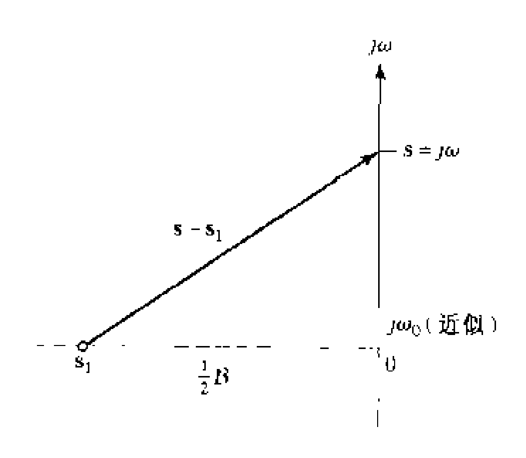


图 16.6 放大了的高 Q_0 并联 RLC 电路的 $\mathbf{Y(s)}$ 的零极点分布图

如果用 ω_d 代替上式中的 ω_0，则这是一个精确的等式。将该式代入 $\mathbf{Y(s)}$ 的近似表达式[即式(16.18)]中，并提出因子 $\frac{1}{2}\mathcal{B}$：

$$\mathbf{Y(s)} \approx 2C\left(\frac{1}{2}\mathcal{B}\right)\left(1 + j\frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}\mathcal{B}}\right)$$

或

$$\mathbf{Y(s)} \approx \frac{1}{R}\left(1 + j\frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}\mathcal{B}}\right)$$

可以将分式 $(\omega - \omega_0)/\left(\frac{1}{2}\mathcal{B}\right)$ 理解为"距离谐振频率的半带宽数"，用 N 表示，因此：

$$\mathbf{Y(s)} \approx \frac{1}{R}(1 + jN) \tag{16.19}$$

其中：

$$N = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}\mathcal{B}} \tag{16.20}$$

对于上半功率频率，$\omega_2 \approx \omega_0 + \frac{1}{2}B$，$N = +1$，它处于谐振频率上方半功率带宽处；对于下半功率频率，$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{1}{2}B$，$N = -1$，它处于谐振频率下方半功率带宽处。

式(16.19)比前面的精确表达式更加好用，根据式(16.19)可以得到导纳的幅度为：

$$|\mathbf{Y}(j\omega)| \approx \frac{1}{R}\sqrt{1+N^2}$$

而 $\mathbf{Y}(j\omega)$ 的相角为 N 的反正切：

$$\text{ang}\, \mathbf{Y}(j\omega) \approx \tan^{-1} N$$

例题 16.2 求并联 RLC 网络的导纳的近似值，其中 RLC 网络的参数为 $R = 40\ \text{k}\Omega$，$L = 1\ \text{H}$，$C = \frac{1}{64}\ \mu\text{F}$，工作频率为 $\omega = 8.2\ \text{krad/s}$

- 弄清问题的目标：
  要求的是该简单 RLC 网络在频率为 $\omega = 8.2\ \text{krad/s}$ 时导纳的近似值，这说明 Q_0 至少必须是5。
- 收集已知信息：
  已经给出了 R，L 和 C 的值和工作频率，不管是用导纳的精确表达式还是用近似表达式来计算，条件都已经足够了。
- 选择最适合问题的已有方法：
  为了使用导纳的近似表达式来计算，首先必须求出谐振时的品质因数 Q_0 和带宽。
  根据式(16.2)可以求出谐振频率为 $1/\sqrt{LC} = 8\ \text{krad/s}$，因此 $Q_0 = \omega_0 RC = 5$，带宽为 $\omega_0/Q_0 = 1.6\ \text{krad/s}$，该电路的 Q_0 值说明足以使用"高 Q"近似了。
- 建立适当的方程组：
  根据式(16.19)：

$$\mathbf{Y}(s) \approx \frac{1}{R}(1 + jN)$$

  因此：

$$|\mathbf{Y}(j\omega)| \approx \frac{1}{R}\sqrt{1+N^2} \quad 和 \quad \mathbf{Y}(j\omega) \approx \tan^{-1} N$$

- 确定是否还需要其他信息：
  还需要知道 N 的值，它表示从 ω 到谐振频率 ω_0 一共有几个半带宽：

$$N = (8.2 - 8)/0.8 = 0.25$$

- 试解：
  现在可以用这些近似关系来求网络导纳的幅度和相角了：

$$\text{ang}\, \mathbf{Y} \approx \tan^{-1} 0.25 = 14.04°$$

  以及：

$$|\mathbf{Y}| \approx 25\sqrt{1 + (0.25)^2} = 25.77\ \mu\text{S}$$

● 证实所得解是否合理和满足要求：

使用式(16.1)算出的精确值为：

$$\mathbf{Y}(j8\,200) = 25.75 \angle 13.87^\circ \ \mu\text{S}$$

可以看到，在这个频率下，用近似方法算出的导纳的幅度和相角是足够精确的(精确度大于2%)。

练习

16.3 某高 Q 并联谐振电路的 $f_0 = 440$ Hz，相应的 $Q_0 = 6$。用式(16.15)计算 f_1 和 f_2 的精确值，然后用式(16.17)计算它们的近似值。

答案：404.9 Hz; 478.2 Hz; 403.3 Hz; 476.7 Hz

我们希望用这些近似式来计算高 Q 电路谐振频率附近的参数，已经约定“高 Q”电路蕴含了 $Q_0 \geqslant 5$ 这一条件。但到底离谐振频率多近才算“近”呢？可以证明，当 $Q_0 \geqslant 5$ 且 $0.9\omega_0 \leqslant \omega \leqslant 1.1\omega_0$ 时，用近似方法计算出的幅度和相角的误差将小于5%。虽然这段带宽看起来很窄，但在大多数情况下，这已经非常足够包含感兴趣的频率范围了。例如，调幅(AM)广播通常含有一个调谐到谐振455 Hz频率的电路，相应的半功率带宽为10 kHz，因此其 Q_0 为45.5，两个半功率频率约为450 kHz和460 kHz。而根据近似式计算出频率范围409.5 kHz到500.5 kHz都是有效的(误差小于5%)，这个频率范围基本上覆盖了响应曲线的整个峰。只有在响应曲线上离谐振频率很远的“尾巴”上，采用近似方法计算出的值才有很大误差①。

对前面得到的结论做一个总结，以此结束关于并联谐振的讨论。在谐振频率 ω_0 处，输入导纳的虚部为0，或者说导纳的相角为0，因此 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$。Q_0 反映了电路的“品质”，它定义为一个周期内电路所存储的能量与它消耗的能量的比值再乘上 2π，根据这个定义，我们可以得到 $Q_0 = \omega_0 RC$。在两个半功率频率 ω_1 和 ω_2 处，导纳的幅度为最小幅度值的$\sqrt{2}$倍，也可以认为在这两个频率处，电压响应为最大值的70.7%。(对于高 Q_0 电路)这两个频率的精确和近似表达式为：

$$\omega_{1,2} = \omega_0\left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \mp \frac{1}{2Q_0}\right] \approx \omega_0 \mp \frac{1}{2}\mathcal{B}$$

其中$\mathcal{B}$为上下半功率频率的差，称为半功率带宽，可用下式表示：

$$\mathcal{B} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

对高 Q 电路，输入导纳也可以用近似表达式表示为：

$$\mathbf{Y} \approx \frac{1}{R}(1 + jN) = \frac{1}{R}\sqrt{1 + N^2} \angle \tan^{-1} N$$

其中：

---

① 对于离谐振频率很远的频率，通常只需要非常粗略的结果，因为一般不需要更精确的结果。

$$N \doteq \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}B}$$

对于离谐振频率的距离不超过1/10的频率来说，这个近似都是有效的。

16.4 串联谐振

可能会发现，串联 RLC 电路不如并联 RLC 电路那么经常使用，虽然如此，但串联 RLC 电路也是值得考虑的。下面来看图16.7所示电路，注意到电路元件的下标均为 s（表示串联），这样，在和并联电路相比较时，不至于和并联电路元件混淆。

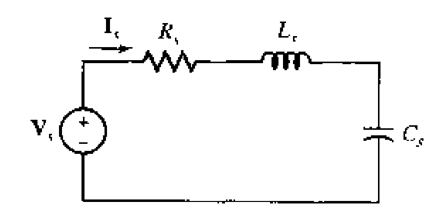


图16.7 串联谐振电路

再次指出，这一段和16.3节的最后一段一致，只是使用对偶原理，将针对并联 RLC 的语言换成了针对串联 RLC 的语言。

前面用了两节的篇幅来讨论并联谐振，对于串联 RLC 谐振电路，也可以用相同的办法来讨论，但是更聪明的办法是利用对偶的概念，这样可避免不必要的重复。为简单起见，将注意力集中到上一节最后一段关于并联谐振的结论上，重要的结果都包含在其中，可以使用对偶语言将这一段的重要的结论转述为适合于串联 RLC 电路的情形。

对前面得到的结论做一个总结，以此结束关于串联谐振的讨论。对串联谐振电路，在谐振频率 ω_{0s} 处，输入阻抗的虚部为0，或者说阻抗的相角为0，因此 $\omega_{0s} = 1/\sqrt{L_sC_s}$。$Q_{0s}$ 反映了电路的"品质"，它定义为一个周期内电路所存储的能量与它消耗的能量的比值再乘上 2π，根据这个定义，我们可以得到 $Q_{0s} = \omega_{0s}L_s/R_s$。在两个半功率频率 ω_{1s} 和 ω_{2s} 处，阻抗的幅度为最小幅度值的 $\sqrt{2}$ 倍，也可以认为在这两个频率处，电流响应为最大值的70.7%，（对于高 Q_{0s} 电路）这两个频率的精确和近似表达式为：

$$\omega_{1s,2s} = \omega_{0s}\left[\sqrt{1+\left(\frac{1}{2Q_{0s}}\right)^2} \mp \frac{1}{2Q_{0s}}\right] \approx \omega_{0s} \mp \frac{1}{2}B_s$$

其中 B_s 为上下半功率频率的差，称为半功率带宽，可用下式表示：

$$B_s \equiv \omega_{2s} - \omega_{1s} = \frac{\omega_{0s}}{Q_{0s}}$$

对高 Q_{0s} 电路，输入阻抗也可以用近似表达式表示为：

$$\mathbf{Z}_s \doteq R_s(1 + jN_s) = R_s\sqrt{1+N_s^2}\underline{/\tan^{-1}N_s}$$

其中：

$$N_s = \frac{\omega - \omega_{0s}}{\frac{1}{2}B_s}$$

对于离谐振频率的距离不超过1/10的频率来说，这个近似都是有效的。

从现在起，除非会产生混淆，否则将不再使用下标 s 来表示串联谐振电路。

例16.3 将电压源 $v_s = 100\cos\omega t$ mV 接到由 10 Ω 电阻、200 nF 电容和 2 mH 电感组成的串联谐振电路上。分别使用精确方法和近似方法计算 $\omega = 48$ krad/s 时，电流的幅度

电路的谐振频率为：

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(2\times10^{-3})(200\times10^{-9})}} = 50 \text{ krad/s}$$

需要计算频率为 $\omega = 48$ krad/s 时的值，这个频率处于谐振频率的10%范围之内，因此，使用前面的高 Q 电路的近似关系式，可以估算出网络的输入阻抗：

$$\mathbf{Z}_{eq} \approx R\sqrt{1+N^2}\,\underline{/\tan^{-1}N}$$

只要求出 Q_0，就可以求出 N。因为这是一个串联电路，所以：

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{(50\times10^3)(2\times10^{-3})}{10} = 10$$

这符合高 Q 电路的条件，因此：

$$B = \frac{\omega_0}{Q_0} = \frac{50\times10^3}{10} = 5 \text{ krad/s}$$

然后可以求出距离谐振频率的半功率带宽数(N)为：

$$N = \frac{\omega - \omega_0}{B/2} = \frac{48-50}{2.5} = -0.8$$

因此：

$$\mathbf{Z}_{eq} \approx R\sqrt{1+N^2}\,\underline{/\tan^{-1}N} = 12.81\,\underline{/-38.66^\circ}\ \Omega$$

则电流幅度的近似值为：

$$\frac{|\mathbf{V}_s|}{|\mathbf{Z}_{eq}|} = \frac{100}{12.81} = 7.806 \text{ mA}$$

使用精确表达式可以得到 $\mathbf{I} = 7.746\,\underline{/39.24^\circ}$ mA，因此：

$$|\mathbf{I}| = 7.746 \text{ mA}$$

练习

16.4 某串联谐振电路的带宽为 100 Hz，其电感值为 20 mH，电容值为 2 μF。求(a) f_0；(b) Q_0；(c)谐振时的 $\mathbf{Z}_{in}$；(d) f_2。

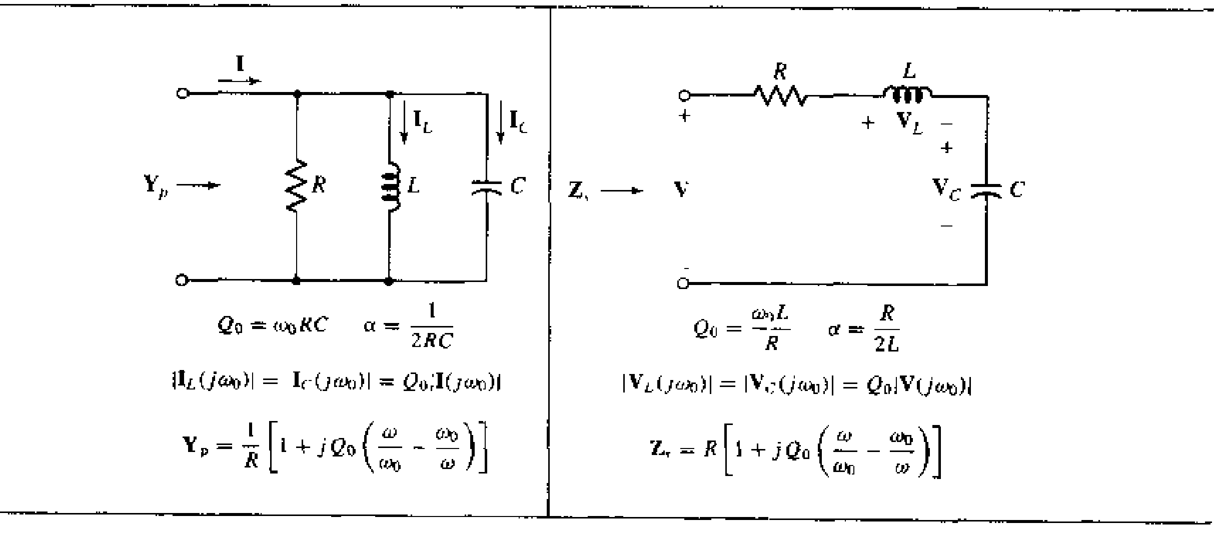
答案：796 Hz；7.96；12.57 + j0 Ω；846 Hz(近似)

下面简单地比较一下串联谐振和并联谐振的特性。串联谐振电路在谐振时阻抗的幅度最

小，而并联电路在谐振时阻抗的幅度最大。并联谐振电路在谐振时电感电流和电容电流的幅度均为电流源幅度的 Q_0 倍，即电流得到了放大；串联谐振电路在谐振时电感电压和电容电压均为电压源的 Q_{0s} 倍，即电压得到了放大。

表 16.1 中将所得到的关于串联谐振和并联谐振的结果进行了对比，同时还给出了精确表达式和近似表达式。

表 16.1　谐振电路的简单总结



$Q_0 = \omega_0 RC \qquad \alpha = \dfrac{1}{2RC}$ | $Q_0 = \dfrac{\omega_0 L}{R} \qquad \alpha = \dfrac{R}{2L}$

$|I_L(j\omega_0)| = |I_C(j\omega_0)| = Q_0|I(j\omega_0)|$ | $|V_L(j\omega_0)| = |V_C(j\omega_0)| = Q_0|V(j\omega_0)|$

$\mathbf{Y}_p = \dfrac{1}{R}\left[1 + jQ_0\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$ | $\mathbf{Z}_s = R\left[1 + jQ_0\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$

精确表达式

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\omega_1\omega_2} \qquad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2}$$

$$\omega_{1,2} = \omega_0\left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \mp \frac{1}{2Q_0}\right]$$

$$N = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}\mathcal{B}} \qquad \mathcal{B} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0} = 2\alpha$$

近似表达式

$$(Q_0 \geqslant 5 \quad 0.9\omega_0 \leqslant \omega \leqslant 1.1\omega_0)$$

$$\omega_d \approx \omega_0 \qquad \omega_{1,2} \approx \omega_0 \mp \frac{1}{2}\mathcal{B}$$

$$\omega_0 \approx \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

$$\mathbf{Y}_p \approx \frac{\sqrt{1+N^2}}{R}\angle \tan^{-1} N \qquad \mathbf{Z}_s \approx R\sqrt{1+N^2}\angle \tan^{-1} N$$

16.5 其他谐振形式

前面两节讨论的并联和串联 *RLC* 电路都是理想化的谐振电路，它们只是物理电路的近似，这里说的物理电路可以通过将线圈、碳电阻和钽电容并联起来或串联起来得到。理想模型与实际电路的符合程度与工作频率范围、电路的 Q 值、物理元件的材料、元件大小和许多其他因素相关。这里不研究如何确定物理电路的最佳模型，那需要电磁场理论的知识，还需要知道材料的特性，只关心如何将一个复杂的模型转化为已经很熟悉的并联 *RLC* 或串联 *RLC* 模型。

图 16.8(a)画出了一个由实际电感、电容和电阻并联组成的网络的模型。其中 R_1 是一个假想的电阻,它代表实际线圈的热损耗、铁芯损耗以及辐射损耗所折合成的电阻。实际电容中电介质的损耗,以及实际电阻可以折合成电阻 R_2。对于这个模型,无法通过元件合并,使得在任何频率上,该模型均与原始模型等效。然而将看到,如果将模型的适用范围限制在某个频带的话,则可以得到一个比较简单的等效模型,而且,这个频带足以包含所有我们感兴趣的频率。这样得到的等效电路如图 16.8(b)所示。

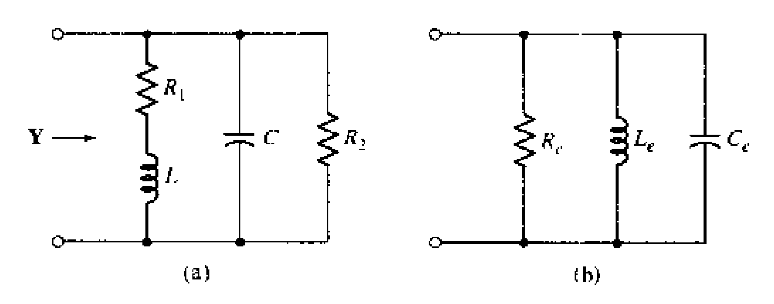


图 16.8 (a)由实际电感、电容和电阻并联组成的网络的模型;(b)在很窄的频率范围内与(a)等效的网络

在学习如何得到这样一个等效电路之前,首先来看图 16.8(a)所示的电路。这个电路的谐振频率不等于 $1/\sqrt{LC}$,不过如果 R_1 足够小,则可以很接近于这个值。但是,谐振的定义还是一样的,为了得到谐振频率,令输入导纳的虚部为 0:

$$\text{Im}\{\mathbf{Y}(j\omega)\} = \text{Im}\left\{\frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{1}{R_1 + j\omega L}\right\} = 0$$

或

$$\text{Im}\left\{\frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{1}{R_1 + j\omega L}\frac{R_1 - j\omega L}{R_1 - j\omega L}\right\}$$

$$= \text{Im}\left\{\frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{R_1 - j\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2}\right\} = 0$$

因此,可以得到谐振条件为:

$$C = \frac{L}{R_1^2 + \omega^2 L^2}$$

于是:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_1}{L}\right)^2} \tag{16.21}$$

注意到,ω_0 小于 $1/\sqrt{LC}$,但是,如果 R_1/L 的值足够小,就可以忽略 ω_0 和 $1/\sqrt{LC}$ 之间的差。

输入阻抗的最大值也是值得考虑的,它不等于 R_2,也不出现在 ω_0(或 $1/\sqrt{LC}$)处。证明很繁琐,这里就不给出其证明,不过,这个理论却很简单。下面我们来看一个数值例子。

例 16.4 如图 16.8(a)所示电路,设各元件的值为:$R_1 = 2\ \Omega$, $L = 1$ H, $C = 125$ mF, $R_2 = 3\ \Omega$。求谐振频率及谐振时的输入阻抗

将数值代入式(16.21)中，得：

$$\omega_0 = \sqrt{8-2^2} = 2 \text{ rad/s}$$

根据这个结果，可以求出输入导纳：

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{3} + j2\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{2+j(2)\times(1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 0.583 \text{ S}$$

然后得到谐振时的输入阻抗：

$$\mathbf{Z}(j2) = \frac{1}{0.583} = 1.714\ \Omega$$

而如果 R_1 为 0，那么谐振频率变为：

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = 2.83 \text{ rad/s}$$

相应地，输入阻抗为：

$$\mathbf{Z}(j2.83) = 1.947 \underline{/-13.26^\circ}\ \Omega$$

如图 16.9 所示，可以看到阻抗幅度最大值处对应的频率为 $\omega_m = 3.26$ rad/s，最大阻抗为：

$$\mathbf{Z}(j3.26) = 1.980 \underline{/-21.4^\circ}\ \Omega$$

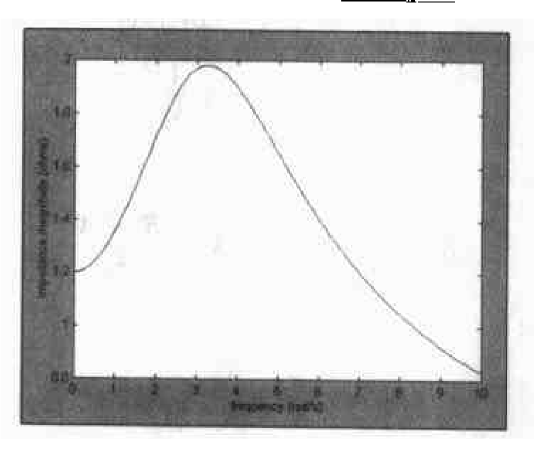


图 16.9 使用下面的 MATLAB 语句画出的 |Z| 随 ω 变化的曲线：

MATLAB 程序

```
EDU >> omega = linspace(0,10,100);
EDU >> for i = 1:100
Y(i) = 1/3 + j * omega(i)/8 + 1/(2 + j * omega(i));
Z(i) = 1/Y(i);
end
EDU >> plot(omega, abs(Z));
EDU >> xlabel('frequency(rad/s)');
EDU >> ylabel('impedance magnitude (ohms)');
```

输入阻抗在谐振时的幅度和最大幅度相差大约 16%。在实际情况下，有时可以忽略这么

一个误差，但在要求严格时（如考试时）则不可忽略。后面将看到本题中电感－电阻支路的 Q 值为 1，这是产生 16% 的误差的原因。

练习

16.5 参看图 16.5(a)，如果 $R_1 = 1\ \text{k}\Omega$，$C = 2.533\ \text{pF}$。求电感的值，使得谐振频率为 1 MHz（提示：注意 $\omega = 2\pi f$）。

答案：10 mH

16.5.1 串并联等效

为了将图 16.8(a)所示电路变换为图 16.8(b)所示形式的等效电路，必须讨论电阻和电抗串联或并联构成的电路的 Q 值。首先考虑图 16.10(a)所示的串联电路，同样地，其 Q 值定义为一个周期内电路存储的最大能量与消耗能量的比值乘以 2π，只是这里的 Q 可以在任何频率上进行计算，也就是说，Q 是 ω 的函数。当然，我们（显然）希望计算出包含这种串联支路的网络在谐振时的 Q 值。然而，在给出完整电路之前，这个 Q 值是未知的。读者可以发现，这个串联支路的 Q 值为 $|X_s|/R_s$，而图 16.10(b)所示并联网络的 Q 值为 $R_p/|X_p|$。

下面我们给出求解 R_p 和 X_p 的详细过程，使得在某个指定频率上，图 16.10(b)所示的并联网络与图 16.10(a)所示的串联网络互为等效。令 $\mathbf{Y}_s$ 等于 $\mathbf{Y}_p$：

$$\mathbf{Y}_s = \frac{1}{R_s + jX_s} = \frac{R_s - jX_s}{R_s^2 + X_s^2}$$

$$= \mathbf{Y}_p = \frac{1}{R_p} - j\frac{1}{X_p}$$

可得：

$$R_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{R_s} \qquad X_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{X_s}$$

两式相除，得：

$$\frac{R_p}{X_p} = \frac{X_s}{R_s}$$

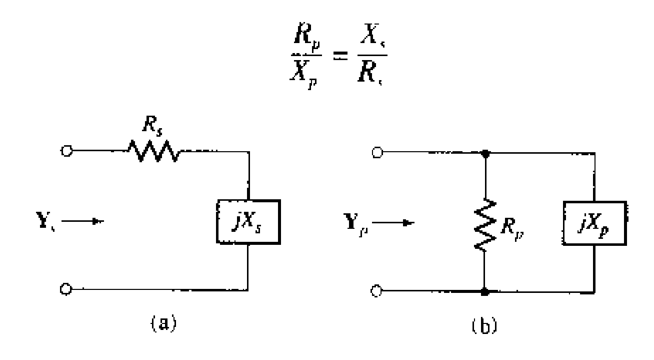


图 16.10 (a)由电阻 R_s 和电感或电容的电抗 X_s 组成的串联网络；(b)在某一指定频率使得 $\mathbf{Y}_s = \mathbf{Y}_p$ 并联网络

这说明串联网络的 Q 值和并联网络的 Q 值相等：

$$Q_p = Q_s = Q$$

因此,变换方程可以简写为:

$$R_p = R_s(1 + Q^2) \tag{16.22}$$

$$X_p = X_s\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right) \tag{16.23}$$

当给定 R_p 和 X_p 的值时,同样可以求出 R_s 和 X_s 的值,即两者可以互相转换。

如果 $Q \geqslant 5$,可以使用下面的近似关系,其误差非常小:

$$R_p \approx Q^2 R_s \tag{16.24}$$

$$X_p \approx X_s, \quad (C_p \approx C_s \quad 或 \quad L_p \approx L_s) \tag{16.25}$$

例 16.5 求一个 100 mH 的电感和一个 5 Ω 电阻的串联电路分支在频率为 1 000 rad/s 时的并联等效电路。其中串联电路分支所连接的网络结构未知

当 $\omega = 1\,000$ rad/s, $X_s = 1\,000 \times (100 \times 10^{-3}) = 100\ \Omega$ 时,串联分支的 Q 值为:

$$Q = \frac{X_s}{R_s} = \frac{100}{5} = 20$$

因为 Q 值足够高(20 远比 5 大),根据式(16.4)和式(16.5)可得:

$$R_p \approx Q^2 R_s = 2\,000\ \Omega \text{ 和 } L_p \approx L_s = 100 \text{ mH}$$

这时可以断定,当频率为 1 000 rad/s 时,从本质上说,一个 100 mH 电感与一个 5 Ω 电阻的串联电路和一个 100 mH 电感与一个 2 000 Ω 电阻的并联电路等效。

为了检查等效的精确程度,分别计算出 1 000 rad/s 时两个网络的输入阻抗,得到:

$$\mathbf{Z}_s(j1\,000) = 5 + j100 = 100.1\,\underline{/87.1^\circ}\ \Omega$$

$$\mathbf{Z}_p(j1\,000) = \frac{2\,000 \times (j100)}{2\,000 + j100} = 99.9\,\underline{/87.1^\circ}\ \Omega$$

因此可以认为,在这个频率上近似的精度非常高。在频率为 900 rad/s 时,近似的精度也非常高,因为:

$$\mathbf{Z}_s(j900) = 90.1\,\underline{/86.8^\circ}\ \Omega$$

$$\mathbf{Z}_p(j900) = 89.9\,\underline{/87.4^\circ}\ \Omega$$

如果这个电感和电阻的谐振频率为 1 000 rad/s 的串联 RLC 电路的一部分,则半功率带宽为:

$$B = \frac{\omega_0}{Q_0} = \frac{1\,000}{20} = 50 \text{ rad/s}$$

而频率 900 rad/s 与谐振频率的距离为 4 个半功率带宽。因此,根据我们在本例中得到的等效网络足以求出响应曲线的尖峰部分。

练习

16.6 当 $\omega = 1\,000$ rad/s 时,求与图 16.11(a)所示的串联电路的并联等效网络。

16.7 求 $\omega = 1\,000$ rad/s 时图 16.11(b)所示的并联网络的串联等效电路。

答案:16.6:8 H,640 kΩ; 16.7:5 H,250 Ω

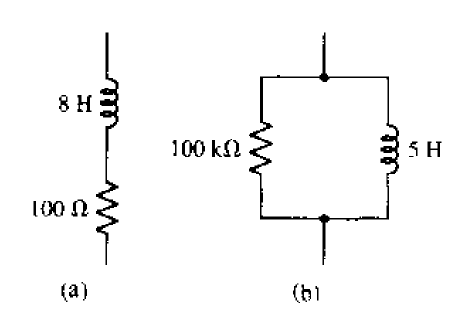


图 16.11 (a)求该串联网络(在 $\omega = 1\ 000$ rad/s 处)的并联等效网络;(b)求该并联网络(在 $\omega = 1\ 000$ rad/s 处)的串联等效网络

下面来看另一个例子,这个例子需要将一个更复杂的谐振电路转化为串联或并联 *RLC* 等效电路,在使用电子仪器时会碰到这样的问题。如图 16.12(a)所示的简单 *RLC* 网络,激励源为正弦电压源,其中电压源的频率为网络的谐振频率、电压的有效值(rms)为 0.5 V,希望用内阻为 100 000 Ω 的伏特表(VM)来测量电容两端的电压的有效值。也就是说,这个伏特表等效为一个理想伏特表与一个 100 kΩ 电阻的并联。

"理想"电表是这样一种设备,在用它测量感兴趣的某个量时,不会对被测电路产生影响。尽管这是不可能的,但是现代仪器设备可以做到与理想情况非常接近。

在接上伏特表之前,可以计算出网络的谐振频率为 10^5 rad/s, $Q_0 = 50$,电流为 25 mA,电容电压的有效值为 25 V。正如在 16.4 节结尾处指出的那样,电容电压为激励电压的 Q_0 倍。因此,如果电压表是理想的,那么将它接到电容两端,测得的结果将为 25 V。

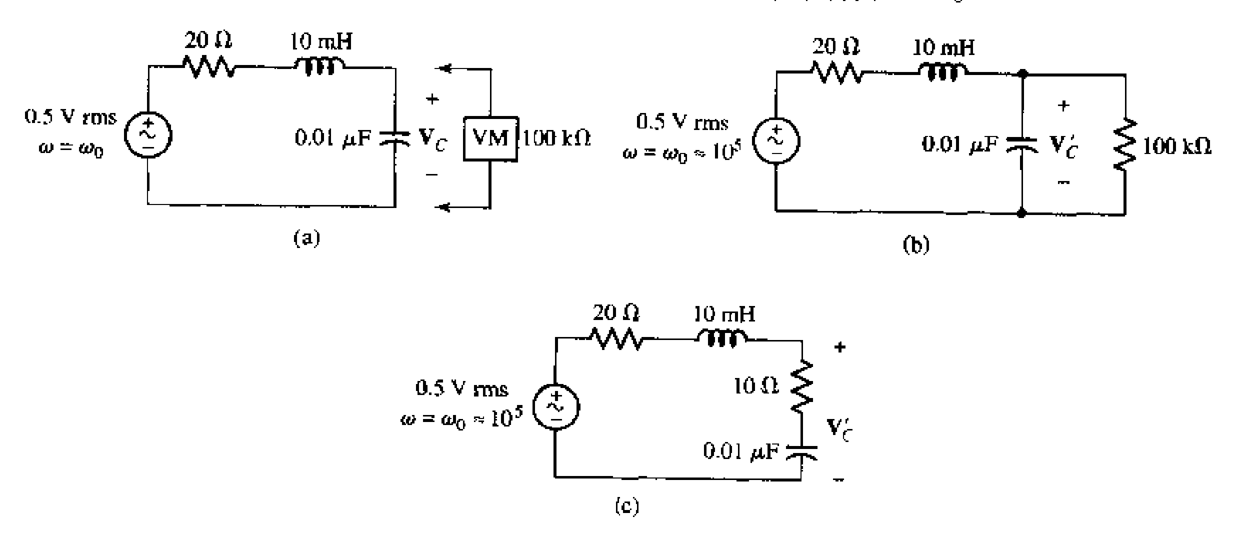


图 16.12 (a)一个串联谐振电路,用非理想的伏特表测量电容两端的电压;(b)考虑了伏特表对电路的影响,其读数为 V_C';(c)将(b)中的并联 *RC* 网络用在频率为 10^5 rad/s 下与之等效的串联 *RC* 网络替换后得到的串联谐振电路

但是,当接上实际的电压表后,将得到图 16.12(b)所示的电路。为了得到串联 *RLC* 电路,需要将并联 *RC* 网络转换为串联 *RC* 网络。假定这个 *RC* 网络的 Q 值足够高,使得等效 *RC* 网络中电容的取值和原来一样,做这么一个假定的目的是为了对最后得到的 *RLC* 电路在谐振时

的参数进行近似。因此,如果串联 RLC 电路也含有 0.01 μF 的电容,那么谐振频率同样也是 10^5 rad/s。估计谐振频率是为了计算并联 RC 网络的 Q 值,它等于:

$$Q = \frac{R_p}{|X_p|} = \omega R_p C_p = 10^5 \times (10^5) \times (10^{-8}) = 100$$

它大于 5,因此,这就验证了前面的循环假定,然后可以得到等效串联 RC 网络的电容值为 $C_s = 0.01$ μF,电阻值为:

$$R_s \approx \frac{R_p}{Q^2} = 10\ \Omega$$

这样就得到了图 16.12(c)所示的等效电路,其 Q 值只有 33.3,因此图中电容两端的电压值为 $16\frac{2}{3}$ V。但需要求的是串联 RC 电路两端的电压 $|\mathbf{V}_C|$:

$$|\mathbf{V}_C| = \frac{0.5}{30} \times |10 - j1\,000| = 16.67\ \text{V}$$

电容两端的电压和 $|\mathbf{V}_C|$ 几乎相等,因为 10 Ω 电阻两端的电压非常小。

最后,得到这样的结论,即看起来非常好的伏特表也会严重地影响高 Q 谐振电路的响应;同理,将非理想的安培表接入电路中也会产生类似影响。

最后以一个故事来结束本节。以前,有一个叫 Pat 的学生,有一个叫 Dr. Abel 的教授。某天下午,在实验室里,Dr. Abel 给了 Pat 三个电路元件:一个电阻、一个电感和一个电容,它们的标称值分别为 20 Ω,20 mH 和 1μF。Pat 要做的事情是将一个频率可调的电压源接到这三个元件的串联电路中,以测量谐振频率、谐振时的 Q 值以及半功率带宽。还要求他在测量之前,首先估算一下实验结果。

Pat 过于急切地分析问题,打乱了通常情况下清晰的思维过程,他画出图 16.13(a)所示的等效电路,然后计算:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{20\times 10^{-3}\times 10^{-6}}} = 1\,125\ \text{Hz}$$

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = 7.07$$

$$B = \frac{f_0}{Q_0} = 159\ \text{Hz}$$

接着,Pat 按照 Dr. Abel 的要求进行测量。在将测量结果与估算值进行比较后,他发现,测量结果与估算值相差很远。测量的结果如下:

$$f_0 = 1\,000\ \text{Hz} \quad Q_0 = 0.625 \quad B = 1\,600\ \text{Hz}$$

Pat 知道,这么大的差异不能认为是“在工程误差范围之内”或者“由于电表的误差”,他沮丧地将这些结果交给教授。

Dr. Abel 知道以前学生们做判断时所犯的许多错误中,有些甚至可能是人为的,于是 Dr. Abel 和蔼地微笑着叫 Pat 用 Q 表(或者称为阻抗桥,许多装备良好的实验室都有 Q 表)去测量一下这些实际元件在谐振频率附近(比如 1 000 Hz)的值。

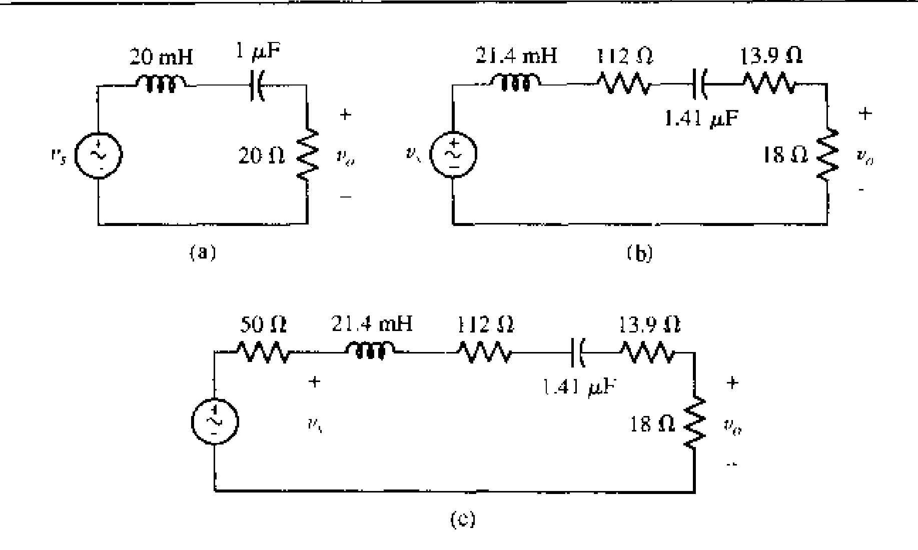


图 16.13 (a)一个 20 mH 电感,一个 1 μF 电容和一个 20 Ω 电阻与电压源串联的第一个模型;(b)改进的模型,其中使用了更精确的元件值,并且考虑了电感和电容的损耗;(c)最终的模型,考虑了电压源的输出阻抗

Pat 这么去做了,他发现电阻的测量值为 18 Ω,电感的测量值为 21.4 mH,Q 值为 1.2,电容的测量值为 1.41 μF,损耗系数(Q 的倒数)为 0.123。

因此,Pat 觉得实际电感的较好模型应该是 21.4 mH 的电感与 $\omega L/Q = 112\ \Omega$ 的电阻串联,而实际电容的较好的模型应该是 1.41 μF 的电容和 $1/\omega CQ = 13.9\ \Omega$ 的电阻串联。利用这些数据,他得到改善后的电路模型如图 16.13(b)所示,然后他计算出下列新的估计值:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{21.4 \times 10^{-3} \times 1.41 \times 10^{-6}}} = 916\ \text{Hz}$$

$$Q_0 = \frac{2\pi \times 916 \times 21.4 \times 10^{-3}}{143.9} = 0.856$$

$$B = 916/0.856 = 1\,070\ \text{Hz}$$

这些值与测量值非常接近,所以 Pat 感到非常高兴。但是,Dr. Abel 是一个非常细心的人,他考虑了一下 Q_0 和带宽的估计值与测量值的误差,然后问 Pat:"你考虑电压源的输出阻抗了吗?""没有。"Pat 说着,又跑回实验桌旁。

结果,Pat 测出电压源的输出阻抗为 50 Ω,然后他将这个值加到电路图中,如图 16.13(c)所示。用这个新的等效电阻值 193.9 Ω,求出改善的 Q_0 和 B 值为:

$$Q_0 = 0.635 \quad B = 1\,442\ \text{Hz}$$

这时,所有理论值与测量值的误差均小于 10%,Pat 又恢复了以往的热情和自信。Dr. Abel 点了点头表示赞许,并总结说:

使用实际设备时,观测你所用的模型,在计算之前仔细思考,注意 Z 和 Q!

练习

16.8 10 Ω 电阻与 10 nF 电容的串联连接与 20 Ω 电阻与 10 mH 的串联连接相并联。(a)求并联网络谐振频率的近似值;(b)求 RC 分支的 Q 值;(c)求 RL 分支的 Q 值;(d)

求该网络的三元件等效网络。

答案：10^5 rad/s；100；50；10 nF ‖ 10 mH　33.3 kΩ

16.6 缩放

在前面所举的例子和所求解的问题中，无源电路元件的参数值范围大约是几欧姆、几亨利和几法拉，适用的频率约为几弧度/秒。使用这些特殊的参数值并不是因为在实际电路中常使用这些值，而是因为计算过程中不会涉及到 10 的各次幂的运算，计算起来比较方便。本节将讨论缩放，对于由实际参数值的元件组成的网络，通过对元件的参数值进行缩放，可以给计算带来很大的方便。这里将讨论幅度缩放(magnitude scaling)和频率缩放(frequency scaling)。

下面以图 16.14(a)所示的并联谐振电路为例来进行说明。用这些非实际的元件参数得到的响应曲线如图 16.14(b)所示，但在实际中不太可能出现这种情况。图中，最大阻抗为 2.5 Ω，谐振频率为 1 rad/s，Q_0 为 5，带宽为 0.2 rad/s。这些值更像是某些机械系统的电模拟特性参数，而不像是任何基本电气设备的参数。这样的电路虽然会给计算带来方便，但却不代表实际电路。

假定对网络进行缩放，使得它的输入阻抗最大值为 5 000 Ω，谐振频率为 5×10^6 rad/s 或 796 kHz。如果将图 16.14(b)中的纵坐标上的每个数乘以 2 000，将横坐标上的每个数乘以 5×10^6，这样就得到缩放后电路的响应曲线，而它的形状保持不变。下面分两个问题对此进行论述：(1)幅度缩放，缩放因子为 2 000；(2)频率缩放，缩放因子为 5×10^6。

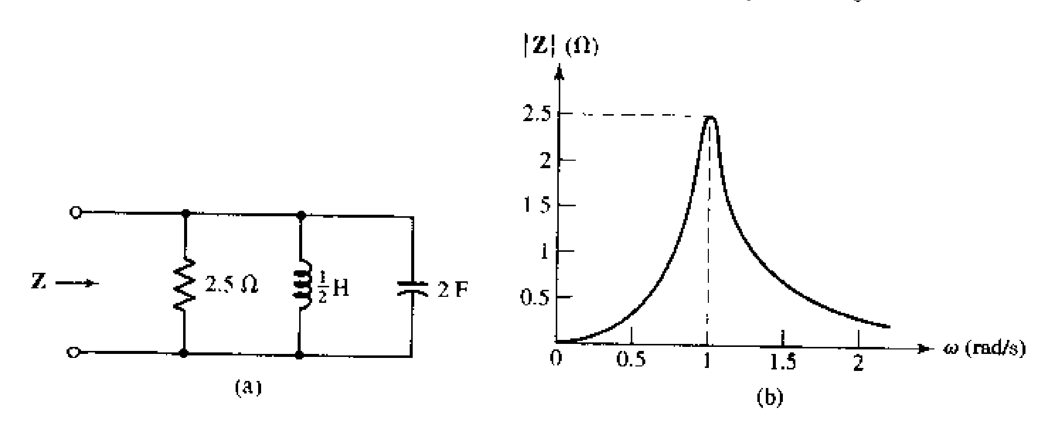


图 16.14　(a)用来解释幅度和频率缩放的并联谐振电路；(b)输入阻抗的幅度随频率变化的函数曲线

幅度缩放定义为这样一个过程：保持频率不变，将双端网络的阻抗乘以因子 K_m。其中因子 K_m 为正实数，它可以大于 1，也可以小于 1。"在幅度上，网络的缩放因子为 2"指的是在任何频率上，新的网络阻抗为原来的网络阻抗的两倍。下面来看应该怎样对各种无源元件进行缩放。为了使网络的输入阻抗增大为原来的 K_m 倍，只要将网络中的每个无源元件的阻抗乘以 K_m 即可。因此，将电阻 R 替换为 K_mR。将电感替换为某个值，使得在任何频率上，其阻抗为原来的 K_m 倍；为了使阻抗 $\mathbf{s}L$ 的值增大为原来的 K_m 倍，而 $\mathbf{s}$ 保持不变，则必须将电感 L 替换为 K_mL。类似地，必须将电容 C 替换为 C/K_m。综上所述，做这样的替换后将得到一个阻抗幅度为原来 K_m 倍的网络：

$$\left.\begin{array}{l} R \to K_m R \\ L \to K_m L \\ C \to \dfrac{C}{K_m} \end{array}\right\} \text{幅度缩放}$$

将图 16.14(a)所示网络中的每个元件在幅度上均以因子 2 000 进行缩放以后,可得到图 16.15(a)所示的网络。图 16.15(b)为其响应曲线.与原来画的响应曲线相比,除了在纵坐标标度上有所改变外,没有任何其他改变。

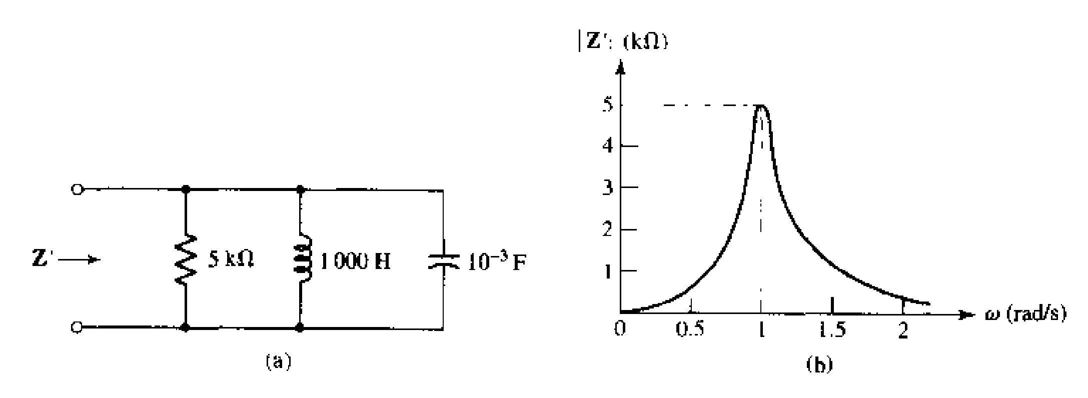


图 16.15 (a)对图 16.4(a)所示网络进行幅度缩放后的所得的网络,缩放因子 $K_m = 2000$;(b)相应的响应曲线

下面对这个新的网络进行频率缩放。将频率缩放定义为这样一个过程:保持阻抗不变,将阻抗对应的频率乘以因子 K_f。同样,"在频率上,网络的缩放因子为 2"指的是频率为原来频率的两倍时,获得与原来相同的阻抗。对每个无源元件在频率上缩放后,就得到了频率缩放。显然,频率缩放对电阻没有影响。电感的阻抗为 $\mathbf{s}L$,如果要在频率为原来的 K_f 倍时得到相同的阻抗,则必须将电感 L 替换为 L/K_f。类似地,必须将电容替换为 C/K_f。因此,如果说将一个网络进行频率缩放,缩放因子为 K_f,那么必须对每个无源元件进行如下变换:

$$\left.\begin{array}{l} R \to R \\ L \to \dfrac{L}{K_f} \\ C \to \dfrac{C}{K_f} \end{array}\right\} \text{频率缩放}$$

对于图 16.15(a)所示的幅度缩放以后的网络,将每个元件均以因子 5×10^6 进行频率缩放后,得到图 16.16(a)所示的网络,图 16.16(b)为相应的响应曲线。

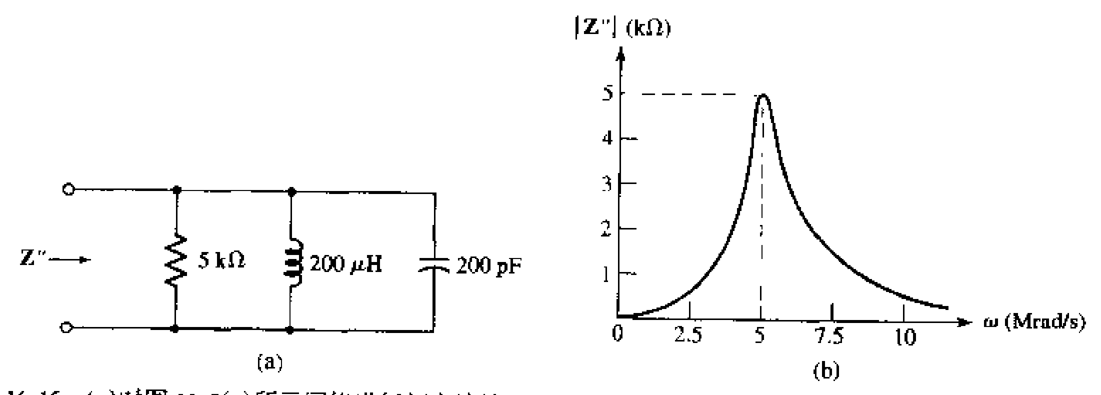


图 16.16 (a)对图 16.5(a)所示网络进行频率缩放后的所得的网络,缩放因子 $K_f = 5 \times 10^6$;(b)相应的响应曲线

最后这个网络中的元件的参数很容易用实际物理元件来实现,因此可以搭建出这样一个网络并对它进行测试。因此,如果说图 16.14(a)所示的原始网络是某个机械谐振系统的类比,那么可以用幅度缩放和频率缩放的方法,得到一个可以在实验室中搭建起来的网络。当直接在机械系统测试某些参数需要花费很大的代价或者不方便进行时,就可以在缩放后的电气系统中进行,然后将得到的结果"反缩放"为机械系统的单位。

以 s 为变量的阻抗函数也可以进行幅度缩放和频率缩放,而且这时不必知道双端网络由哪些元件组成。根据定义,对 $\mathbf{Z}(s)$进行幅度缩放时,只需将它乘以 K_m 即可。图 16.14(a)所示的并联谐振电路的阻抗为:

$$\mathbf{Z}(s)=\frac{s}{2s^2+0.4s+2}$$

或

$$Z(s)=\frac{0.5s}{(s+0.1+j0.995)(s+0.1-j0.995)}$$

对该网络进行幅度缩放后,阻抗为:

$$\mathbf{Z}'(s)=K_m\mathbf{Z}(s)$$

如果仍然令 $K_m=2\,000$,则有:

$$\mathbf{Z}'(s)=1000\times\frac{s}{(s+0.1+j0.995)(s+0.1-j0.995)}$$

如果对 $\mathbf{Z}'(s)$进行频率缩放,缩放因子为 5×10^6,则 $\mathbf{Z}'(s)$ 在任何频率 f 处的阻抗与 $\mathbf{Z}''(s)$在频率 K_f处的阻抗相等,这一关系可以用下式表示:

$$\mathbf{Z}''(s)=\mathbf{Z}'\left(\frac{s}{K_f}\right)$$

从上式知道,可以将 $\mathbf{Z}'(s)$中的每个 s 替换为 s/K_f 而得到 $\mathbf{Z}''(s)$。因此,图 16.16(a)所示网络的阻抗可以表示为:

$$\mathbf{Z}''(s)=1000\times\frac{s/(5\times10^6)}{[s/(5\times10^6)+0.1+j0.995][s/(5\times10^6)+0.1-j0.995]}$$

或

$$\mathbf{Z}''(s)=1000\times\frac{(5\times10^6)s}{[s+0.5\times10^6+j4.975\times10^6][s+0.5\times10^6-j4.975\times10^6]}$$

虽然在通常情况下,缩放主要用于无源元件,但是也可以对受控源进行幅度缩放和频率缩放。假定电源的输出为 k_xv_x 或 k_yi_y,对于受控电流源,k_x 具有导纳的量纲,而对于受控电压源,k_x 没有量纲;对于受控电压源,k_y 具有电阻的量纲,而对于受控电流源,k_y 没有量纲。如果对含有受控电源的网络进行缩放,缩放因子为 K_m,则只需要将 k_x 或 k_y 看做是与其量纲相对应的元件。也就是说,如果 k_x(或 k_y)没有量纲,则它保持不变;如果它有导纳的量纲,则将它除以 K_m;如果它有阻抗的量纲,则将它乘以 K_m。频率缩放对受控源没有影响。

例题 16.6 对图 16.17 所示的网络进行缩放,缩放因子为 $K_m=20$,$K_f=50$,然后求出缩放后网络的 $\mathbf{Z}_{in}(s)$

对于电容，将 0.05 F 除以幅度缩放因子 $K_m = 20$，就得到其幅度缩放；除以频率缩放因子 $K_f = 50$，就得到频率缩放。同时进行两种操作，可得：

$$C_{scaled} = \frac{0.05}{(20)\times(50)} = 50\ \mu F$$

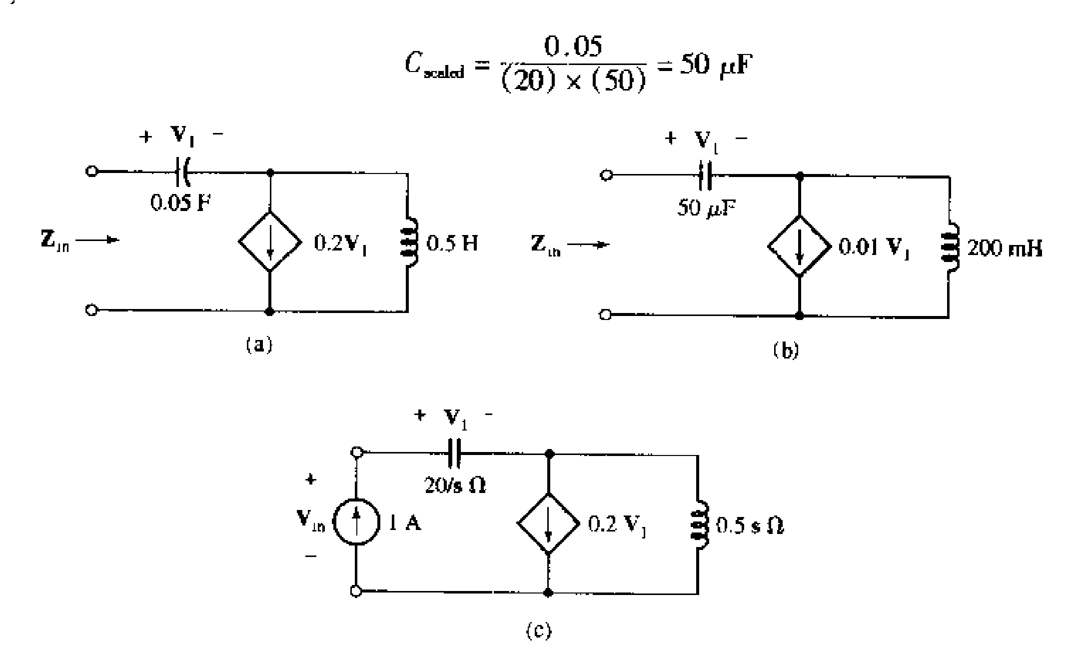


图 16.17 (a)对该网络进行幅度缩放和频率缩放，其中幅度缩放因子为 20，频率缩放因子为 50；(b)缩放后的网络；(c)为了求出缩放前电路(a)的输入阻抗，在输入端放置 1 A 的测试电流源

对于电感，则有：

$$L_{scaled} = \frac{(20)\times 0.5}{50} = 200\ \text{mH}$$

对于受控源的缩放，只需要考虑幅度缩放，因为频率缩放对其没有影响。因为这是一个压控电流源，因此系数 0.2 的单位为 A/V，或 S，这是导纳的单位，将它除以 K_m，得到新的受控源的值为 $0.01\mathbf{V}_1$。最后得到缩放后的网络如图 16.17(b)所示。

为了求出新网络的阻抗，需要在输入端接上一个 1 A 的测试电流源。可以用这两个电路中的任何一个来计算新网络的阻抗。这里，我们首先来求图 16.17(a)所示的缩放前网络的阻抗，然后再对求得的结果进行缩放。

如图 16.17(c)，有：

$$\mathbf{V}_{in} = \mathbf{V}_1 + 0.5s(1 - 0.2\mathbf{V}_1)$$

又

$$\mathbf{V}_1 = \frac{20}{s}\times(1)$$

进行变量替换，然后整理得：

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{\mathbf{V}_{in}}{1} = \frac{s^2 - 4s + 40}{2s}$$

为了将它缩放为相应于图 16.17(b)所示电路的值，将它乘以 $K_m = 20$，然后将 s 替换为 $s/K_f = s/50$，得：

$$\mathbf{Z}_{in_{scaled}}=\frac{0.2s^2-40s+200\,000}{s}\ \Omega$$

练习

16.9 某并联谐振电路的参数为 $C=0.01$ F,$B=2.5$ rad/s,$\omega_0=20$ rad/s。求下列各种情况下,R 和 L 的值:(a)对网络进行幅度缩放,缩放因子为 800;(b)对网络进行频率缩放,缩放因子为 10^4;(c)对网络进行幅度缩放和频率缩放,其中幅度缩放因子为 800,频率缩放因子为 10^4。

答案:32 kΩ,200 H; 40 Ω,25 μH; 32 kΩ,20 mH

16.7 波特(Bode)图

本节学习一种能快速得到传输函数幅度和相角随 ω 变化的近似曲线的方法。当然,可以用可编程计算器或者计算机来计算曲线值,然后将这些值画出来以得到精确的曲线;也可以直接在计算机上画出。不过,在这里,目的是得到一个响应曲线,根据它来分析响应特性要比根据零极点图来分析要好,但又不需要借助于任何专用的计算工具。

16.7.1 分贝(dB)坐标

这里要构造的响应曲线称为渐近线图(asymptotic plot),或者称为波特图(Bode diagram),这是由贝尔实验室的一位电气工程师和数学家 Hendrik W. Bode 发明的。幅度曲线和相位曲线的横坐标均使用对数频率坐标,而且幅度本身也用对数单位表示,对数单位为分贝(dB)。将 $|\mathbf{H}(j\omega)|$ 以 dB 为单位表示为:

$$H_{dB}=20\log|\mathbf{H}(j\omega)|$$

采用分贝这个名字是为了纪念 Alexander Graham Bell。上式中的对数为常用对数,底数为 10(对于功率传输函数,上式中的因子将是 10 而不是 20,不过这里不会用到它)。其逆运算为:

$$|\mathbf{H}(j\omega)|=10^{(H_{dB}/20)}$$

在详细讨论画波特图的方法之前,先了解一下分贝这个单位是有益的。下面来看一些重要的值,同时回忆一下对数运算的特点。因为 $\log 1=0$,$\log 2=0.30103$,$\log 10=1$,因此可以得到下列关系:

$$|\mathbf{H}(j\omega)|=1\Leftrightarrow H_{dB}=0$$

$$|\mathbf{H}(j\omega)|=2\Leftrightarrow H_{dB}\approx 6\text{ dB}$$

$$|\mathbf{H}(j\omega)|=10\Leftrightarrow H_{dB}\approx 20\text{ dB}$$

$|\mathbf{H}(j\omega)|$ 增大 10 倍相应于 H_{dB} 增加 20 dB。此外,$\log 10^n=n$,因此 $10^n\Leftrightarrow 20n$,所以 1 000 对应于 60 dB,而 0.01 对应于 −40 dB。根据上面给出的值,有 $20\log 5=20\log\frac{10}{2}=20\log 10-20\log 2$

$= 20 - 6 = 14$ dB,因此 $5 \Leftrightarrow 14$ dB。而 $\log\sqrt{x} = \frac{1}{2}\log x$,因此 $\sqrt{2} \Leftrightarrow 3$ dB 且 $1/\sqrt{2} \Leftrightarrow -3$ dB[①]。

通常将传递函数表示为 s 的函数,在求幅度和相角时,需要做替换 $\mathbf{s} = j\omega$。如果需要,可以将幅度以 dB 为单位来表示。

练习

16.10 当 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$等于下列情况下,计算 H_{dB}在 $\omega = 146$ rad/s 时的值:(a)$20/(\mathbf{s}+100)$;(b)$20(\mathbf{s}+100)$;(c)$20\mathbf{s}$。如果 H_{dB} 等于下列值,计算 $|\mathbf{H}(j\omega)|$ 的值:(d)29.2 dB;(e) −15.6 dB;(f) −0.318 dB。

答案:−18.94 dB; 71.0 dB; 69.3 dB; 28.8; 0.166 0; 0.964

16.7.2 求渐近线

下一步,对 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$进行因式分解,以得到其极点和零点。首先来看在 $\mathbf{s} = -a$ 处的极点,将其写成标准形式:

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 1 + \frac{\mathbf{s}}{a} \tag{16.26}$$

该函数的波特图由两条渐近线组成,它们分别是当 ω 很大和很小时趋于 H_{dB}的直线。首先求得:

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = \left|1 + \frac{j\omega}{a}\right| = \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{a^2}}$$

因此:

$$H_{dB} = 20\log\left|1 + \frac{j\omega}{a}\right| = 20\log\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{a^2}}$$

当 $\omega \ll a$ 时:

$$H_{dB} \approx 20\log 1 = 0, \quad (\omega \ll a)$$

这条简单的渐近线如图 16.18 所示。当 $\omega < a$ 时为实线,当 $\omega > a$ 时为虚线。

当 $\omega \gg a$ 时:

$$H_{dB} \approx 20\log\frac{\omega}{a}, \quad (\omega \gg a)$$

$\omega = a$ 时,$H_{dB} = 0$;$\omega = 10a$ 时,$H_{dB} = 20$ dB;$\omega = 100a$ 时,$H_{dB} = 40$ dB。因此频率每增大为原来的 10 倍,H_{dB}增加 20 dB,渐近线的斜率为 20 dB/十倍频程。因为当 ω 增大为原来的两倍时,H_{dB}增加 6 dB,因此也可以将斜率表示为 6 dB/倍频程。图 16.18 中也画出了高频时的渐近线,当 $\omega > a$ 时为实线,而 $\omega < a$ 时为虚线。可以看到,这两条渐近线相交于 $\omega = a$ 处,这是零点所在的频率。这个频率也称为转角频率(corner)、转折频率(break)、3 dB 频率或者半功率频率。

---

① 注意,这里进行了近似,即取 $20\log 2 = 6$ dB 而不是 6.02 dB。习惯上,将$\sqrt{2}$表示为 3 dB;因为以 dB 为单位必然使用对数坐标,因此这么小的误差通常是无关紧要的。

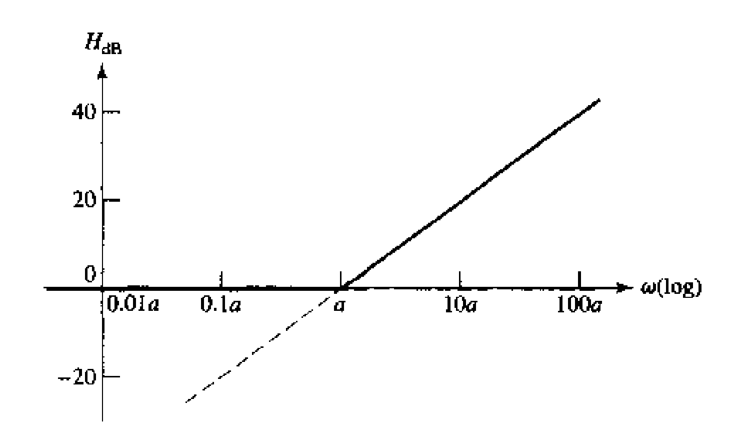


图 16.18 $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 1 + \mathbf{s}/a$ 的波特图由低频和高频渐近线组成，如图中实线所示，它们相交于横轴的转角频率点处。这个响应的波特图用两条渐近线表示，它们都是直线，很容易画出

十倍频程表示用因子 10 来定义的频率范围，比如从 3 Hz 到 30 Hz 或从 12.5 MHz 到 125 MHz的频率范围。倍频程表示用因子 2 来定义的频率范围，比如从 7 GHz 到 14 GHz 的频率范围。

16.7.3 波特图的平滑

下面来看渐近响应曲线的误差有多大。在转角频率($\omega = a$)处：

$$H_{dB} = 20\log\sqrt{1 + \frac{a^2}{a^2}} = 3\ \text{dB}$$

注意，这里仍然将$\sqrt{2}$对应于 3 dB。

而渐近线上相应的值为 0 dB。在 $\omega = 0.5a$ 处，有：

$$H_{dB} = 20\log\sqrt{1.25} \approx 1\ \text{dB}$$

因此，实际的响应曲线为渐近线上方的一条平滑曲线，在 $\omega = a$ 处，它们相差 3 dB，而在 $\omega = 0.5a$(以及 $\omega = 2a$)处，它们相差 1 dB。当需要较为精确的结果时，可以根据这一点对转角进行平滑。

例 16.7 画出图 16.19 所示网络的输入阻抗的波特图

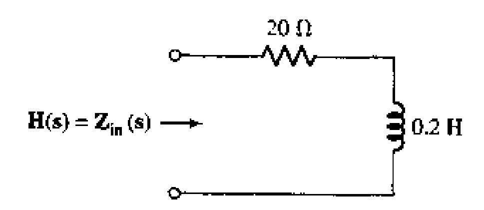


图 16.19 对于这个网络，如果将 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$看做是 $\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s})$，则 H_{dB}的波特图如图 16.20(b)所示

其输入阻抗为：

$$\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s}) = \mathbf{H}(\mathbf{s}) = 20 + 0.2\mathbf{s}$$

写成标准形式，得：

$$\mathbf{H(s)} = 20\left(1 + \frac{\mathbf{s}}{100}\right)$$

$\mathbf{H(s)}$由两个因式组成，其中一个因式在 $\mathbf{s} = -100$ 处有一个零点，它使得在 $\omega = 100$ rad/s 处有一个转折频率；另一个因式为常数，为 20 log 20 = 26 dB。在图 16.20(a)中，它们都用虚线画出。因为要求的是 $|\mathbf{H}(j\omega)|$ 的对数，因此将这两个因式叠加起来，可以得到如图 16.20(b)所示的曲线。图中没有对 $\omega = 100$ rad/s 处的转角进行 +3 dB 的修正，这作为一个小练习留给读者。

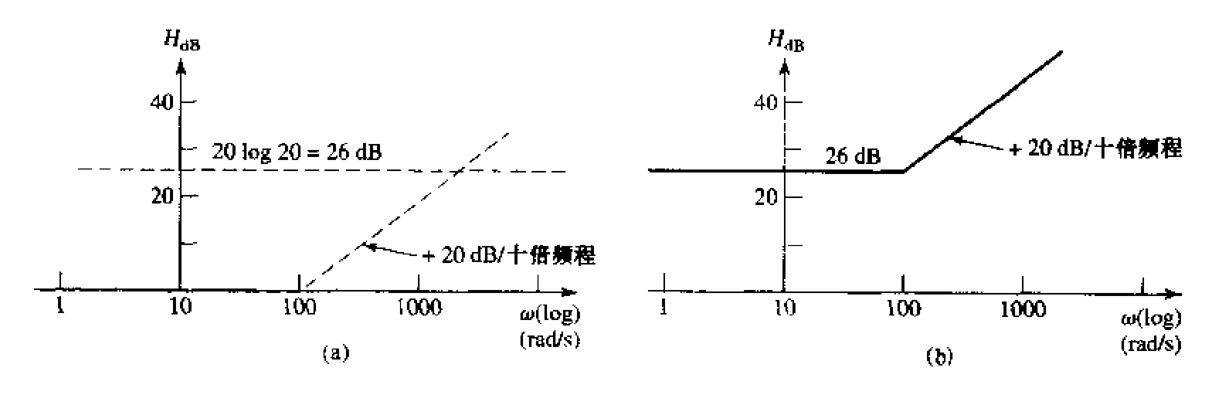


图 16.20 (a)分别画出了 $\mathbf{H(s)} = 20(1 + s/100)$的两个因式的波特图；(b)将图 16.20(a)中的两个波特图叠加后所得到的波特图

练习

16.11 画出 $\mathbf{H(s)} = 50 + \mathbf{s}$ 的波特图。

答案：当 $\omega < 50$ rad/s 时为 34 dB；当 $\omega > 50$ rad/s 时，斜率为 +20 dB/十倍频程

16.7.4 相位响应

回到式(16.26)表示的单零点传输函数，下面来求它的相位响应：

$$\text{ang } \mathbf{H}(j\omega) = \text{ang}\left(1 + \frac{j\omega}{a}\right) = \tan^{-1}\frac{\omega}{a}$$

这个表达式也可以用渐近线表示，不过这时需要三条线段。当 $\omega \ll a$ 时，ang $\mathbf{H}(j\omega) \approx 0°$，将其作为 $\omega < 0.1a$ 时的渐近线为：

$$\text{ang } \mathbf{H}(j\omega) = 0°, \quad (\omega < 0.1a)$$

频率很高时，$\omega \gg a$，ang $\mathbf{H}(j\omega) \approx 90°$，将其作为 $\omega = 10a$ 时的渐近线：

$$\text{ang } \mathbf{H}(j\omega) = 90°, \quad (\omega > 10a)$$

因为 $\omega = a$ 时，相角为 45°，现在我们画出这条直线渐近线，它在 $\omega = 0.1a$ 处的值为 0°，在 $\omega = a$ 处穿过 45°，在 $\omega = 10a$ 处的值为 90°。这条渐近线的斜率为 45°/十倍频程，在图 16.21 中以实线表示，而实际的相位响应则用虚线表示。渐近线与实际响应曲线的最大误差为 ±5.71°，对应的频率为 $\omega = 0.1a$ 及 $\omega = 10a$。在 $\omega = 0.394a$ 和 $2.54a$ 处，误差为 ∓5.29°；在 $\omega = 0.159a$，a 和 $6.31a$ 处误差为 0。虽然可以画出平滑的相位响应图(与图 16.21 中的虚线类似)，但通常用直线渐近线来近似表示。

这里有必要暂停一下，考虑相位曲线告诉了我们什么信息。在只有一个简单的零点 $\mathbf{s}=a$ 的情况下，可以看到，当频率远小于转角频率时，响应函数的相位为 0°；然而，当频率很高（$\omega \gg a$）时，响应函数的相位为 90°。在转角频率附近，传输函数的相位变化稍微快一些。通过合理地设计电路（它确定了 a），可以得到实际需要的响应相角。

练习

16.12　画出例 16.7 中的传输函数相位的波特图。

答案：0°，$\omega \leqslant 10$；90°，$\omega \geqslant 1\,000$；45°，斜率为 45°/十倍频程，$10<\omega<1000$（ω 单位为 rad/s）

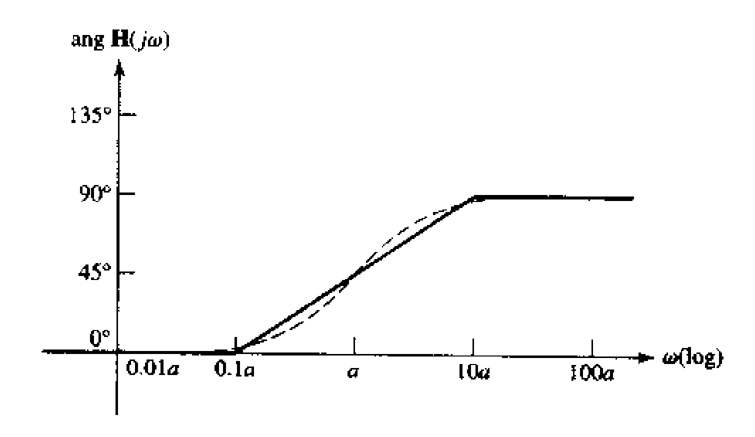


图 16.21　$\mathbf{H(s)}=1+\mathbf{s}/a$ 的相角响应渐近线，它由三条实直线段组成。斜线的两个端点分别为：$0.1a$ 处为 0°，$10a$ 处为 90°

16.7.5　绘制波特图的其他考虑

考虑只有一个极点的简单传输函数：

$$\mathbf{H(s)}=\frac{1}{1+\mathbf{s}/a} \tag{16.27}$$

因为这是只含有一个零点的传输函数的倒数，因此对其进行对数运算以后，得到的波特图为前面得到的波特图的相反数。因此，对于该函数的幅度响应，$\omega=a$ 时幅度为 0 dB，$\omega>a$ 时斜率为 −20 dB/十倍频程。对于该函数的相位响应，$\omega<0.1a$ 时相位为 0°，$\omega>10a$ 时为 −90°，$\omega=a$ 时为 −45°，$0.1a<\omega<10a$ 时斜率为 −45°/十倍频程。希望读者能直接根据式（16.27）画出该函数的波特图。

在 $\mathbf{H(s)}$ 中可能出现的另一个因式为 $\mathbf{s}$，它可以出现在分子或分母中。如果 $\mathbf{H(s)}=\mathbf{s}$，那么：

$$H_{\mathrm{dB}}=20\log|\omega|$$

这时得到一条斜率为 20 dB/十倍频程的无穷长直线，它在 $\omega=1$ 时穿过 0 dB，如图 16.22(a)所示。

如果因式 $\mathbf{s}$ 出现在分母中，则得到一条斜率为 −20 dB/十倍频程的无穷长直线，它在 $\omega=1$ 时穿过 0 dB，如图 16.22(b)所示。

在 $\mathbf{H(s)}$ 中还可能出现的另一个因式为常数 K，这将得到一条位于横轴上方，且距离横轴 $20\log|K|$ dB 的水平直线，当 $|K|<1$ 时，它实际上位于横轴的下方。

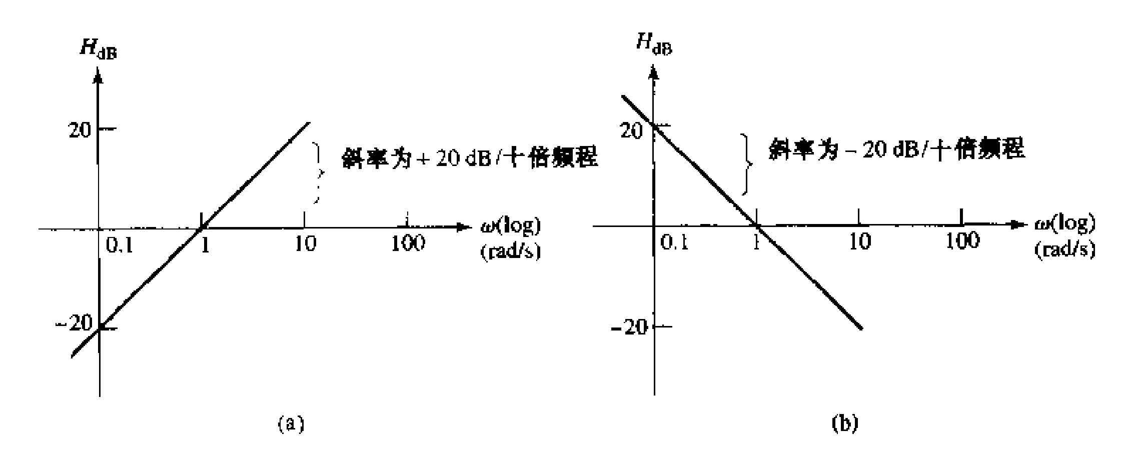


图 16.22 (a)$\mathbf{H}(\mathbf{s})=\mathbf{s}$ 和(b)$\mathbf{H}(\mathbf{s})=1/\mathbf{s}$ 的渐近线图。它们均为无穷长直线，并且在 $\omega=1$ 时穿过 0 dB，斜率分别为 ±20 dB/十倍频程

例 16.8 求图 16.23 所示电路的增益的波特图

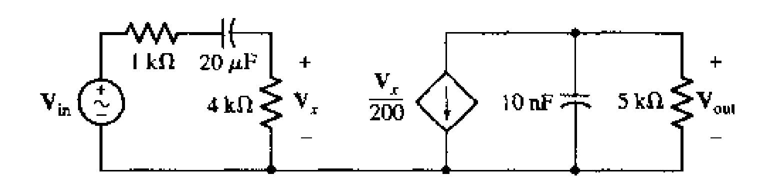


图 16.23 如果 $\mathbf{H}(\mathbf{s})=\mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$，则该放大器的幅度波特图如图 16.24(b)所示，相位波特图如图 16.25 所示

从左到右对电路进行分析，可以写出电压增益为：

$$\mathbf{H}(\mathbf{s})=\frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}}=\frac{4\,000}{5\,000+10^6/20\mathbf{s}}\left(-\frac{1}{200}\right)\times\frac{5\,000(10^8/\mathbf{s})}{5\,000+10^8/\mathbf{s}}$$

化简得：

$$\mathbf{H}(\mathbf{s})=\frac{-2\mathbf{s}}{(1+\mathbf{s}/10)(1+\mathbf{s}/20\,000)} \tag{16.28}$$

可以看到，上式含有一个常数 $20\log|-2|=6$ dB，转角频率为 $\omega=10$ rad/s 和 $\omega=20\,000$ rad/s，式中还有一个线性因式 $\mathbf{s}$。它们均在图 16.24(a)中画出，将这些曲线叠加在一起，可以得到图 16.24(b)所示的波特图。

练习

16.13 画出 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ 等于下列式子时的幅度波特图：(a)$50/(\mathbf{s}+100)$；(b)$(\mathbf{s}+10)/(\mathbf{s}+100)$；(c)$(\mathbf{s}+10)/\mathbf{s}$。

答案：(a) −6 dB，$\omega<100$；−20 dB/十倍频程，$\omega>100$；(b) −20 dB，$\omega<10$；+20 dB/十倍频程，$10<\omega<100$；0 dB，$\omega>100$；(c)0 dB，$\omega>10$；−20 dB/十倍频程，$\omega<10$

在画图 16.23 所示放大器的相位波特图之前，花点时间考察一下幅度波特图的一些细节。首先，不要太过于依赖于各个幅度曲线的相加。相反地，通过考虑 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ 的每个因式在各频率区间的渐近值，可以很容易求得合并后的幅度曲线的值。例如，对于图 16.24(b)所示曲

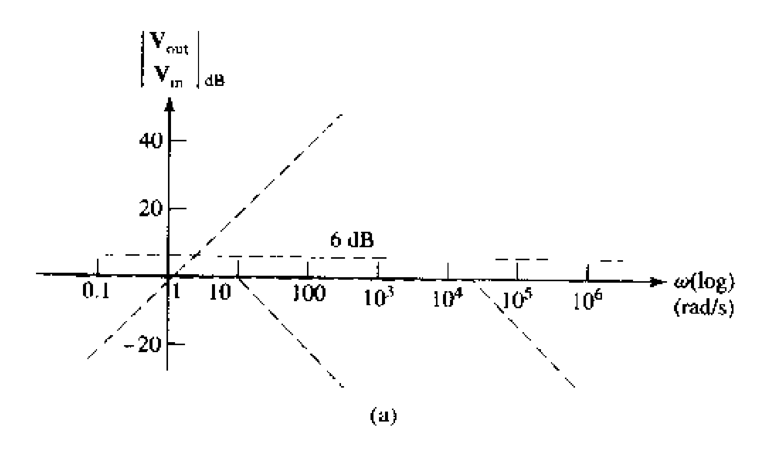
线在 $\omega = 10$ 和 $\omega = 20\,000$ 之间的平坦区域，它低于转角频率 $\omega = 20\,000$，因此可以用 1 代表 $(1 + s/20\,000)$；而该区域又高于频率 $\omega = 10$，因此可以用 $\omega = 10$ 代表$(1 + s/10)$。所以：

$$H_{dB} = 20\log\left|\frac{-2\omega}{(\omega/10)\times(1)}\right|$$
$$= 20\log 20 = 26\ \mathrm{dB},\quad (10 < \omega < 20\,000)$$

可能还想知道在高频区渐近响应曲线与横轴在何处相交。这时，两个因式可以表示为 $\omega/10$ 和 $\omega/20\,000$，因此：

$$H_{dB} = 20\log\left|\frac{-2\omega}{(\omega/10)(\omega/20\,000)}\right| = 20\log\left|\frac{400\,000}{\omega}\right|$$

因为在交点处 $H_{dB} = 0$，所以有 $400\,000/\omega = 1$，即 $\omega = 400\,000$ rad/s。



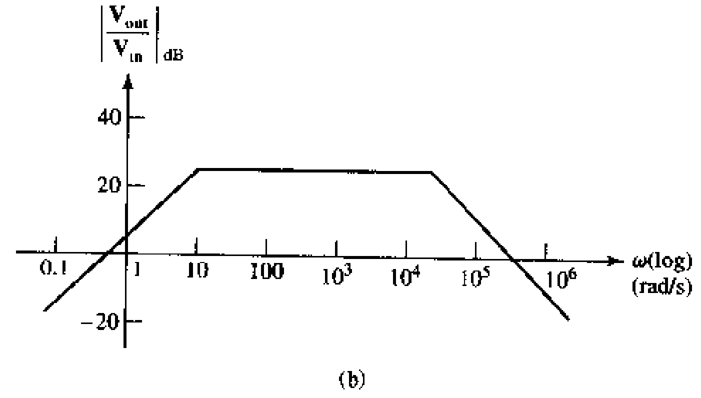


图 16.24　(a)分别画出了图 16.23 所示放大器当因式为 $-2, s, (1 + s/10)^{-1}$ 和 $(1 + s/20\,000)^{-1}$ 的幅度波特图；(b)将图 16.24(a)中的4个波特叠加在一起的频谱图

通常不需要在印制的半对数坐标纸上画出精确的波特图。只要简单地在纸上粗略地画出对数频率坐标即可。在选定了十倍频程的间隔(即从 $\omega = \omega_1$ 到 $\omega = 10\omega_1$ 的距离 L，其中 ω_1 通常取 10 的整数次幂)之后，如果用 x 表示 ω_1 右边的点 ω 到 ω_1 距离，则 $x/L = \log(\omega/\omega_1)$。记住下面这些值对画图会有帮助：当 $\omega = 2\omega_1$ 时，$x = 0.3L$；当 $\omega = 4\omega_1$ 时，$x = 0.6L$；当 $\omega = 5\omega_1$ 时，$x = 0.7L$。

例 16.9　画出式(16.28)给出的传输函数的相位波特图，$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = -2s/[(1 + s/10)(1 +$

s/20 000)]

首先考察 $\mathbf{H}(j\omega)$：

$$\mathbf{H}(j\omega)=\frac{-j2\omega}{(1+j\omega/10)(1+j\omega/20\,000)} \tag{16.29}$$

分子的相位为常数 $-90°$。

剩下的两个因子用极点 $\omega=10$ 和 $\omega=20\,000$ 产生的相位贡献的叠加来表示。图 16.25 中用虚线渐近线分别表示出这三项，图中的实线表示它们的和。

将这条曲线往上平移 360°得到的曲线与原曲线等效。同样也可以求出渐近相位曲线的确切值。

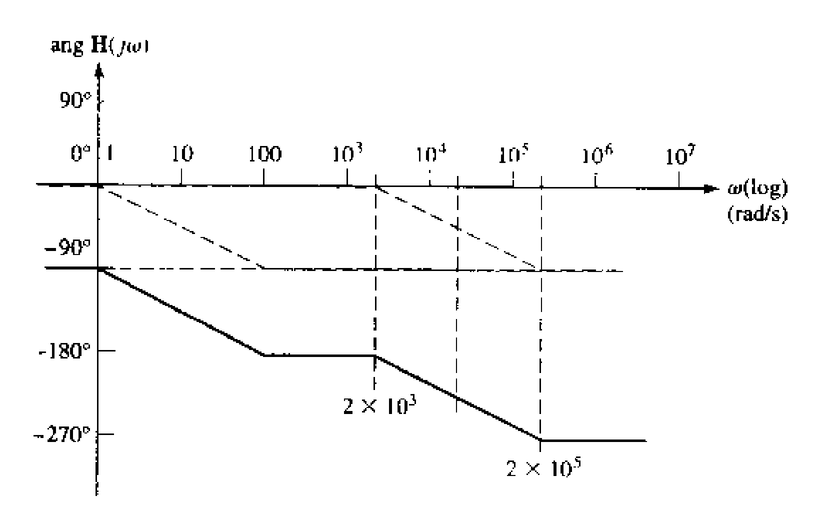


图 16.25 图中的实线表示图 16.23 所示放大器的渐近相位响应曲线

例如，当 $\omega=10^4$ rad/s 时，根据式(16.29)中分子和分母的各因式可以求出图 16.25 中相应的相角。其中分子的相角为 $-90°$；对于极点为 10 的因式，其贡献的相角为 $-90°$，因为 ω 比转角大十倍以上；我们知道，对于只有一个极点的情况，当频率处于转角频率的 0.1 倍和十倍之间时，相位曲线的斜率为 $-45°$/十倍频程，因此，对于转角频率为20 000 rad/s，可以计算出其相位为 $-45°\log(\omega/0.1a)=-45°\log[10\,000/(0.1\times 20\,000)]=-31.5°$。

这三项的代数和为 $-90°-90°-31.5°=-211.5°$，这与图 16.25 所示的渐近相位曲线上相应的点非常接近。

练习

16.14 画出当 $\mathbf{H}(s)$ 等于下列式子时的相位波特图：(a) $50/(s+100)$；(b) $(s+10)/(s+100)$；(c) $(s+10)/s$。

答案：(a) 0°，$\omega<10$；$-45°$/十倍频程，$10<\omega<1\,000$；$-90°$，$\omega>1\,000$；(b) 0°，$\omega<1$；$+45°$/十倍频程，$1<\omega<10$；45°，$10<\omega<100$；$-45°$/十倍频程，$100<\omega<1\,000$；0°，$\omega>1\,000$；(c) $-90°$，$\omega<1$；$+45°$/十倍频程，$1<\omega<100$；0°，$\omega>100$

前面所考虑的都是一阶零极点的情形，比如 $s^{\pm 1}$，$(1+0.2s)^{\pm 1}$ 等等，不过可以很容易将它们推广到高阶的情况。因式 $s^{\pm n}$ 对应的幅度响应曲线在 $\omega=1$ 处的斜率为 $\pm 20n$ dB/十倍频程，其相位响应曲线为常数相位 $\pm 90n°$。对于高阶零点因式 $(1+s/a)^n$，它对应的幅度响应曲线和

相位响应曲线相当于 n 个一阶零点幅度响应曲线或相位响应曲线的叠加。因此,可以得到其渐近幅度响应曲线在 $\omega < a$ 时为 0 dB,$\omega > a$ 时斜率为 $20n$ dB/十倍频程,$\omega = a$ 时误差为 $-3n$ dB,在 $\omega = 0.5a$ 和 $\omega = 2a$ 处误差为 $-n$ dB。而渐近相位响应曲线在 $\omega < 0.1a$ 时为 0°,$\omega > 10a$ 时为 90°,当 $\omega = a$ 时为 45°,当 $0.1a < \omega < 10a$ 时,斜率为 $45n$°/十倍频程。在两个转角频率处误差为 $\pm 5.71n$°。

对于形如 $(1 + s/20)^3$ 的因式,可以很快地画出其幅度和相位渐近曲线,但是要记住当幂比较高时,带来的误差也比较大。

16.7.6 复共轭对

最后需要考虑的因式类型是共轭极点对和共轭零点对的情形。采用下列的共轭零点对作为标准形式:

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 1 + 2\zeta\left(\frac{\mathbf{s}}{\omega_0}\right) + \left(\frac{\mathbf{s}}{\omega_0}\right)^2$$

其中 ζ 为16.2节介绍的阻尼因子,后面将看到 ω_0 为渐近响应曲线的转角频率。

如果 $\zeta = 1$,则 $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 1 + 2(\mathbf{s}/\omega_0) + (\mathbf{s}/\omega_0)^2 = (1 + \mathbf{s}/\omega_0)^2$,这是一个二阶零点因式,前面已经讨论过了。如果 $\zeta > 1$,则 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ 可以分解为两个简单的因式。因此,如果 $\zeta = 1.25$,则 $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 1 + 2.5(\mathbf{s}/\omega_0) + (\mathbf{s}/\omega_0)^2 = (1 + \mathbf{s}/2\omega_0)(1 + \mathbf{s}/0.5\omega_0)$,这又是我们熟悉的情况。

当 $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$ 时,这是一种新的情况。这时,没有必要求出共轭复根的值,只要求出幅度和相位渐近曲线在低频区和高频区的值,然后根据 ζ 的值做一个修正即可。

对于幅度响应,有:

$$H_{dB} = 20\log|\mathbf{H}(j\omega)| = 20\log\left|1 + j2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right| \tag{16.30}$$

当 $\omega \ll \omega_0$ 时,$H_{dB} = 20\log|1| = 0$ dB,这是低频区的渐近线。当 $\omega \gg \omega_0$ 时,主要是二次项起作用,这时 $H_{dB} = 20\log|-(\omega/\omega_0)^2| = 40\log(\omega/\omega_0)$,斜率为 +40 dB/十倍频程,这是高频区的渐近线。两条渐近线交于 $\omega = \omega_0$ 处,对应的值为 0 dB。图16.26中用实线画出了渐近幅度响应曲线,不过,必须对转角频率的邻域进行修正。对于式(16.30),令 $\omega = \omega_0$,可得:

$$H_{dB} = 20\log\left|j2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right| = 20\log(2\zeta) \tag{16.31}$$

根据上式,如果 $\zeta = 1$,则修正量为 +6 dB;如果 $\zeta = 0.5$,则不需要进行修正;如果 $\zeta = 0.1$,则修正量为 -14 dB。通常情况下,这一修正已经足够画出令人满意的渐近幅度响应曲线了。图16.26画出了当 $\zeta = 1, 0.5, 0.25$ 和 0.1 时根据式(16.30)计算出来的更为精确的曲线。比如对于 $\zeta = 0.25$,H_{dB} 在 $\omega = 0.5\omega_0$ 时的确切值为:

$$H_{dB} = 20\log|1 + j0.25 - 0.25| = 20\log\sqrt{0.75^2 + 0.25^2} = -2.0 \text{ dB}$$

负的峰值并不刚好出现在 $\omega = \omega_0$ 处,它通常稍低于这个频率,可以从 $\zeta = 0.5$ 时对应的曲线看出这一点。

如果 $\zeta = 0$,则 $\mathbf{H}(j\omega_0) = 0$,$H_{dB} = -\infty$,这时通常不画出波特图。

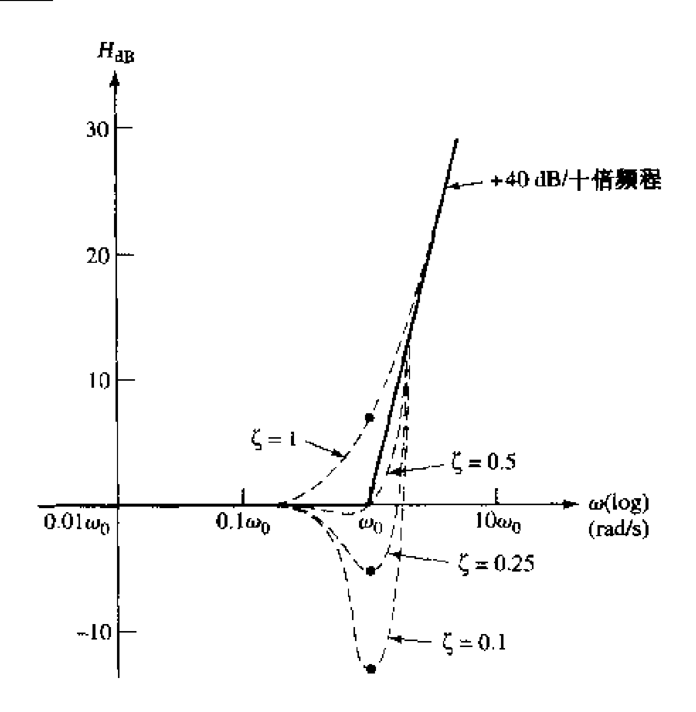


图 16.26 $\mathbf{H}(s) = 1 + 2\zeta(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2$ 在几种不同的阻尼系数 ζ 下的幅度波特图

最后来画出 $\mathbf{H}(j\omega) = 1 + j2\zeta(\omega/\omega_0) - (\omega/\omega_0)^2$ 的渐近相位响应。当 $\omega = 0.1\omega_0$ 时，令 ang $\mathbf{H}(j\omega) = 0°$；当 $\omega = 10\omega_0$ 时，有 ang $\mathbf{H}(j\omega) = $ ang $[-(\omega/\omega_0)^2] = 180°$。在转角频率处，ang $\mathbf{H}(j\omega_0) = $ ang $(j2\zeta) = 90°$。在频率区间 $0.1\omega_0 < \omega < 10\omega_0$ 为直线，如图 16.27 的实线所示，它开始于$(0.1\omega_0, 0°)$，经过$(\omega_0, 90°)$，终止于$(10\omega_0, 180°)$，斜率为 90°/十倍频程。

这时，必须根据各 ζ 值对这条曲线进行修正。根据式(16.30)，有：

$$\text{ang}\,\mathbf{H}(j\omega) = \tan^{-1}\frac{2\zeta(\omega/\omega_0)}{1-(\omega/\omega_0)^2}$$

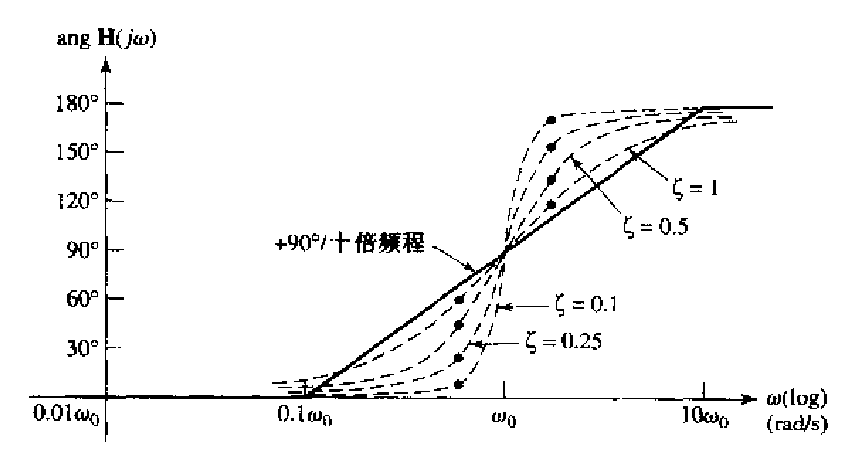


图 16.27 $\mathbf{H}(j\omega) = 1 + j2\zeta(\omega/\omega_0) - (\omega/\omega_0)^2$ 的相位特性的直线近似，如图中实线所示，图中用虚线画出了 $\zeta = 1, 0.5, 0.25$ 和 0.1 时的精确相位曲线

只要知道了 $\omega < \omega_0$ 区间和 $\omega > \omega_0$ 区间某个频率的精确值，就可以近似地画出这段曲线的形状。当 $\omega = 0.5\omega_0$ 时，有 ang $\mathbf{H}(j0.5\omega_0) = \tan^{-1}(4\zeta/3)$；当 $\omega = 2\omega_0$ 时，其相位为 180° −

$\tan^{-1}(4\zeta/3)$。图 16.27 中以虚线画出了当 $\zeta=1,0.5$ 和 0.25 时的相位曲线；图中的实心粗点表示 $\omega=0.5\omega_0$ 和 $\omega=2\omega_0$ 时的精确相位值。

如果二次因式出现在分母中，则其幅度和相位曲线上的幅度和相位分别取为前面所讨论的曲线相应量的相反数。最后以一个包含线性因式和二次因式的例子来结束本节。

例 16.10　画出传输函数 $\mathbf{H(s)}=100\,000\mathbf{s}/[(\mathbf{s}+1)(10\,000+20\mathbf{s}+\mathbf{s}^2)]$ 的波特图

先来考虑二次因式，并将它整理成为可以直接看出 ζ 的形式。首先将二次因式除以它的常数项 10 000：

$$\mathbf{H(s)}=\frac{10\mathbf{s}}{(1+\mathbf{s})(1+0.002\mathbf{s}+0.000\,1\,\mathbf{s}^2)}$$

下一步，考察 $\mathbf{s}^2$ 项可得 $\omega_0=\sqrt{1/0.000\,1}=100$。然后重新写出二次因式的一次项，将其表示为三个因子 2，$(\mathbf{s}/\omega_0)$ 和 ζ 相乘的形式：

$$\mathbf{H(s)}=\frac{10\mathbf{s}}{(1+\mathbf{s})[(1+2)(0.1)(\mathbf{s}/100)+(\mathbf{s}/100)^2]}$$

可以看出 $\zeta=0.1$。

图 16.28 的虚线画出了各因式的幅度渐近线：对于因式 10 为 20 dB；对于因式 s 为穿过横轴上的点 $\omega=1$，斜率为 +20 dB/十倍频程的无穷长直线；对于分母中的一阶极点因式，其转角频率为 $\omega=1$；对于含有二次项的因式，其转角频率为 $\omega=100$，二次项对应的渐近线为 −40 dB/十倍频程的直线。将这四条曲线叠加起来，并对二次因式进行 +14 dB 的修正后，得到的渐近线如图 16.28 中的实线所示。

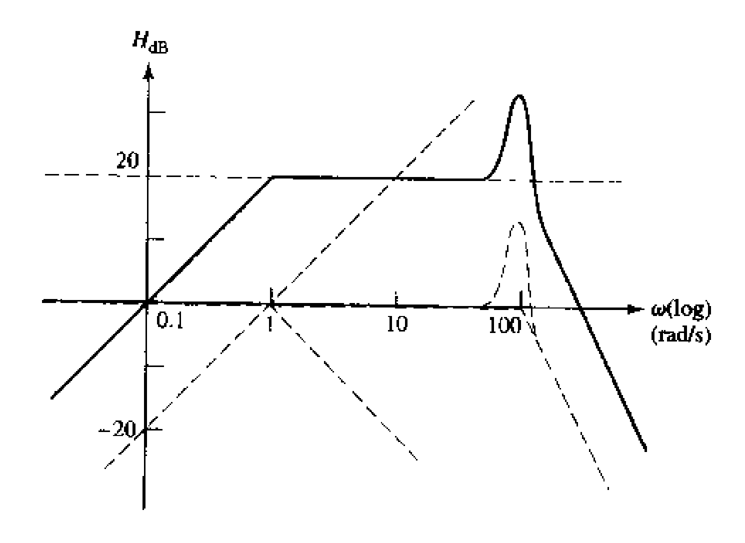


图 16.28　传递函数 $\mathbf{H(s)}=\dfrac{100\,000\mathbf{s}}{(\mathbf{s}+1)(10\,000+20\mathbf{s}+\mathbf{s}^2)}$ 的幅度波特图

相位响应由以下三部分组成：对于因式 s 为 +90°；对于一阶极点因式，当 $\omega<0.1$ 时为 0°，当 $\omega>10$ 时为 −90°，当 $0.1<\omega<10$ 时为 −45°/十倍频程的直线；对于二次因式，当 $\omega<10$ 时为 0°，当 $\omega>1\,000$ 时为 −180°，当 $10<\omega<1\,000$ 时为 −90°/十倍频程的直线。将这三条渐近线叠加起，再根据 $\zeta=0.1$ 进行一些修正，最后可以得到的渐近线如图 16.29 中的实线所示。

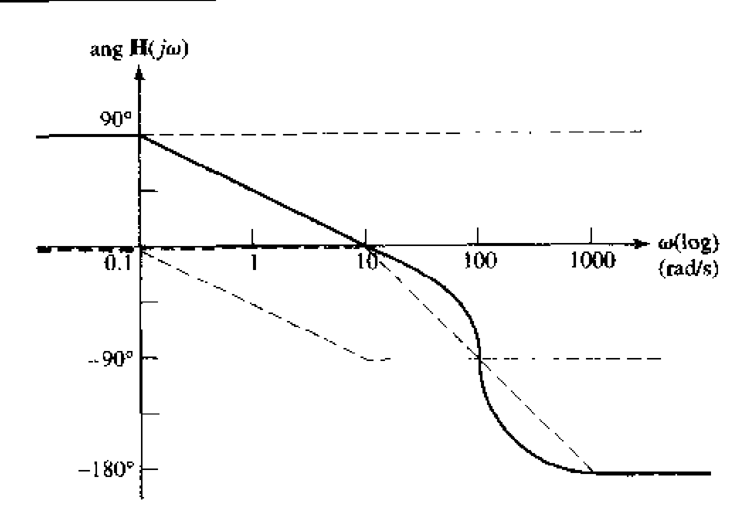


图 16.29　传递函数 $\mathbf{H}(s)=\frac{100\,000s}{(s+1)(10\,000+20s+s^2)}$ 的相位波特图

练习

16.15　设 $\mathbf{H}(s)=1\,000s^2/(s^2+5s+100)$，画出幅度波特图并求(a)当 $H_{dB}=0$ 时 ω 的值；(b)当 $\omega=1$ 时 H_{dB} 的值；(c)当 $\omega\to\infty$ 时 H_{dB} 的值。

答案:0.316 rad/s; 20dB; 60dB。

计算机辅助分析

绘制波特图的技巧非常有用。有许多需要很快绘制出近似曲线的场合(比如考试,或者在某个特殊的应用场合下计算一个特定电路的拓扑结构),只要知道了响应曲线的形状就足够了。而且在设计滤波器中,在选择因式和系数时,波特图也具有非常重要的价值。

在一些情况下,需要得到精确的响应曲线(比如校验最终的电路设计时),有几种计算机辅助工具可供选择。首先想到的方法是使用 MATLAB 来产生频率响应曲线,为了做的这一点,必须首先对电路进行分析并正确地得出其传递函数,不过,这时并不需要对求得的表达式分解因式或者进行化简。

考虑图 16.23 所示的电路,已经求出其传递函数为:

$$\mathbf{H}(s)=\frac{-2s}{(1+s/10)(1+s/20\,000)}$$

求它在频率区间 100 mrad/s 到 1 Mrad/s 上的响应曲线。因为最后的图是在对数坐标下绘制的,因此不需要取均匀的频率间隔,用 MATLAB 的函数 logspace()可以产生一个频率矢量,它的前两个参数分别表示频率区间的起始频率和终止频率是 10 的多少次幂(在本例中分别为 -1 和 6),第三个参数为总的点数。因此,相应的 MATLAB 程序为:

```
EDU >> w = logspace( - 1,6,100);
EDU >> denom = (1 + j * w/10). * (1 + j * w/20 000);
EDU >> H = - 2 * j * w./denom;
EDU >> Hdb = 20 * log10(abs(H));
```

```
EDU >> semilogx(w,Hdb)
EDU >> xlabel('frequency(rad/s)')
EDU >> ylabel('|H(jw)|(dB)')
```

它得到曲线如图 16.30 所示。

需要对这段 MATLAB 代码作一些解释。首先注意到，这里对 H(s)的表达式进行了代换 $s=j\omega$。MATLAB 将变量 ω 看做一个矢量，或者说一维矩阵。这样，该变量将导致分母表达式计算上的困难，因为 MATLAB 会试图用矩阵运算的规则对表达式进行运算。因此，用单独的一行来计算 $H(j\omega)$ 的分母，为了将两个因子相乘，使用运算符'.*'而不是'*'。这个新的运算符与下面的 MATLAB 语句等效：

```
EDU >> for k = 1:100
denom = (1 + j * w(k)/10) * (1 + j * w(k)/20000);
end
```

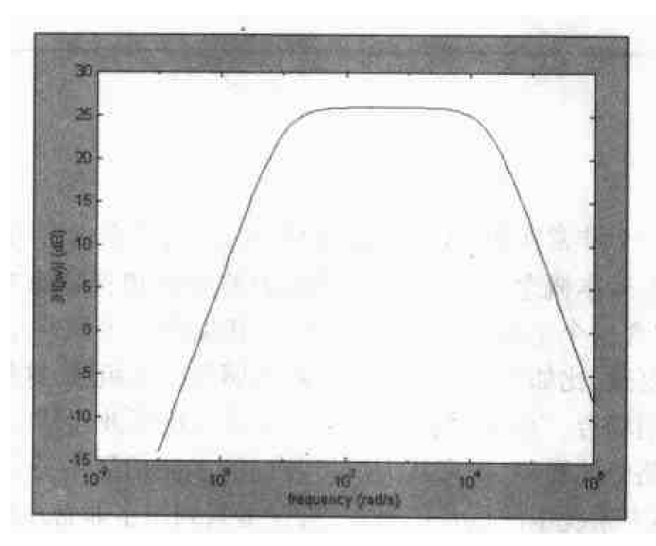
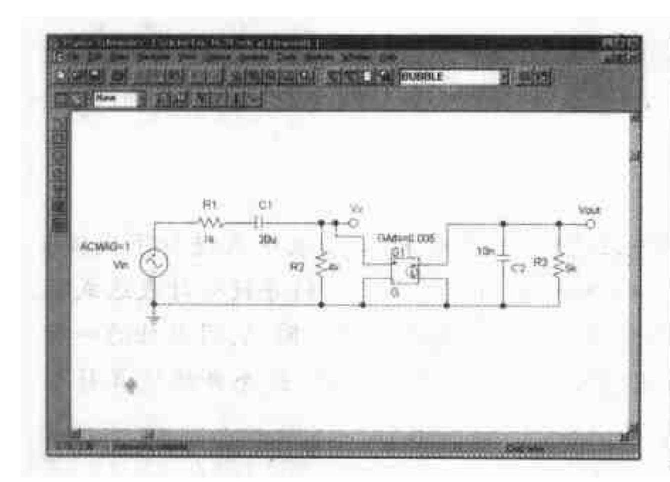


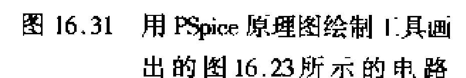
图 16.30　H_{db} 的 MATLAB 仿真图形

在下一行用到的另一个新运算符'./'的也有类似的含义。因为所求结果的单位为 dB，因此需要使用函数 log 10()，在 MATLAB 中 log()表示自然对数。最后来看这个新的画图函数 semilogx()，它用来产生 x 轴为对数坐标的图。希望读者使用这些技巧绘制出前面例子的精确响应曲线，并与相应的波特图做比较。

PSpice 也非常适合于绘制频率响应曲线。将图 16.23 用原理图绘制工具重新绘制出来，如图 16.31 所示，图中的两个圆圈是伪元件，用来表示 V_x 和 V_{out}，这是为了在 Probe 中更容易识别出来。为了方便，电源 VAC 使用了幅度为 1 V 的交流电源(AC)，当然也可以使用其他值。图 16.32 为用 1001 点产生的图形(选中 Decade AC Sweep Type)，频率范围为 100 mHz 到 1 MHz。注意到，仿真中使用的单位为 Hz，不是 rad/s。

同样地，希望读者使用这种方法对前面的例子进行仿真，并与相应的波特图做比较。




图 16.31 用 PSpice 原理图绘制工具画出的图 16.23所示的电路

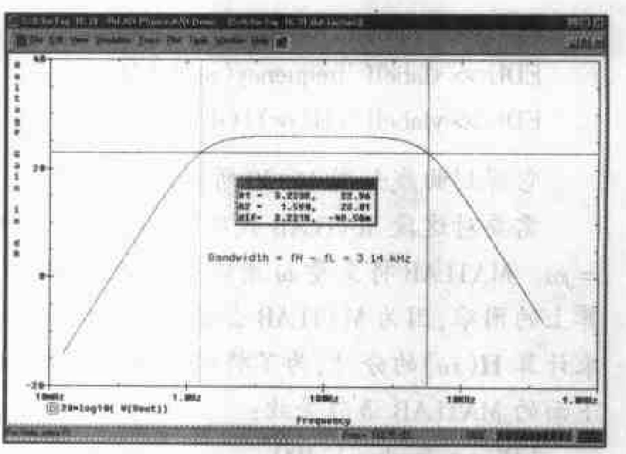


图 16.32 图 16.23 所示电路的频率响应曲线,单位为 dB

16.8 滤波器

滤波器的设计是一个非常实用(和非常有趣)的课题,就这个内容可以单独写一本教科书。本节将介绍滤波的一些基本概念,并且研究一些无源滤波器和有源滤波器电路。这些电路可以非常简单,比如只包含一个电容和一个电感,但将其加到一个网络中却可以改善网络的性能。它们也可以非常复杂,比如由许多电阻、电容、电感和运放组成,这样可以得到精确的响应曲线以满足特定的应用场合。在现代电子技术中,常常使用滤波器从交流电源获得直流电压,或者用来除去通信电路中的噪声,用来从天线接收到的多路信号中分离出广播信号和电视信号,用来放大汽车立体声系统中的低音信号等等,这里只列出了非常小的一部分应用场合。

顾名思义,滤波器的概念隐含了它对频率具有选择性。根据应用场合的不同,可以将它分成下面几种类型。其中,低通滤波器(low-pass filter)的响应曲线如图 16.33(a)所示,它允许低于截止频率(cutoff frequency)的频率通过,而对于高于截止频率的频率则衰减很大。高通滤波器(high-pass filter)则刚好相反,如图 16.33(b)所示。滤波器响应曲线的重要指标是截止频率附近响应曲线的尖锐程度,即转角频率附近响应曲线的陡峭程度。一般而言,越是陡峭的响应曲线,其电路也越复杂。

将一个低通滤波器和一个高通滤波器组合起来,可以得到一个带通滤波器(bandpass filter),其响应曲线如图 16.33(c)所示。对于这种类型的滤波器,其两个截止频率之间的区间称为通带(passband);通带以外的区域称为阻带(stopband)。这些概念也可以用于低通和高通滤波器中,如图 16.33(a)和图 16.33(b)所示。将这两个滤波器的截止频率互换,可以得到带阻滤波器(bandstop filter),它允许高频和低频通过,减弱任何频率处于两个截止频率之间的信号[图 16.33(d)]。

陷波器(notch filter)是一种特殊的带阻滤波器,其响应特性非常窄,它只阻止信号的某个频率成分通过。还有一种滤波器叫做多带滤波器(multiband filter),它有多个通带和阻带,设计这种滤波器有现成的方法,但不是本书所讨论的内容。

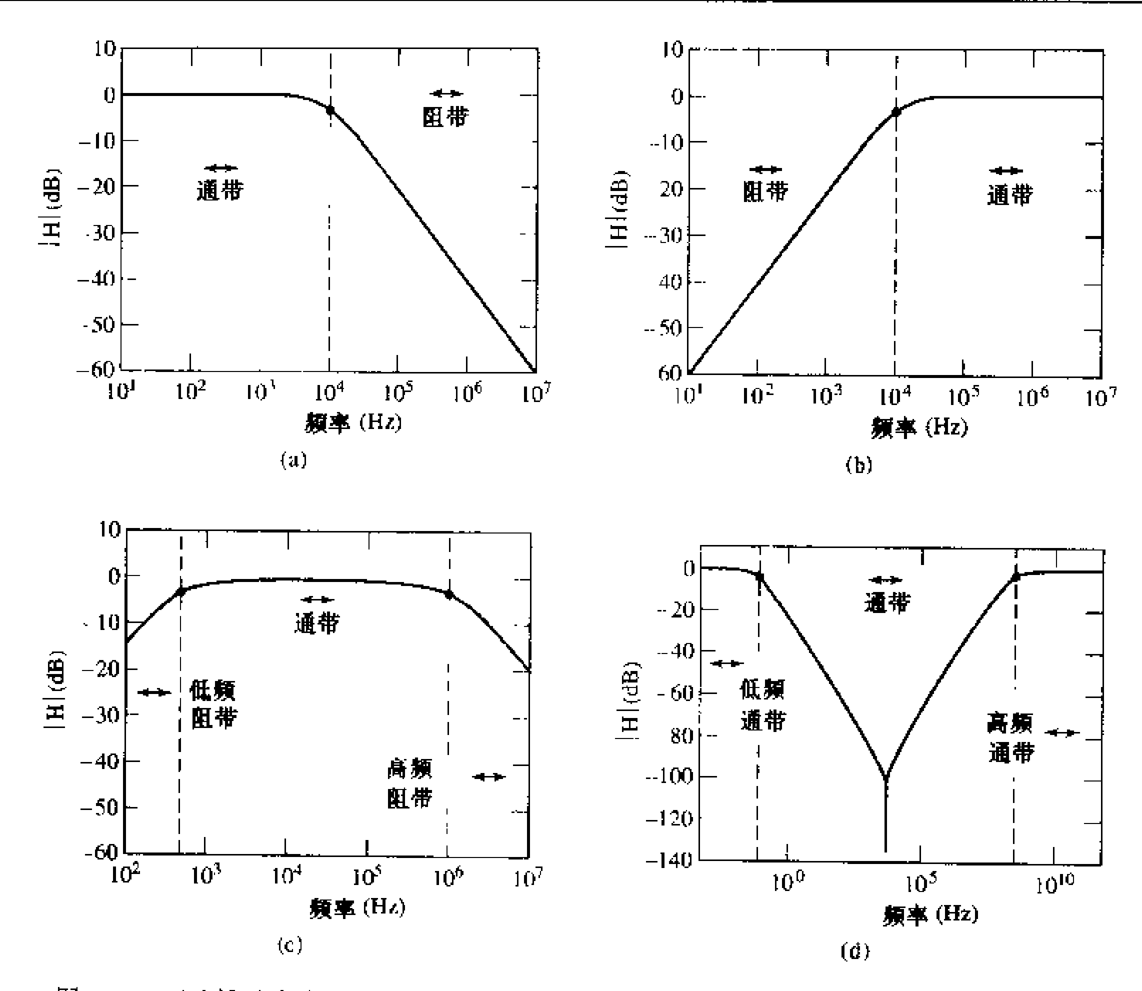


图16.33　(a)低通滤波器;(b)高通滤波器;(c)带通滤波器和(d)带阻滤波器的频率响应曲线

16.8.1　无源滤波器

只用一个电容和一个电阻就可以构造一个简单的滤波器，如图16.34(a)所示。这是一个低通滤波器电路，其传递函数为：

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) \equiv \frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}} = \frac{1}{1 + RC\mathbf{s}} \tag{16.32}$$

$\mathbf{H}(\mathbf{s})$只有一个截止频率 $\omega = 1/RC$，有一个零点 $\mathbf{s} = \infty$，这使得它具有“低通”的特性。低频时($\mathbf{s} \to 0$)，$|\mathbf{H}(\mathbf{s})|$接近其最大值(1或者说0 dB)，高频时($\mathbf{s} \to \infty$)，$|\mathbf{H}(\mathbf{s})| \to 0$。定性地分析一下电容的阻抗就很容易理解这一特性：当频率增大时，对于交流信号，电容相当于短路，这使得输出电压下降。这个滤波器响应曲线的一个例子如图16.34(b)所示，其中 $R = 500\ \Omega$，$C = 2$ nF；将鼠标移到 −3 dB 处可以得到截止频率为159 kHz(1 Mrad/s)。给电路增加电抗元件(比如电容或电感)可以提高截止频率附近响应曲线的陡峭程度。

在下一个例子中将看到，只要将图16.34(a)中的电阻和电容换一下位置，即可以得到一个高通滤波器。

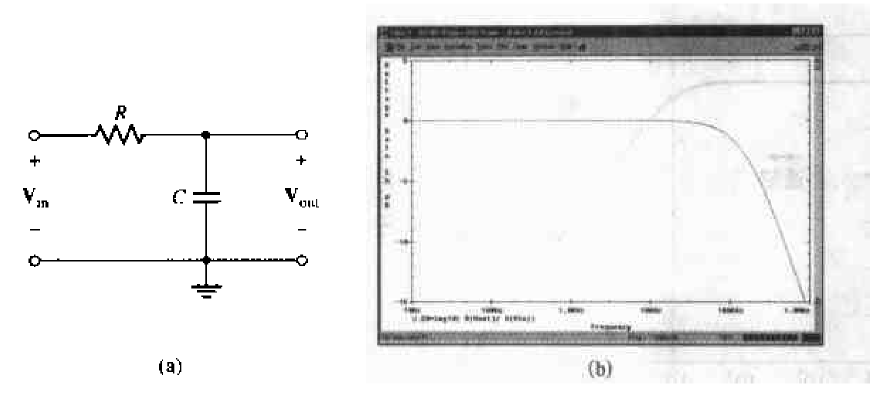


图 16.34 (a)由一个电阻和一个电容组成的简单低通滤波器;(b)用 PSpice 画出的该电路的频率响应曲线

例 16.11 设计一个截止频率为 3 kHz 的高通滤波器

首先要选择电路的拓扑结构。因为没有要求响应曲线的陡峭程度，因此可以使用图 16.35所示的简单电路来实现。

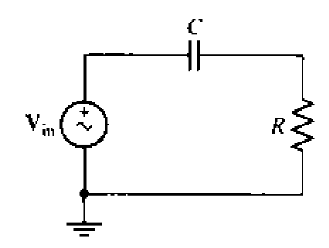


图 16.35 简单高通滤波器电路，选取 R 和 C 的值，使得其截止频率为 3 kHz

很容易求出该电路的传输函数为：

$$\mathbf{H}(\mathbf{s})=\frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_x}=\frac{RC\mathbf{s}}{1+RC\mathbf{s}}$$

它有一个零点 $\mathbf{s}=0$，使得该电路具有“高通”的特性。

该滤波器电路的截止频率为 $\omega_L=1/RC$，要求的 ω_L 的值为 $\omega_L=2\pi f_L=2\pi\times 3\ 000=$ 18.85 krad/s。这时，必须取定 R 和 C 中的一个值。在构造实际电路时，最好根据手头已有的电阻和电容值来确定取什么值，但这里并没有提供这样的信息，因此可以取任意的值。于是取 R 为标准电阻值 4.7 kΩ，这时电容值必须为 $C=11.29$ nF。

最后剩下的步骤是用 PSpice 仿真来验证设计，PSpice 给出的频率响应曲线如图 16.36 所示。

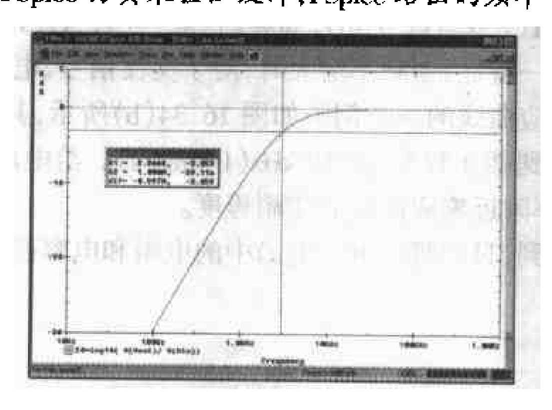


图 16.36 最后的设计的频率响应仿真结果，和预想的一样，截止(3 dB)频率为 3 kHz

练习

16.16　设计一个截止频率为 13.56 MHz 的高通滤波器，这是射频电源常用的频率。用 PSpice 检验你的设计。

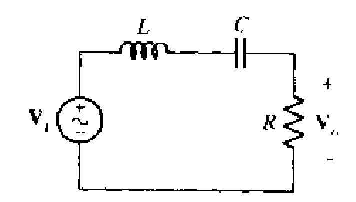


图 16.37　简单的串联 *RLC* 带通滤波器

在本章开始部分，已经看过了几个电路，可以将它们归到“带通”滤波器（例如图 16.1 和图 16.7）中。考虑图 16.37 所示的简单电路，取电阻两端的电压作为输出端。容易得到该电路的传输函数为：

$$\mathbf{A}_V = \frac{\mathbf{s}RC}{LC\mathbf{s}^2 + RC\mathbf{s} + 1} \tag{16.33}$$

进行一些代数运算后，可以得到该函数的幅度为：

$$|\mathbf{A}_V| = \frac{\omega RC}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \tag{16.34}$$

当 $\omega \to 0$ 时，上式变为：

$$|\mathbf{A}_V| \approx \omega RC \to 0$$

当 $\omega \to \infty$ 时，为：

$$|\mathbf{A}_V| \approx \frac{R}{\omega L} \to 0$$

对式(16.34)进行分析，可知它有两个截止频率，可以通过求出 $\mathbf{A}_V$ 幅度下降到其最大值的 $1/\sqrt{2}$[①] 处的点来求得这两个截止频率。这个滤波器的中心频率为 $\omega = 1/\sqrt{LC}$。

例题 16.12　设计一个带宽为 1 MHz，高截止频率为 1.1 MHz 的带通滤波器

选用图 16.37 的电路结构，首先来求其截止频率。带宽可以表示为 $f_H - f_L$，于是：

$$f_L = 1.1 \times 10^6 - 1 \times 10^6 = 100 \text{ kHz}$$

则

$$\omega_L = 2\pi f_L = 628.3 \text{ krad/s}$$

容易求得高截止频率(ω_H)为 6.912 Mrad/s。

为了设计出符合这些参数的电路，需要求出以 R，L 和 C 表示的这两个频率的表达式。

为方便分析，在这里重新写出式(16.34)，它给出这个电路的幅度增益 $\mathbf{A}_V$ 为：

$$|\mathbf{A}_V| = \frac{\omega RC}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \tag{16.34}$$

上式的最大值为 1（发生在 $\omega = 1\sqrt{LC}$ 处），因此需要求出 $|\mathbf{A}_V| = 1/\sqrt{2}$ 时相应的频率值，这

① 原文少了“/”，有误——译者注。

时可以得到：

$$(1-LC\omega_c^2)^2=\omega_c^2R^2C^2 \tag{16.35}$$

下标 c 用来区分截止频率和普通频率。

两边求平方根，得：

$$LC\omega_c^2+RC\omega_c-1=0$$

解此二次方程得：

$$\omega_c=-\frac{R}{2L}\pm\frac{\sqrt{R^2C^2+4LC}}{2LC} \tag{16.36}$$

对于本例，负的频率值没有物理意义，因此只好保留正根。这样看起来该电路似乎只有一个临界频率，也许是因为前面做得太快了点，一下子就对式(16.35)两边取了正根。其实，式(16.35)的负根同样有效，这样，可以得到：

$$LC\omega_c^2-RC\omega_c-1=0$$

因此：

$$\omega_c=\frac{R}{2L}\pm\frac{\sqrt{R^2C^2+4LC}}{2LC} \tag{16.37}$$

对于第二个临界频率，只有取正根才有物理意义，因为进一步观察可以发现，负根将导致求得的临界频率为负值。因此，式(16.36)为 ω_L 的表达式，而式(16.37)则为 ω_H 的表达式(当然都取它们的正根)。因为 $\omega_H-\omega_L=\mathcal{B}$，因此 $\mathcal{B}=R/L$。

令式(16.37)等于 $2\pi(1.1\times10^6)$ 可以求出 $1/LC$，因为已经知道 $\mathcal{B}=2\pi(f_H-f_L)=6.283\times10^6$。

$$\frac{1}{2}\mathcal{B}+\left[\frac{1}{4}\mathcal{B}^2+\frac{1}{LC}\right]^{1/2}=2\pi(1.1\times10^6)$$

解之，可以得到 $1/LC=4.343\times10^{12}$。选取 $L=1$ H(这个值取得比较大，实际的电感值没这么大)，可以求得 $R=6.283$ MΩ，$C=230.3$ fF。可以看到，这种“设计”问题并没有惟一的答案，可以先选定 R，L 或者 C 中的任何一个，然后再求出其他参数。

练习

16.17 设计一个低截止频率为 100 rad/s，高截止频率为 10 krad/s 的带通滤波器。

答案：一个可能的答案为：$R=990\ \Omega$，$L=100$ mH，$C=10\ \mu$F

前面所讨论的滤波器称为无源滤波器，这是因为它们只由无源元件组成(也就是说不含晶体管、运放或者其他“有源”元件)。虽然相对而言无源滤波器比较常见，但是它们并不总是能满足所有的应用场合。通常要求滤波电路有一定的放大作用，而无源滤波器的增益(定义为输出电压与输入电压的比值)却很难调节。

16.8.2 有源滤波器

使用有源元件(比如运放)进行滤波器设计，可以克服无源滤波器的许多不足之处。在第

6 章中看到，设计出具有增益的运放电路是很容易的；而且，通过合理的设计，运放电路还能用电容来得到类似电感的特性。

由于运放的内部电路存在很小的电容（通常情况下其数量级为 100 pF），因此限制了运放正常工作的频率范围。所以，任何运放电路均具有低通滤波器的特性，其截止频率约为 10 kHz ~ 100 kHz，如果要获得更低的截止频率，则需要在运放的输入端或者输出端接上滤波器。

例题 16.13　设计一个截止频率为 10 kHz，电压增益为 40 dB 的有源低通滤波器

需要得到运放电路在频率远小于 10 kHz 时的增益为 40 dB，即 100 V/V，这可以用同相放大器来实现，图 16.38(a) 即为其中的一种，此时：

$$\frac{R_f}{R_1} + 1 = 100$$

另外，还希望电路的截止频率为 10 kHz。因此，需要在运放的输入端添加一个低通滤波器[如图 16.38(b)所示]。这时，就可以根据电路来求出其传递函数了。

从同相输入端入手：

$$\mathbf{V}_+ = \mathbf{V}_i \frac{1/sC}{R_2 + 1/sC} = \mathbf{V}_i \frac{1}{1 + sR^2C}$$

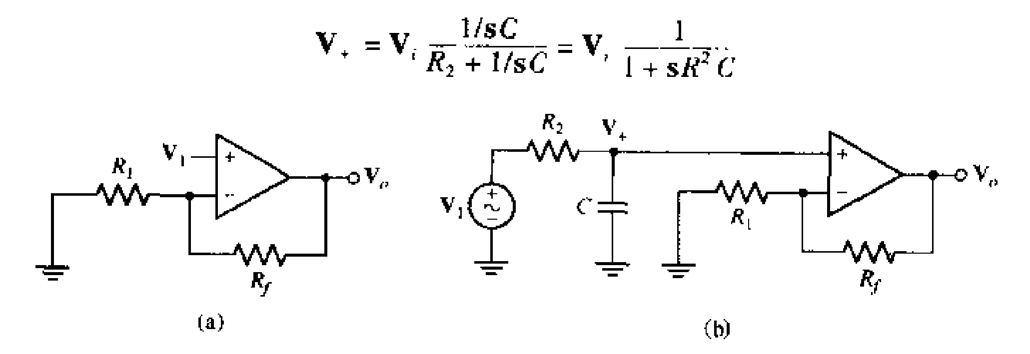


图 16.38　(a)简单同相运放电路；(b)在运放的输入端添加了一个低通滤波器，该低通滤波器由电阻 R_2 和电容 C 组成

对于反相输入端，有：

$$\frac{\mathbf{V}_o - \mathbf{V}_-}{R_f} = \frac{\mathbf{V}_-}{R_1}$$

联立这两个方程，可以从中解出 $\mathbf{V}_o$：

$$\mathbf{V}_o = \mathbf{V}_i\left(\frac{1}{1 + sR_2C}\right)\left(1 + \frac{R_f}{R_1}\right)$$

从上式可以得到增益 $\mathbf{A}_V = \mathbf{V}_o/\mathbf{V}_i$ 的最大值为 $1 + R_f/R_1$，根据设计要求，令其为 100。因为这两个电阻均不出现在截止频率公式 $(R_2C)^{-1}$ 中，因此可以先选定任何一个，比如取 $R_1 = 1\ \text{k}\Omega$，可以得到 $R_f = 99\ \text{k}\Omega$。

选取 $C = 1\ \mu\text{F}$，可以得到：

$$R_2 = \frac{1}{2\pi(10 \times 10^3)C} = 15.9\ \Omega$$

这时，设计工作就完成了。但真的完成了吗？来看该电路频率响应仿真结果，如图 16.39(a)所示。

很明显，这个设计并不满足截止频率为 10 kHz 这个条件。错在什么地方了呢？仔细检查前面的数学运算，并不能发现任何错误，因此，必然是在某个地方做了错误的假定。这个仿真

是用运放 μA741 得到的，它并不满足理想运放的条件，这就是错误的原因。对于同一个电路，采用运放 LF111 替代 μA741 后，得到的仿真结果如图 16.39(b)所示，其截止频率为所希望的 10 kHz。

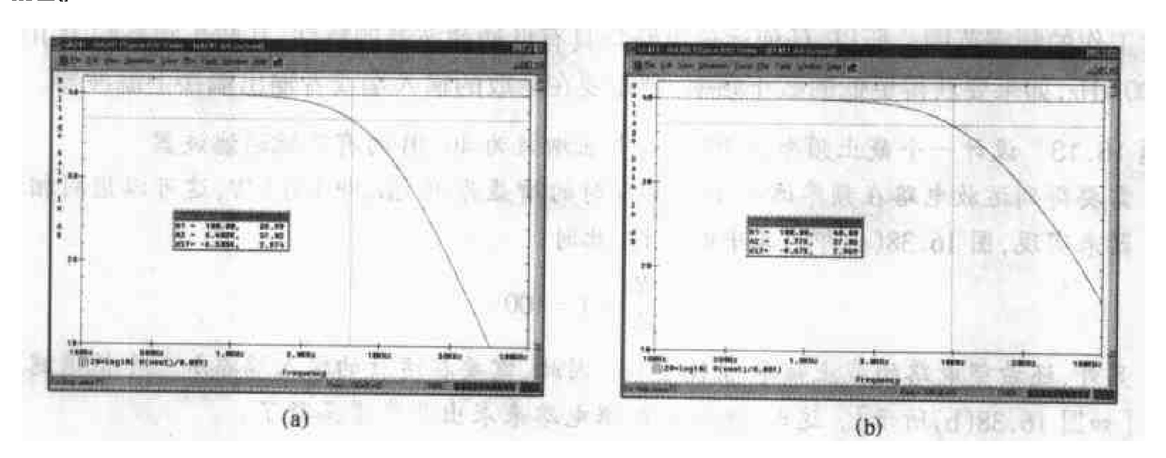


图 16.39 (a)使用 μA741 运放设计的滤波器电路的频率响应，图中显示的截止频率为 6.4 kHz；(b)使用 F111 运放设计的同一滤波器电路，其截止频率为 10 kHz

运放 μA741 本身的截止频率约为 10 kHz，在本设计中不能忽略；而 LF111 的第一个截止频率出现在 75 kHz 处，这远大于 10 kHz，因此不会影响我们的这个设计。

练习

16.18 设计一个增益为 30 dB，截止频率为 1 kHz 的低通滤波器。

答案：一个可能的答案为：$R_1 = 100\ \text{k}\Omega$，$R_f = 3.062\ \text{M}\Omega$，$R_2 = 79.58\ \Omega$，$C = 2\ \mu\text{F}$

实际应用

低音、高音和中音调节

对于音响系统，通常需要独立调节低音、高音和中音，即使对于不昂贵的设备来说也是如此。普遍接受的音频范围(至少对于人的耳朵来说)为 20 Hz ~ 20 kHz，低音指的是低频区(约 < 500 Hz)，高音指的是高频区(约 > 5 kHz)。

画出均衡系统的框图相对来说比较简单。由收音机或 CD 唱机等产生的信号频率范围比较宽，带宽约为 20 kHz。必须将此信号送到三个不同的运放电路中进行放大，每个运放的输入端需要接上不同的滤波器。低音调节电路需要一个低通滤波器，高音调节电路需要一个高通滤波器，中音调节电路则需要一个带通滤波器。然后将每个运放电路的输出接到一个加法放大电路中，图 16.40 给出了完整的电路框图。

图 16.41 为模块的基本结构图。该电路由一个同相运放电路和一个低通滤波器组成，其中运放的电压增益为 $1 + R_f/R_1$，低通滤波器由电阻 R_2 和电容 C 组成。反馈电阻 R_f 是可调的(有时称之为电位器)，因此通过调节其旋钮可以改变运放的增益，通常将其称为音量控制电阻。低通滤波器限制了运放放大的频率范围，其截止频率为 $(R_2C)^{-1}$。如果允许用户选择滤

波器的截止频率，则可以用电位器来替换电阻 R_2，或者也可以用可变电容器来替换电容 C。其他级也是采用同样的方法来构造的，只是运放输入端所接的滤波器不同。

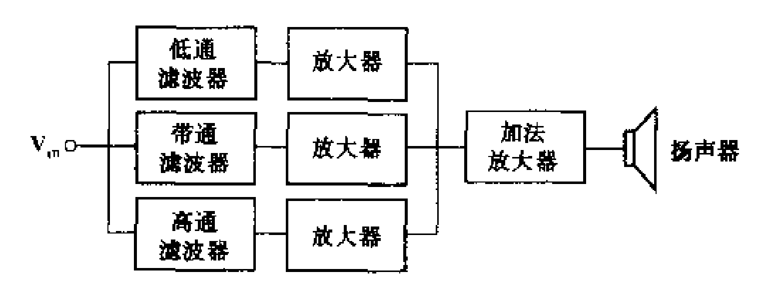


图16.40 均衡器电路框图

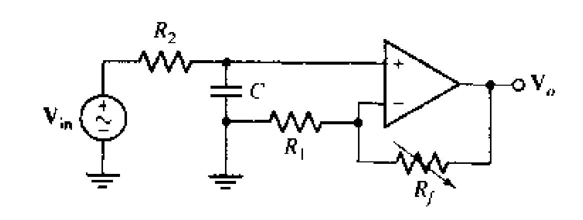


图16.41 放大器电路的低音调节部分

为了区分不同级中的电阻、电容和运放，分别采用不同的下标（t，m 和 b）。首先从高音级开始，当频率范围为 10 kHz ~ 20 kHz 时，对于高增益的情况，前面在使用 μA741 曾经碰到过同样的问题，因此，这里用 LF111 也许会好一些。取高音截止频率为 5 kHz（不同的音频电路设计者取的值可能会不同），则：

$$\frac{1}{R_{2t}C_t} = 2\pi(5 \times 10^3) = 3.142 \times 10^4$$

取 $C_t = 1\ \mu\text{F}$，可得到 R_{2t} 的值为 31.83 Ω。取低音截止频率为 500 Hz，同样取 $C_b = 1\ \mu\text{F}$，可得 R_{2b} 的值为 318.3 Ω。带通滤波器的设计留给读者。

下一步需要选择 R_{1t}，R_{1b} 以及相应反馈电阻的合适的值。此时没有给出任何具体的要求，因此，为了简单起见，可以将各级的值取为相同。这里取 R_{1t} 与 R_{1b} 均为 1 kΩ，取 R_{ft} 与 R_{fb} 均为 10 kΩ 的电位器（就是说其范围可从 0 kΩ ~ 10 kΩ 变化），这样可以使其中一个信号的幅度比其他的幅度大 11 倍。为了使设计出的系统便于携带，我们选择 ±9 V 的电源进行供电，根据需要，可以很容易改为使用其他电源。

现在滤波级的设计已经完成了，下面来考虑加法电路的设计。为了简单起见，采用与其他部分相同的电源进行供电，这就限制了输出电压的最大幅度为 9 V。这里使用反相运算放大器的结构，也就是说，将每个滤波器放大级的输出端直接接到其 1 kΩ 电阻上，然后将每个 1 kΩ 电阻的另一端接到加法放大级的反相输入端。为了防止饱和，必须给加法放大级的电位器选择合适的值，这样，需要知道输入电压的范围以及扬声器的功率（瓦特数）。图 16.42 给出了整个电路的频率响应曲线的估计，也给出了当所有反馈电阻均取 9 kΩ 时低音和高音滤波级的响应。从仿真的结果可以看出，该电路抑制了原始信号的中频成分，有选择性地放大了低音和高音成分（因为 PSpice 学生版对可以仿真的最大节点数有限制，因此不能给出完整的均衡器电路图）。

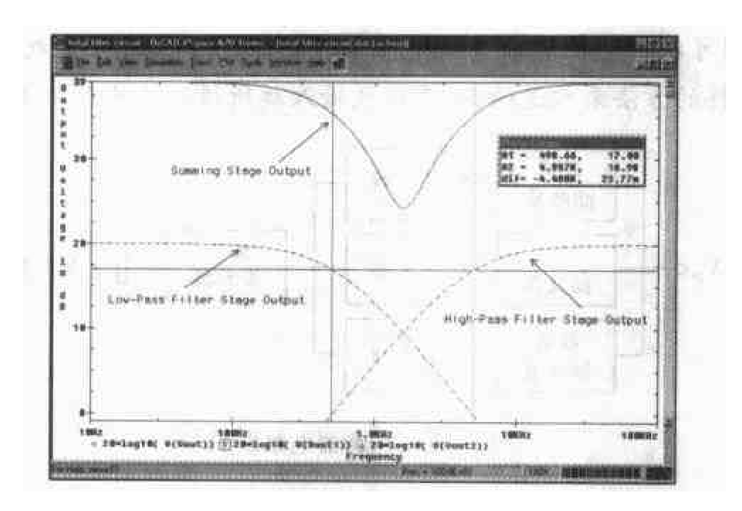


图 16.42 低通和高通滤波器组合后的频率响应仿真结果

16.9 小结与复习

- 谐振指的是这样一种情况：固定幅度的正弦激励函数在谐振时产生最大的幅度响应。
- 当电路发生谐振时，其输入端的电压和电流同相。
- 网络的品质因数正比于一个周期内网络所存储的最大能量除以它消耗的能量。
- 在半功率频率上，电路的响应函数的幅度为最大值的 $1/\sqrt{2}$倍。
- 谐振电路的带宽定义为上下半功率频率的差。
- 高 Q 电路指的是品质因数≥ 5 的谐振电路。
- 对于高 Q 电路，每个半功率频率与谐振频率的距离大约等于带宽的一半。
- 串联谐振电路的特征是其谐振时的阻抗很低，而并联谐振电路的特征是其谐振时的阻抗很高。
- 如果 $R_p = R_s(1+Q^2)$且 $X_p = X_s(1+Q^{-2})$，则串联谐振电路与并联谐振电路等效。
- 采用便于计算但不符合实际的元件值通常会使得设计更容易，然后对网络的传递函数进行幅度缩放和频率缩放，以得到符合实际情况的元件值。
- 使用波特图，可以根据传递函数的零极点快速画出其大致的形状。
- 四种基本的滤波器类型为低通、高通、带通和带阻。
- 无源滤波器只由电阻、电容和电感构成，而有源滤波器则使用运放或者其他有源元件。

习题

1. 某并联 RLC 电路的参数值为 $R = 1\ \text{k}\Omega$, $C = 47\ \mu\text{F}$, $L = 11\ \text{mH}$。(a)计算 Q_0；(b)求谐振频率(单位为 Hz)；(c)如果该电路由 1 mA 的正弦稳态电流源所激励，画出电压响应随着频率变化的曲线。
2. 某并联 RLC 谐振电路的 Q_0 值为 200。已知其中两个元件参数，求另一个参数的值：(a) $R = 1\ \Omega$, $C = 1\mu\text{F}$；(b) $L = 12\ \text{fH}$, $C = 2.4\ \text{nF}$；(c) $R = 121.7\ \text{k}\Omega$, $L = 100\ \text{pH}$。
3. 变容二极管是一种可变电抗的半导体器件，通过给它提供偏置电压来改变其电抗。其

品质因数可以用下式表示[①]：

$$Q \approx \frac{\omega C_j R_p}{1+\omega^2 C_j^2 R_p R_s}$$

其中 C_j 为结电容(与施加给该器件的电压有关)，R_s 为该器件的串联电阻，R_p 为其等效的并联电阻。(a) 如果电压为 1.5 V 时，$C_j = 3.77$ pF，$R_p = 1.5$ MΩ，$R_s = 2.8$ Ω，画出品质因数随 ω 变化的曲线；(b)对 Q 求导，求出 ω_0 及 Q_{max}。

4. 求出下列物体的 Q 值：(a)乒乓球；(b)硬币；(c)这本教材。请给出测量的条件以及你的测量结果，包括用求平均，或者其他统计分析方法所得出的结果。
5. 某并联谐振电路的参数值为 $\alpha = 80$ Np/s，$\omega_d = 1\,200$ rad/s。如果 $\mathbf{s} = -2\alpha + j\omega_d$ 时阻抗的幅度为 400 Ω，求 Q_0，R，L 和 C 的值。
6. 求图 16.43 所示的两端点网络的谐振频率。

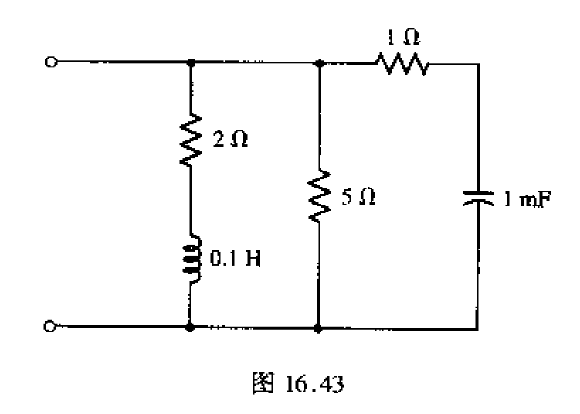


图 16.43

7. 对于图 16.1 所示电路，$R = 1$ MΩ，$L = 1$ H，$C = 1$ μF，$\mathbf{I} = 10\underline{/0°}$ μA。(a)求 ω_0 和 Q_0；(b)画出 $|\mathbf{V}|$ 随着 ω 变化的曲线，$995 < \omega < 1\,005$ rad/s。
8. 对于图 16.44 所示网络，求(a)谐振频率 ω_0；(b)$\mathbf{Z}_{in}(j\omega_0)$。
9. 某并联谐振电路的阻抗的极点为 $\mathbf{s} = -50 \pm j1\,000\ \mathrm{s}^{-1}$，零点为原点。如果 $C = 1$ μF；(a)求 L 和 R；(b)求 $\omega = 1\,000$ rad/s 时 $\mathbf{Z}$ 的值。
10. 设计一个用于接收调幅广播的并联谐振电路，用可变电感器进行调谐，调谐范围可以覆盖调幅广播的频带，即 535 kHz ~ 1 605 kHz，在频带的一端 Q_0 值为 45，在整个频带内 $Q_0 \leqslant 45$。设 $R = 20$ kΩ，求 C，L_{min} 和 L_{max} 的值。
11. (a)求图 16.45 所示网络的 $\mathbf{Y}_{in}$；(b)求该网络的 ω_0 和 $\mathbf{Z}_{in}(j\omega_0)$。

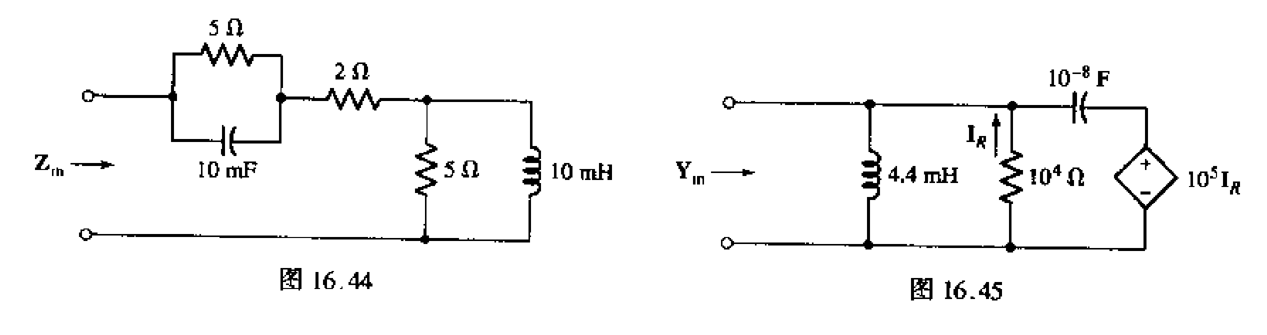


图 16.44　　　　图 16.45

① S. M. Sze, *Physics of Semiconductor Devices*, 2d ed., p. 116, John Wiley & Sons, New York, 1981.

12. 某并联谐振电路，$\omega_0 = 100$ rad/s，$Q_0 = 80$，$C = 0.2\ \mu$F。(a)求 R 和 L 的值；(b)采用近似的方法画出 $|\mathbf{Z}|$ 随着 ω 变化的曲线。

13. 某并联谐振电路，$\omega_1 = 103$ rad/s，$\omega_2 = 118$ rad/s，$|\mathbf{Z}(j105)| = 10\ \Omega$，使用精确的表达式求出 R、L 和 C 的值。

14. 某并联谐振电路，$\omega_0 = 30$ krad/s，$Q_0 = 10$，$R = 600\ \Omega$。(a)求出其带宽；(b)求出当 $\omega = 28$ krad/s 时 N 的值；(c)使用近似关系式求 $\mathbf{Z}_{in}(j28\,000)$；(d)求 $\mathbf{Z}_{in}(j28\,000)$的精确值；(e)求出在 28 krad/s 处用近似方法计算出的 $|\mathbf{Z}_{in}|$ 和 ang $\mathbf{Z}_{in}$的误差百分率。

15. 某并联谐振电路的谐振频率为 400 Hz，相应的 $Q_0 = 8$，$R = 500\ \Omega$。如果该电路的输入电流为 2 mA，用近似方法求出下列情况下该电流的频率：(a)该电路两端的电压幅度为 0.5 V；(b)流过电阻的电流幅度为 0.5 mA。

16. 某并联谐振电路，$\omega_0 = 1$ Mrad/s，$Q_0 = 10$。设 $R = 5$ kΩ，求(a) L；(b)使 $|\mathbf{Z}_{in}| = 2$ kΩ 的频率且该频率大于 ω_0；(c)使 $\mathbf{Z}_{in} = -30°$的频率。

17. 使用合适的近似方法对图 16.46 所示电路进行近似，(a)求 ω_0；(b)计算谐振时 $\mathbf{V}_1$ 的值；(c)计算比谐振频率大 15 krad/s 时 $\mathbf{V}_1$ 的值。

18. (a)根据谐振的定义，求出图 16.47 所示网络的 ω_0；(b)求 $\mathbf{Z}_{in}(j\omega_0)$。

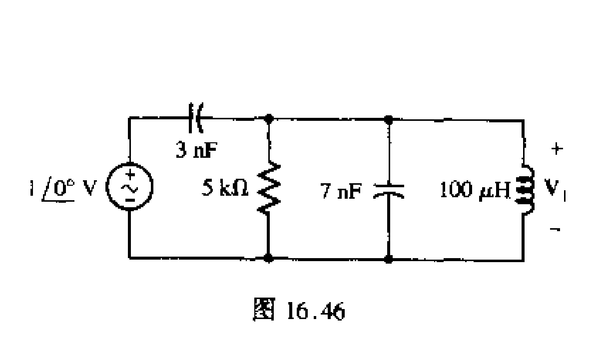


图 16.46

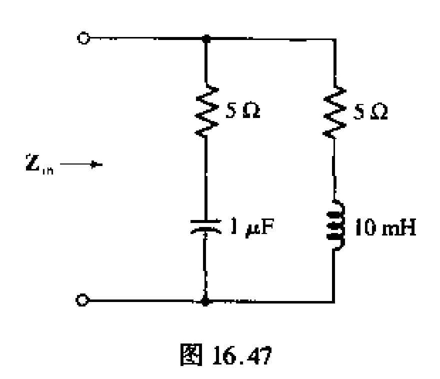
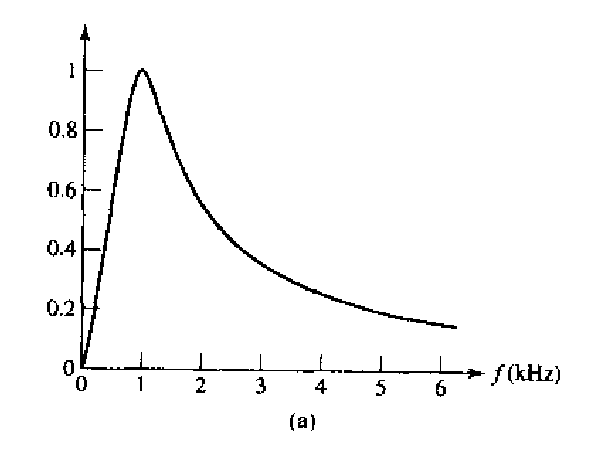


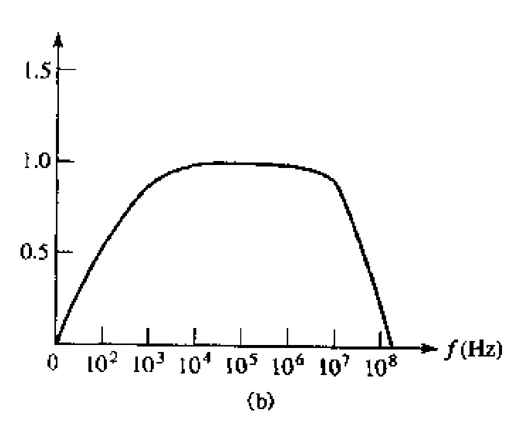
图 16.47

19. 某并联谐振电路，$f_0 = 1\,000$ Hz，$Q_0 = 40$，$|\mathbf{Z}_{in}(j\omega_0)| = 2$ kΩ。使用近似关系式求(a) 1 010 Hz时 $\mathbf{Z}_{in}$的值；(b)使用近似公式计算时，误差足够小的频率范围。

20. 求图 16.48 所示的每个响应曲线的带宽。



(a)



(b)

图 16.48

21. (a)使用近似方法绘制出图 16.49 所示电路中 $|\mathbf{V}_{out}|$ 随 ω 变化的曲线；(b)求出 $\omega = 9$ rad/s时 $\mathbf{V}_{out}$ 的精确值。
22. 某串联谐振网络由一个 50 Ω 电阻、一个 4 mH 电感和一个 0.1 μF 的电容组成。计算(a)ω_0；(b)f_0；(c)Q_0；(d)$\mathcal{B}$；(e)ω_1；(f)ω_2；(g)45 krad/s 时 $\mathbf{Z}_{in}$ 的值；(h)45 krad/s 时电容的阻抗幅度与电阻的阻抗幅度之比。
23. 求出图 16.50 中的 $\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s})$，然后求(a)$\omega_0$；(b)$Q_0$。

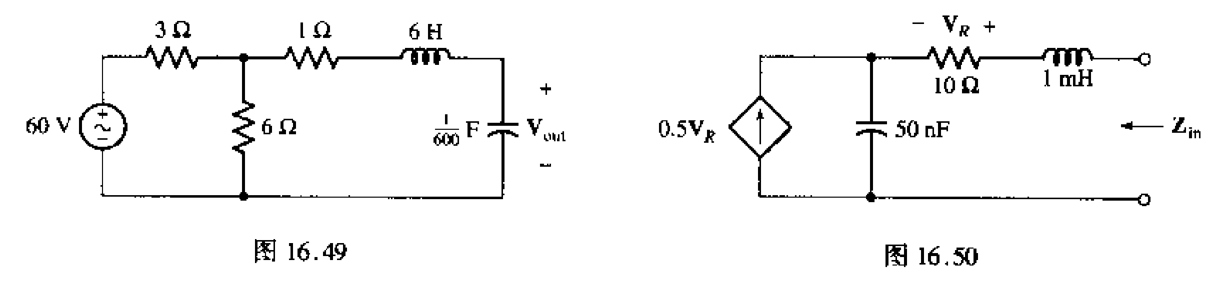


图 16.49　　图 16.50

24. 考察图 16.51 所示电路，注意电压源的幅度。现在假定如果确实在实验室里建立了这个电路，你能否将手放到电容的两端？画出 $|\mathbf{V}_C|$ 随 ω 变化的曲线来验证你的回答。
25. 某串联谐振电路，$f_0 = 500$ Hz，$Q_0 = 10$，谐振时 $X_L = 500\ \Omega$。(a)求 R，L 和 C 的值；(b)如果用 $\mathbf{V}_s = 1\angle 0°$ V 的电源与之串联，求频率分别为 $f = 450$ Hz，500 Hz 和 550 Hz 时 $|\mathbf{V}_C|$ 的精确值。
26. 一个由三个元件组成的网络的输入阻抗有两个极点，分别为 $\mathbf{s} = 0$ 和无穷大，还有一对零点 $\mathbf{s} = -20\,000 \pm j80\,000\ \mathrm{s}^{-1}$。如果 $\mathbf{Z}_{in}(-10\,000) = -20 + j0\ \Omega$，求这三个元件的值。
27. 对图 16.52 所示的网络进行合理近似，并求出 ω_0，Q_0，$\mathcal{B}$，$\mathbf{Z}_{in}(j\omega_0)$ 和 $\mathbf{Z}_{in}(j99\,000)$ 的值。

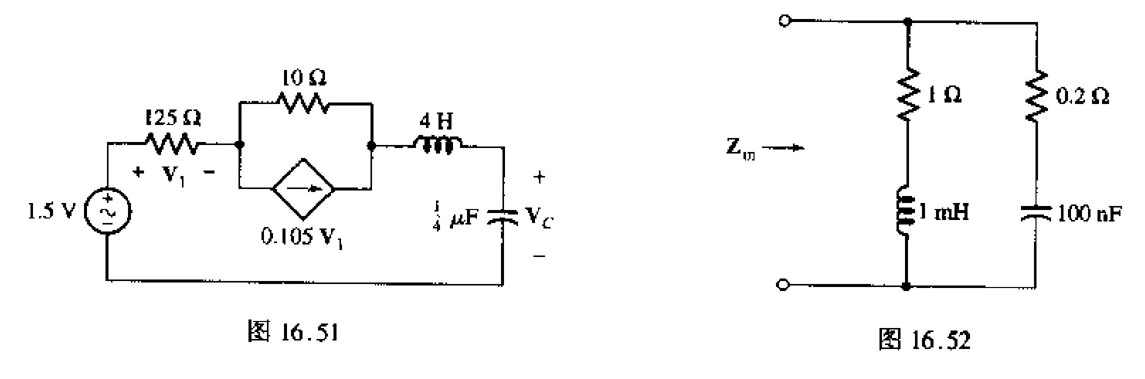


图 16.51　　图 16.52

28. 在图 16.52 所示的网络的输入端接上一个多大的电阻后可以使该网络的 Q_0 等于 50？
29. 参见图 16.53 所示的网络，使用近似方法求出 $\mathbf{Z}_{in}$ 的最小幅度值及其对应的频率。
30. 对于图 16.54 所示电路：(a)画出 $|\mathbf{V}|$ 随 ω 变化的近似响应曲线；(b)计算当 $\omega = 50$ rad/s时 $\mathbf{V}$ 的精确值。
31. 对于图 16.55 所示电路：(a)使用近似方法计算 $\omega = 2\,000$ rad/s 时 $|\mathbf{V}_x|$ 的值；(b)求 $|\mathbf{V}_x(j2\,000)|$ 的精确值。

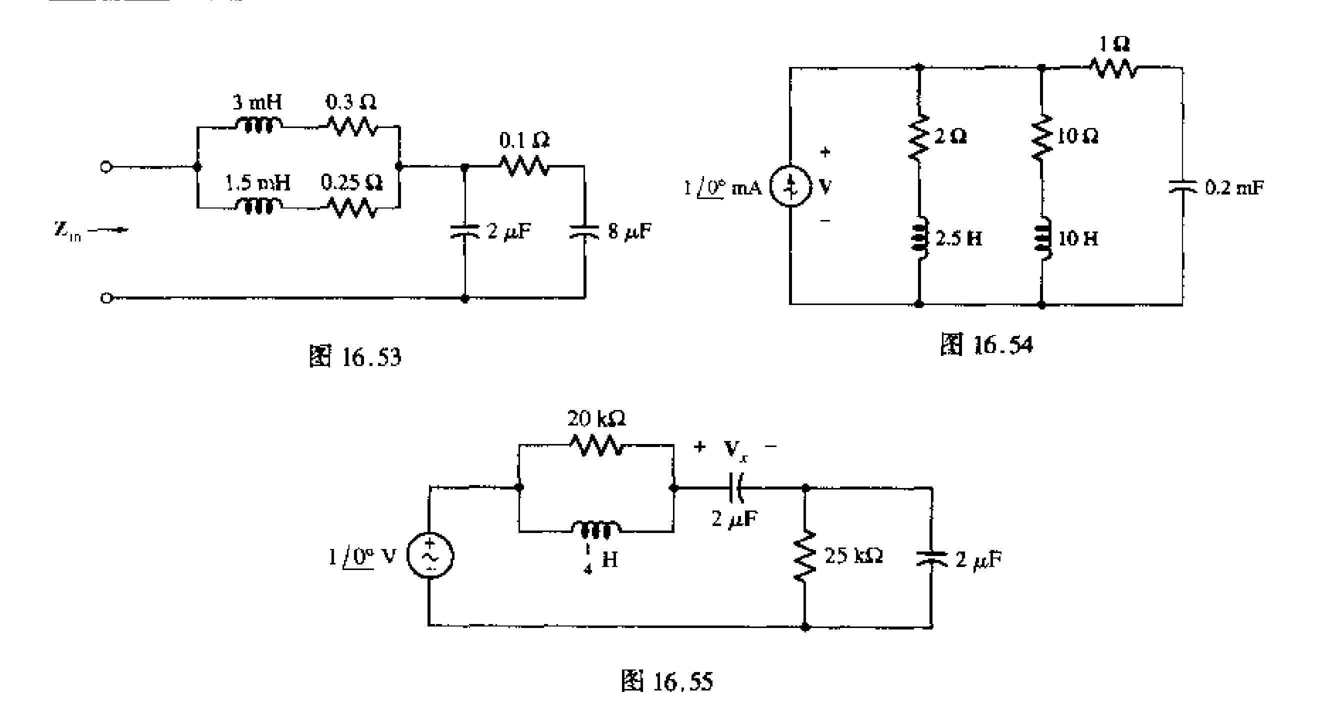


图 16.53

图 16.54

图 16.55

32. 图 16.56(a)所示的滤波器的响应曲线如图 16.56(b)所示。(a)对滤波器进行缩放,使得当电源内阻为 50 Ω,负载为 50 Ω 时,其截止频率为 20 kHz;(b)画出缩放后的响应曲线。

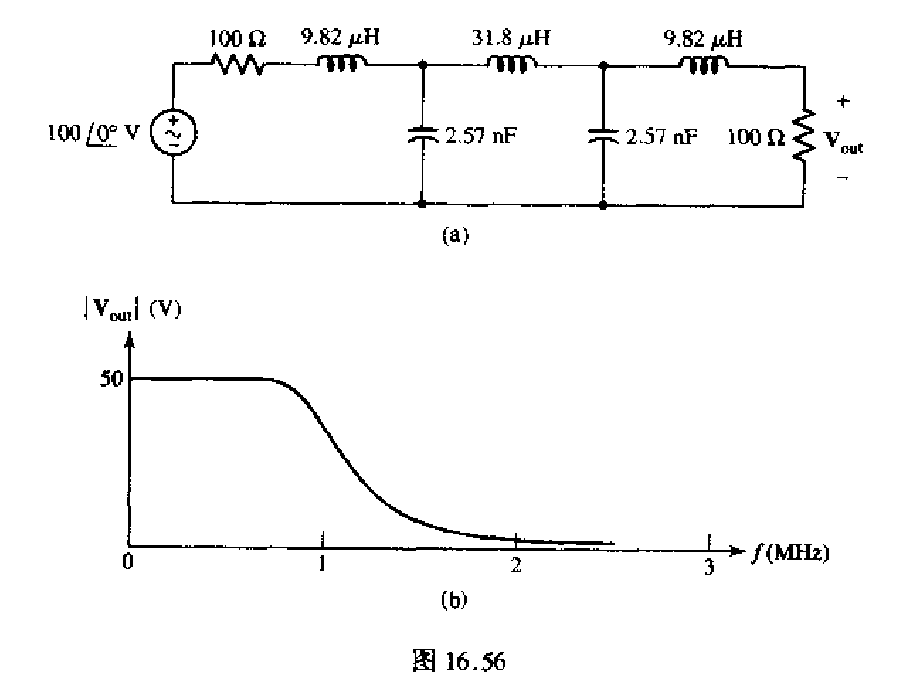


图 16.56

33. (a)求出图 16.57 所示网络的 $\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s})$;(b)对 $\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s})$进行缩放,缩放因子为 $K_m=2$, $K_f=5$,写出缩放后 $\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s})$的表达式;(c)对网络中的元件进行缩放,缩放因子为 $K_m=2$, $K_f=5$,并画出缩放后的网络。

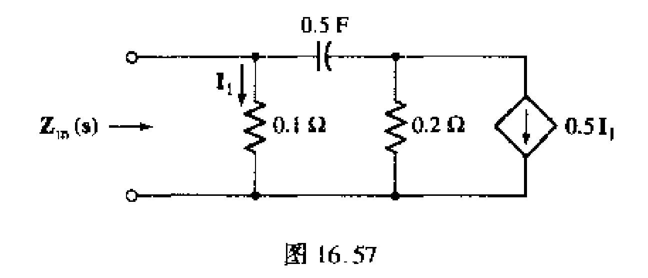


图 16.57

34. (a)使用合适的近似方法求出图 16.58 所示电路的 ω_0 和 Q_0;(b)对电源右端的网络进行缩放,使其谐振频率为 1 Mrad/s;(c)求出缩放后的电路的 ω_0 和B。

35. (a)对图 16.59 所示网络进行缩放,缩放因子为 $K_m = 250$, $K_f = 400$,画出缩放后的网络;(b)求缩放后的网络在 $\omega = 1$ krad/s 时的戴维南等效电路。

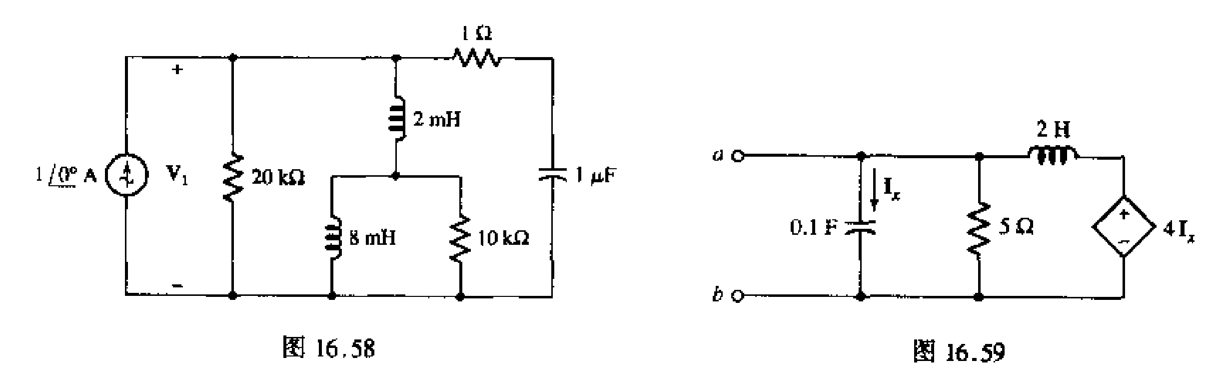


图 16.58　　图 16.59

36. 某网络由理想 R, L 和 C 组成,在其输入端接上正弦电流源 $\mathbf{I}_s$,其输出端电压为 $\mathbf{V}_{out}$。如果 $\mathbf{I}_s = 1\,\underline{/0^\circ}$ A, $\omega = 50$ rad/s,则 $\mathbf{V}_{out} = 30\,\underline{/25^\circ}$ V。求出在下列条件下 $\mathbf{V}_{out}$的值,如果不可能求出 $\mathbf{V}_{out}$的值,只需说明不能确定(OTSK[1])即可。(a)$\mathbf{I}_s = 2\,\underline{/0^\circ}$ A, $\omega = 50$ rad/s;(b) $\mathbf{I}_s = 2\,\underline{/40^\circ}$ A, $\omega = 50$ rad/s;(c) $\mathbf{I}_s = 2\,\underline{/40^\circ}$ A, $\omega = 200$ rad/s;(d)对网络进行缩放,缩放因子为 $K_m = 30$, $\mathbf{I}_s = 2\,\underline{/40^\circ}$ A, $\omega = 50$ rad/s;(e) $K_m = 30$, $K_f = 4$, $\mathbf{I}_s = 2\,\underline{/40^\circ}$ A, $\omega = 200$ rad/s。

37. 求 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$为下列情况时 H_{dB}的值:(a)0.2;(b)50;(c)$12/(\mathbf{s}+2)+26/(\mathbf{s}+20)$, $\mathbf{s}=j10$。求当 H_{dB}等于下列值时$|\mathbf{H}(\mathbf{s})|$的值:(d)37.6 dB;(e)−8 dB;(f)0.01 dB。

38. 画出幅度波特图(a)$20(\mathbf{s}+1)/(\mathbf{s}+100)$;(b)$2\,000\mathbf{s}(\mathbf{s}+1)/(\mathbf{s}+100)^2$;(c)$\mathbf{s}+45+200/\mathbf{s}$。(d)用 MATLAB 验证你的解答。

39. 对于图 16.60 所示电路,画出传输函数 $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_C/\mathbf{I}_s$ 的幅度波特图和相位波特图。

40. (a)画出 $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 5\times10^8\mathbf{s}(\mathbf{s}+100)/[(\mathbf{s}+20)(\mathbf{s}+1\,000)^3]$的幅度波特图,取原点为 $\omega = 1$, $H_{dB} = 0$;(b)写出波特图上所有转角点和所有交点的坐标;(c)求与(b)中每个转角频率对应的 $20\log|\mathbf{H}(j\omega)|$的精确值。

41. (a)画出 $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 5\times10^8\mathbf{s}(\mathbf{s}+100)/[(\mathbf{s}+20)(\mathbf{s}+1\,000)^3]$的相位波特图,取原点为 $\omega = 1$, ang $= 0^\circ$;(b)写出相位波特图上所有斜率发生变化的点的坐标;(c)求与(b)中每个

[1] Only The Shadow Knows.

转角频率对应的 ang $\mathbf{H}(j\omega)$的精确值。

42. (a)画出传输函数 $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 1 + 20/\mathbf{s} + 400/\mathbf{s}^2$ 的幅度波特图；(b)当 ω 分别为 5 rad/s 和 100 rad/s 时，将波特图与实际值做比较；(c)用 MATLAB 验证你的波特图。

43. (a)如图 16.61 所示电路，求 $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_R/\mathbf{V}_s$；(b)画出 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$的幅度波特图和相位波特图；(c)求 $\omega = 20$ rad/s 时 H_{dB}和 ang $\mathbf{H}(j\omega)$的精确值。

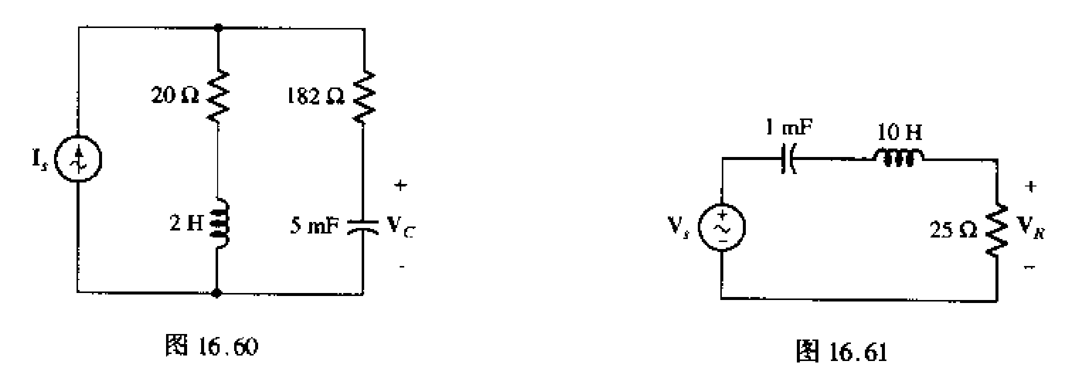


图 16.60

图 16.61

44. 如图 16.62 所示网络，画出其传输函数 $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$的幅度波特图。

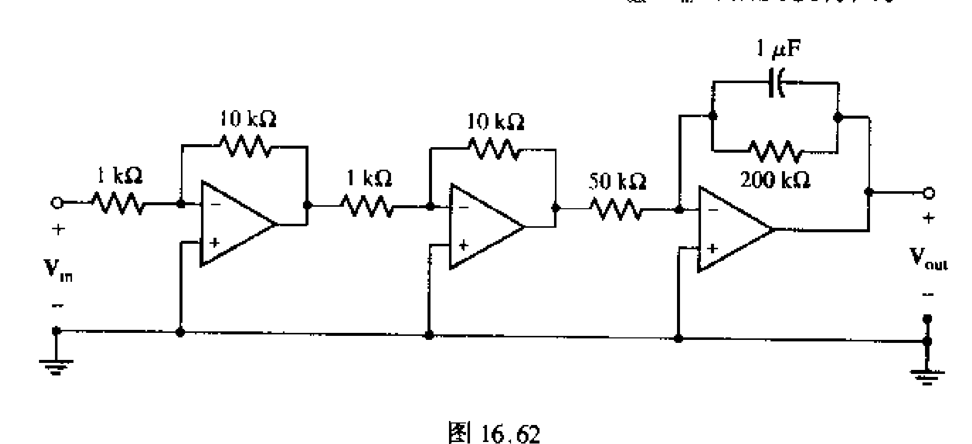


图 16.62

45. 对于图 16.63 所示网络：(a)求 $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$；(b)画出$H_{dB}$的幅度波特图；(c)画出 $\mathbf{H}(j\omega)$的相位波特图。

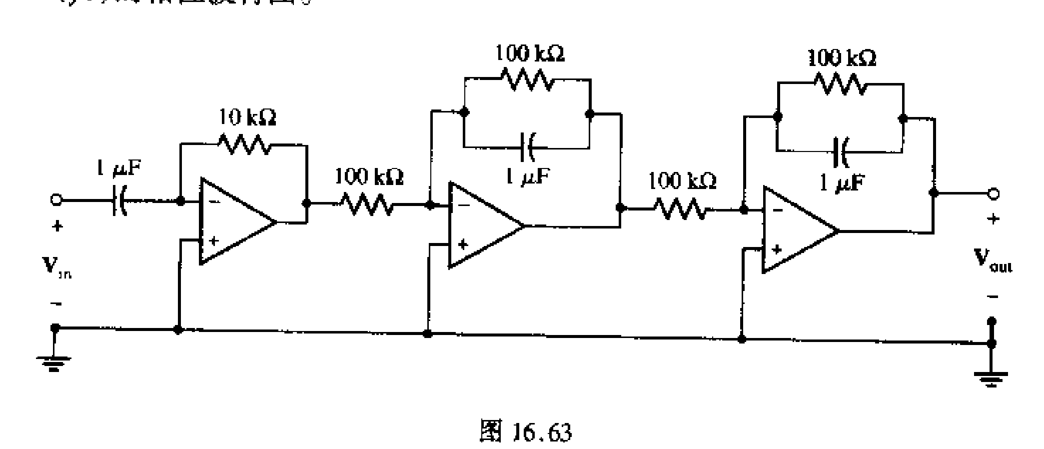


图 16.63

46. 宽吻海豚(bottlenose dolphin)发出的声音频率范围大约是 250 Hz ~ 150 kHz。其中，250 Hz ~ 50 kHz的频率被认为主要用于“社会交往”，而高于 40 kHz 的“滴答声”被认为

主要用于回声定位。设计一个放大电路，用来有选择性地放大海豚的“交谈”。用麦克风来接收海豚的声音，可以将麦克风看做是一个幅度峰值小于 15 mV 的正弦电压源与一个 1 Ω 电阻串联的模型，传到阻值为 1 kΩ 的耳机上的放大后电压的峰值必须接近 1 V。

47. 设计一个滤波器电路，滤去人耳听得见的整个频率范围(20 Hz ~ 20 kHz)，而让其他频率的信号通过。用 PSpice 验证你的设计。

48. 设计一个滤波器电路，滤去频率大于或等于 1 kHz 的信号，并用 PSpice 验证你的设计。

49. 一种对高频信号非常敏感的麦克风可以用来检测某些类型的喷气发动机即将发生的故障，不过它也会对由襟翼和副翼的液压系统产生的低频噪声有响应，从而导致虚警。设计一个滤波器以除去噪声，同时有选择性地放大高频信号，要求放大倍数不小于 100。已知低频噪声信号的能量峰值出现在 20 Hz 附近，频率为 1 kHz 时下降到最大值的 1%；发动机故障信号的起始频率约为 25 kHz。

50. 完成“实际应用”一节中所讨论的设计。(a)首先设计出合适的中音级；(b)调节反馈电阻的值，对你所设计的电路的频率响应进行仿真。

51. 尽管人耳所能听到的频率范围普遍认为是 20 Hz ~ 20 kHz，但许多电话系统的带宽却限制在 3 kHz 内。设计一个滤波器，将 20 kHz 带宽的语音转换为 3 kHz“电话带宽”的语音。用最大电压为 150 mV，串联电阻几乎为零的麦克风作为输入，输出设备为一个 8 Ω 的扬声器。要求语音的放大倍数至少为 10。用 PSpice 验证你的设计。

52. 设计一个电路，除去从天线接收的信号中 $50n$ Hz 的频率成分，其中 n 为整数，取值范围为 1 ~ 4。图 16.37 给出了一个好的“陷波”滤波器(也就是说“陷去”某种频率成分)结构，不过，现在将输出取为电感和电容的串联组合上的电压而不是电阻上的电压。可以将天线信号看做是幅度峰值为 1 V 的时变电压源，其串联电阻为零。

53. 监视设备的一个敏感部分受到 60 Hz 工频的负面影响，引入的噪声对输入的信号造成了污染。由于该信号的特征决定了不能使用任何类型的低通、高通或者带通滤波器来除去噪声。设计一个“陷波”滤波器，有选择性地除去从该监视设备输入端引入的任何 60 Hz 的信号。假定该设备的戴维南等效电阻为无穷大。图 16.37 给出了一个好的“陷波”滤波器结构，不过，现在将输出取为电感和电容的串联组合上的电压而不是电阻上的电压。

第 17 章　双端口网络

本章要点：

- 学习单端口网络和双端口网络之间的差别
- 掌握描述网络的 y,z,h 和 t 参数
- y,z,h 和 t 参数之间的变换
- 使用网络参数进行电路分析，包括级联网络

17.1 引言

一个网络一般包括两对端子，其中一对称为“输入端”，另一对称为“输出端”，这是电子系统、通信系统、自动控制系统、传输和分配系统以及其他许多系统中非常重要的结构单元，电子信号或者能量从输入端进入，经过网络的作用后，在输出端输出。输出端子可能会接到下一个网络的输入端子上。在第 5 章中已经学习了戴维南等效电路和诺顿等效电路，从中可以知道并不总是需要了解电路的每一部分的工作细节，本章将把这个概念拓展到甚至不知道整个电路内部的工作细节。只需要知道网络是线性的，并且可以测出电压和电流，后面将很快看到，可以用一套参数来描述这样的网络，并且可以估计该网络和其他网络是如何相互作用的。

17.2 单端口网络

信号可以通过一对端子进入或者离开网络，这样的端子对称为端口(port)，只有一个这样的端子对的网络称为单端口网络，或者简称为单端口。不能与单端口的任何内部节点进行连接，因此对于图 17.1(a)所示的单端口，i_a 必然等于 i_b。如果一个网络含有不止一个端口，则这样的网络称为多端口网络。本章主要介绍双端口网络，如图 17.1(b)所示，对于双端口网络，每个端口的两个端子上的电流必须相等，即对于图 17.1(b)所示的网络，$i_a = i_b$，$i_c = i_d$。如果要使用本章介绍的方法，那么必须将源和负载直接连接到端口的两个端子上，换句话说，每个端口只能连接一个单端口网络或者多端口网络的一个端口。比如，不能将任何设备接到图 17.1(b)所示网络的 a 端子和 c 端子之间。在分析双端口网络时，可以使用一般的回路分析和节点分析方法。

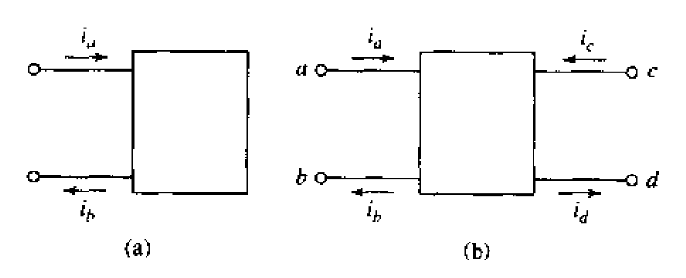


图 17.1　(a)单端口网络；(b)双端口网络

双端口网络(或者简称为双口)的分析方法突出了网络端子上电流和电压的关系,并隐藏了网络内部的电流和电压的细节。首先来熟悉许多重要的参数及其在简化和系统化线性双端口网络分析中的用法。

使用附录 B 介绍的通用网络符号和缩写术语,可以非常方便地分析单端口和双端口网络。对于一个无源网络,可以写出下列回路方程:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{12}\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_{13}\mathbf{I}_3 + \cdots + \mathbf{Z}_{1N}\mathbf{I}_N &= \mathbf{V}_1 \\
\mathbf{Z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{22}\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_{22}\mathbf{I}_3 + \cdots + \mathbf{Z}_{2N}\mathbf{I}_N &= \mathbf{V}_2 \\
\mathbf{Z}_{31}\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{32}\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_{33}\mathbf{I}_3 + \cdots + \mathbf{Z}_{3N}\mathbf{I}_N &= \mathbf{V}_3 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathbf{Z}_{N1}I_1 + \mathbf{Z}_{N2}I_2 + \mathbf{Z}_{N3}\mathbf{I}_3 + \cdots + \mathbf{Z}_{NN}\mathbf{I}_N &= \mathbf{V}_N
\end{aligned}
\tag{17.1}
$$

则每个电流的系数为一个阻抗 $\mathbf{Z}_{ij}(\mathbf{s})$,而电路的行列式或者说系数的行列式为:

$$
\Delta_z = \begin{vmatrix}
\mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} & \mathbf{Z}_{13} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N} \\
\mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{33} & \mathbf{Z}_{23} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N} \\
\mathbf{Z}_{31} & \mathbf{Z}_{22} & \mathbf{Z}_{23} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\mathbf{Z}_{N1} & \mathbf{Z}_{N2} & \mathbf{Z}_{N3} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN}
\end{vmatrix}
\tag{17.2}
$$

上面的式子蕴含了回路的个数为 N,每个方程的电流按照下标顺序排列,方程的顺序与电流的顺序一致。同时也假定采用了 KVL,那么每个 $\mathbf{Z}_{ii}$ 项($\mathbf{Z}_{11}, \mathbf{Z}_{22}, \cdots, \mathbf{Z}_{NN}$)的符号为正,而 $\mathbf{Z}_{ij}$($i \neq j$)的符号则可正可负,根据给 $\mathbf{I}_i$ 和 $\mathbf{I}_j$ 指定的参考方向而定。

如果网络中含有受控源,那么回路方程中的系数可能既不是电阻也不是阻抗,即使这样,也将电路的行列式记为 $\Delta\mathbf{z}$。

对于单端口网络,使用子式符号(见附录 B)可以使其输入(或者说策动点)阻抗的表达式更为简练。也可以将这个结果应用于双端口网络中,前提条件是双端口网络的其中一个端口通过一个无源阻抗接起来,包括开路和短路的情况。

假定图 17.2(a)所示的单端口网络完全由无源元件和受控源组成,同时假定它为线性。其端口接了一个理想电压源 $\mathbf{V}_1$,电源的电流已经在回路 1 中标出。使用克莱姆(Cramer)法则,有:

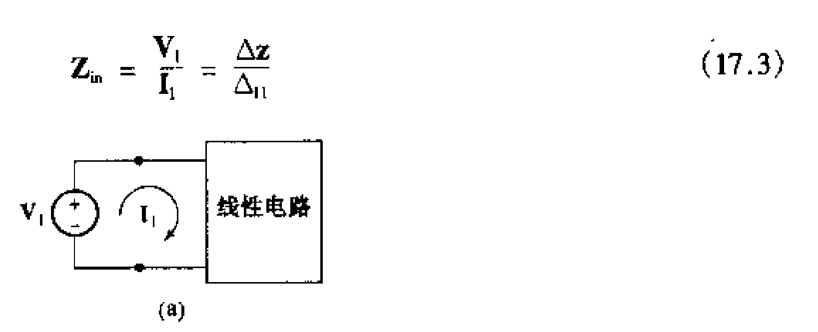
$$
\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix}
\mathbf{V}_1 & \mathbf{Z}_{12} & \mathbf{Z}_{13} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N} \\
0 & \mathbf{Z}_{22} & \mathbf{Z}_{23} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N} \\
0 & \mathbf{Z}_{22} & \mathbf{Z}_{33} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \mathbf{Z}_{N2} & \mathbf{Z}_{N3} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN}
\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}
\mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} & \mathbf{Z}_{13} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N} \\
\mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} & \mathbf{Z}_{23} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N} \\
\mathbf{Z}_{31} & \mathbf{Z}_{32} & \mathbf{Z}_{33} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\mathbf{Z}_{N1} & \mathbf{Z}_{N2} & \mathbf{Z}_{N3} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN}
\end{vmatrix}}
$$

或者,简单表示为:

$$
\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1\Delta_{11}}{\Delta\mathbf{z}}
$$

因此:

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \frac{\Delta \mathbf{z}}{\Delta_{11}} \tag{17.3}$$



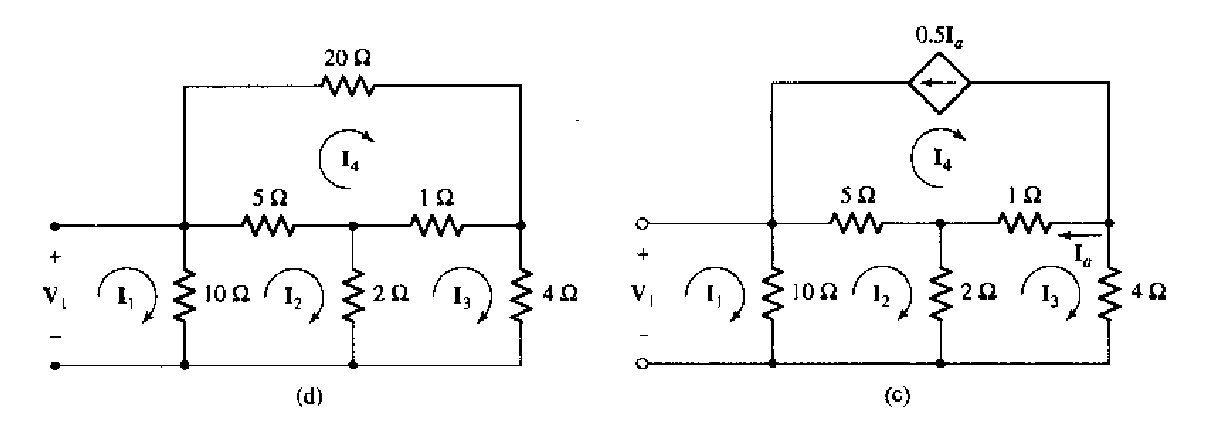


图 17.2 (a)理想电压源 $\mathbf{V}_1$ 连接到不含独立源的线性单端口网络中,$\mathbf{Z}_{in} = \Delta \mathbf{z}/\Delta_{11}$;(b)阻性单端口网络的例子;(c)含有受控源的单端口网络的例子

例题 17.1 计算图 17.2(b)所示的单端口阻性网络的输入阻抗

首先指定网孔电流如图所示,然后写出相应的网孔方程:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_1 &= 10\mathbf{I}_1 - 10\mathbf{I}_2 \\
0 &= -10\mathbf{I}_1 + 17\mathbf{I}_2 - 2\mathbf{I}_3 - 5\mathbf{I}_4 \\
0 &= -2\mathbf{I}_2 + 7\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_4 \\
0 &= -5\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3 + 26\mathbf{I}_4
\end{aligned}$$

则电路的行列式为:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 10 & -10 & 0 & 0 \\ -10 & 17 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & 26 \end{vmatrix}$$

其值为 9 680 Ω^4。不考虑第一行和第一列,有:

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 17 & -2 & -5 \\ -2 & 7 & -1 \\ -5 & -1 & 26 \end{vmatrix} = 2\,778\ \Omega^3$$

因此,根据式(17.3)可求得输入阻抗为:

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{9\,680}{2\,778} = 3.485\ \Omega$$

附录 B 给出了采用克莱姆法则求解联立方程组的简单教程。

练习

17.1 对于图 17.3 所示的网络,分别用下列三种方式将其某两个端子断开,使之成为一个单端口网络,分别求出这三种情况下的输入阻抗:(a)断开 a 和 a';(b)断开 b 和 b';(c)断开 c 和 c'。

答案:9.47 Ω;10.63 Ω;7.58 Ω

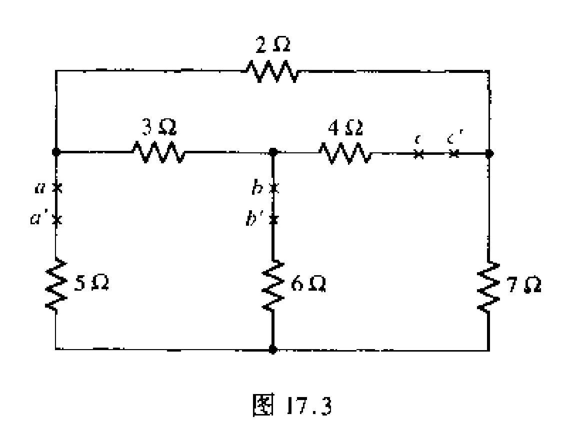


图 17.3

例题 17.2 求图 17.2(c)所示网络的输入阻抗

列出含有 4 个网孔电流的 4 个网孔方程:

$$\begin{aligned} 10\mathbf{I}_1 - 10\mathbf{I}_2 \qquad\qquad &= \mathbf{V}_1 \\ -10\mathbf{I}_1 + 17\mathbf{I}_2 - 2\mathbf{I}_3 - 5\mathbf{I}_4 &= 0 \\ -2\mathbf{I}_2 + 7\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_4 &= 0 \end{aligned}$$

以及:

$$\mathbf{I}_4 = -0.5\mathbf{I}_a = -0.5(\mathbf{I}_4 - \mathbf{I}_3)$$

或

$$-0.5\mathbf{I}_3 + 1.5\mathbf{I}_4 = 0$$

因此可以得到:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 10 & -10 & 0 & 0 \\ -10 & 17 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1.5 \end{vmatrix} = 590\ \Omega^3$$

而

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 17 & -2 & -5 \\ -2 & 7 & -1 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{vmatrix} = 159\ \Omega^2$$

于是:

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{590}{159} = 3.711\ \Omega$$

也可以用熟悉的方法列出节点方程，最后可以得到输入导纳：

$$\mathbf{Y}_{in} = \frac{1}{\mathbf{Z}_{in}} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{11}} \tag{17.4}$$

其中 Δ_{11} 现在表示 Δ_Y 的子式。

练习

17.2 对于图 17.4 所示电路，列出其节点方程组，计算 Δ_1，然后求出：(a)从节点 1 和参考节点看过去的输入阻抗；(b)从节点 2 和参考点看过去的输入阻抗。

答案：10.68 S；13.16 S

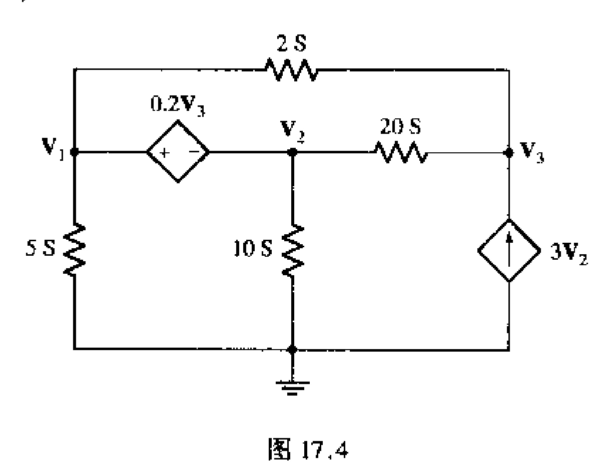


图 17.4

例题 17.3 再次使用式(17.4)求图 17.2(b)所示网络的输入阻抗

对于图 17.2(b)所示电路，从左到右依次设节点电压为 $\mathbf{V}_1$，$\mathbf{V}_2$ 和 $\mathbf{V}_3$，取底部的节点为参考点，可以列出系统的导纳矩阵为：

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} 0.35 & -0.2 & -0.05 \\ -0.2 & 1.7 & -1 \\ -0.05 & -1 & 1.3 \end{vmatrix} = 0.347\,3\ \text{S}^3$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 1.7 & -1 \\ -1 & 1.3 \end{vmatrix} = 1.21\ \text{S}^2$$

因此：

$$\mathbf{Y}_{in} = \frac{0.347\,3}{1.21} = 0.287\,0\ \text{S}$$

它对应于：

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{1}{0.287} = 3.484\ \Omega$$

考虑到舍入误差，这与前面求得的结果一致(计算过程中只取 4 位小数)。

本章后面的例题 7 和例题 8 给出了用运放来构造的单端口网络。这两个例题说明了可以从只含有电阻的无源网络中得到负电阻，同时说明了可以只用电阻和电容来模拟电感。

17.3 导纳参数

现在将注意力转到双端口网络上。假定以后的所有网络均由线性元件组成，并且不含有独立源，但可以含有受控源。对于一些特殊情况，还对网络给出了进一步的限制条件。

考虑图 17.5 所示的双端口网络，输入端口的电压和电流为 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{I}_1$，输出端口的电压和电流为 $\mathbf{V}_2$ 和 $\mathbf{I}_2$。上端导线的电流 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$ 的方向通常取为流入网络的方向(下端导线的电流方向则流出网络)。因为网络是线性的并且不包含任何独立源，因此可以将 $\mathbf{I}_1$ 看做是两个分量的叠加，其中一个由 $\mathbf{V}_1$ 引起，另一个由 $\mathbf{V}_2$ 引起，对于 $\mathbf{I}_2$ 也可以做类似的看待，于是可以列出下面的方程组：

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{y}_{11}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_2 \tag{17.5}$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{y}_{21}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_2 \tag{17.6}$$

其中的 $\mathbf{y}$ 只是比例常数，或者可以说到目前为止是未知系数。但是，必须清楚它们的量纲必为 A/V，或 S。因此，可以将它们称为 $\mathbf{y}$ 参数，由式(17.5)和式(17.6)所定义。

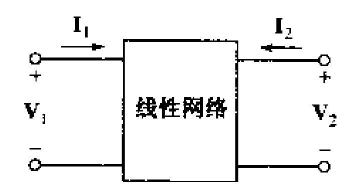


图 17.5　双端口电路模型，图中已经标出了端口电压和电流。该双端口电路由线性元件组成，还可能含有受控源，但不含任何独立源

$\mathbf{y}$ 参数以及本章将要定义的其他参数可以用矩阵简洁地表示。定义(2×1)的列矩阵 $\mathbf{I}$ 为：

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \tag{17.7}$$

(2×2)的 $\mathbf{y}$ 参数方阵为：

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} \tag{17.8}$$

以及(2×1)的列矩阵 $\mathbf{V}$ 为：

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \tag{17.9}$$

本书中用来表示矩阵的符号是标准的，但也可能很容易和前面表示相量的符号或者其他表示一般复数量的符号相混淆。但根据上下文，应该清楚地知道这些符号所代表的物理意义。

于是，可以写出矩阵方程 $\mathbf{I} = \mathbf{yV}$，或者：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

对右端的矩阵相乘，可以得到等价形式：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_2 \\ \mathbf{y}_{21}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

这两个(2 × 1)的矩阵必须相等,因此各对应元素必须相等,因此又得到定义式(17.5)和式(17.6)。

对 **y** 参数赋予物理意义的最有用但非正式的办法是通过直接观察式(17.5)和式(17.6)。比如,考虑式(17.5),如果令 $\mathbf{V}_2$ 为 0,那么可以看到 $\mathbf{y}_{11}$ 等于 $\mathbf{I}_1$ 与 $\mathbf{V}_1$ 的比值,因此可以将 $\mathbf{y}_{11}$ 看做是输出端短路($\mathbf{V}_2 = 0$)时输入端所测得的导纳。将 $\mathbf{y}_{11}$ 称为短路输入导纳,其中已经隐含了是对哪个端子进行的短接,不会引起混淆。另外,也可以将 $\mathbf{y}_{11}$ 称为输出端短路时,输入端所测得的阻抗的倒数,但是用导纳来描述显得更加直接一些。该参数的名称并不重要,相反地,对于式(17.5)和式(17.6)的条件,即加到该网络的条件更加有意义,当加到网络的条件确定以后,可以通过分析(或者对实际电路进行实验)直接得到这些参数。令 $\mathbf{V}_1 = 0$(输入端短路)或者 $\mathbf{V}_2 = 0$(输出端短路),可以将每个 **y** 参数表示为电流和电压的比值形式:

$$\mathbf{y}_{11} = \left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0} \tag{17.10}$$

$$\mathbf{y}_{12} = \left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{V}_1=0} \tag{17.11}$$

$$\mathbf{y}_{21} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0} \tag{17.12}$$

$$\mathbf{y}_{22} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{V}_1=0} \tag{17.13}$$

因为每个参数均为导纳,而且都是通过将输出端和输入端短路来得到,因此将 **y** 参数称为短路导纳参数。$\mathbf{y}_{11}$ 的专门名称为短路输入导纳,$\mathbf{y}_{22}$ 的专门名称为短路输出导纳,$\mathbf{y}_{12}$ 和 $\mathbf{y}_{21}$ 的专门名称为短路转移导纳。

例题 17.4 求出图 17.6(a)所示的阻性双端口网络的四个短路导纳参数

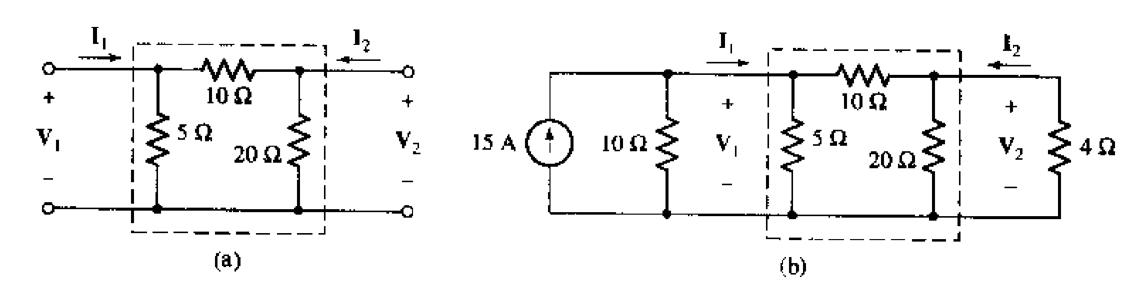


图 17.6 (a)阻性双端口网络;(b)在该阻性双端口网络两端分别接上单端口网络

使用式(17.10)到式(17.13)[这些公式可以直接从定义式(17.5)和式(17.6)得到],可以很容易得到这些参数。为了求出 $\mathbf{y}_{11}$,将输出端短路并求 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{V}_1$ 的比值,可以令 $\mathbf{V}_1 = 1$ V,那么 $\mathbf{y}_{11} = \mathbf{I}_1$。观察图 17.6(a),很明显,输入端电压为 1 V 并且输出端短路时,输入电流为 $\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right)$ A,即0.3 A。因此:

$$\mathbf{y}_{11} = 0.3\ \text{S}$$

为了求 $\mathbf{y}_{12}$，将输入端短路并在输出端接上 1 V 电压，这时，输入电流流过短路线并且 $\mathbf{I}_1 = -\frac{1}{10}$ A。因此：

$$\mathbf{y}_{12} = -0.1\ \text{S}$$

采用类似方法，可以得到：

$$\mathbf{y}_{21} = -0.1\ \text{S} \quad \mathbf{y}_{22} = 0.15\ \text{S}$$

因此，这个双端口网络可以用导纳参数方程描述为：

$$\mathbf{I}_1 = 0.3\mathbf{V}_1 - 0.1\mathbf{V}_2 \tag{17.14}$$

$$\mathbf{I}_2 = -0.1\mathbf{V}_1 + 0.15\mathbf{V}_2 \tag{17.15}$$

且

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.1 \\ -0.1 & 0.15 \end{bmatrix}$$

其实，没有必要通过式(17.10)到式(17.13)逐个去求这些参数，可以一次性地求出它们。

例题 17.5　给图 17.6(a)所示的网络指定节点电压 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$，并用它们表示出 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$

已知：

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{5} + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{10} = 0.3\mathbf{V}_1 - 0.1\mathbf{V}_2$$

以及：

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{10} + \frac{\mathbf{V}_2}{20} = -0.1\mathbf{V}_1 + 0.15\mathbf{V}_2$$

这两个方程与式(17.14)和式(17.15)是相同的，而且可以从中直接看出 4 个 $\mathbf{y}$ 参数。

练习

17.3　将 1 V 电压源和短路线置于图 17.1 所示电路的合适位置，求(a)$\mathbf{y}_{11}$；(b)$\mathbf{y}_{21}$；(c)$\mathbf{y}_{22}$；(d)$\mathbf{y}_{12}$。

答案：0.1192 S；−0.1115 S；0.1269 S；−0.1115 S

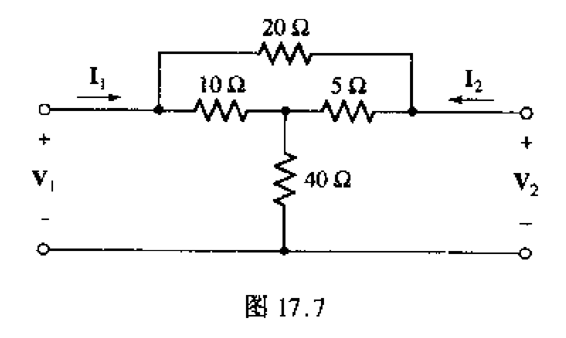


图 17.7

一般地，当只需要求出一个参数的时候，使用式(17.10)、式(17.11)、式(17.12)或式(17.13)简单一些。但是，在需要求出所有参数的时候，可以设定输入和输出节点电压为 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$，然后设定其他相对于参考节点的内部节点电压，然后求出一般解，这样会更简单一些。

为了说明如何使用这组公式，现在分别在两个端口上接上一个单端口网络。图 17.6(b) 所示的简单例子给出了将一个实际电流源接到输入端口，同时将一个阻性负载接到输出端的情形。这时，$\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{I}_1$ 必然存在与双端口网络无关的某种关系，这个关系可以仅根据外部电路求出。如果将 KCL 应用于(或者说列出一个节点方程)输入端，则有：

$$\mathbf{I}_1 = 15 - 0.1\mathbf{V}_1$$

对于输出端，使用欧姆定律得：

$$\mathbf{I}_2 = -0.25\mathbf{V}_2$$

将式(17.14)和式(17.15)中的 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$ 代入上面两个方程，可以得到：

$$15 = 0.4\mathbf{V}_1 - 0.1\mathbf{V}_2$$
$$0 = -0.1\mathbf{V}_1 + 0.4\mathbf{V}_2$$

从中可以解得：

$$\mathbf{V}_1 = 40\ \text{V} \qquad \mathbf{V}_2 = 10\ \text{V}$$

可以很容易地得到输出电流和输入电流：

$$\mathbf{I}_1 = 11\ \text{A} \qquad \mathbf{I}_2 = -2.5\ \text{A}$$

于是可以知道这个阻性双端口网络完整的端口特性。

对于这样一个简单的例子，并不能很明显地显示出双端口网络分析的优点，但很显然，对于一个更加复杂的双端口网络，一旦其 y 参数已经确定，那么，不管将端口接上什么样的网络，均可以很容易地知道双端口网络的特性。因为这时只需要将输入端口的 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{I}_1$ 联系起来，同时将输出端口的 $\mathbf{V}_2$ 和 $\mathbf{I}_2$ 联系起来即可。

在刚才那个例子中，$\mathbf{y}_{12}$ 和 $\mathbf{y}_{21}$ 相等(均等于 -0.1 S)。对于这个 Π 形网络，如果它的三个阻抗为一般的阻抗 $\mathbf{Z}_A$，$\mathbf{Z}_B$ 和 $\mathbf{Z}_C$，不难得出同样的等量关系。但是对于一般的电路，推导使 $\mathbf{y}_{12} = \mathbf{y}_{21}$ 的条件比较困难，不过可以使用行列式符号来推导。下面来看是否能将式(17.10)到式(17.13)用阻抗的行列式及其子式来表示。

因为这里只关心双端口网络而不关心它所连接的网络，因此可以用两个理想电压源来代表 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$。通过令 $\mathbf{V}_2 = 0$(即将输出短路)并求输入阻抗，可以得到式(17.10)，这时，原网络变成了一个单端口网络，而在上一章中已经知道怎样求出单端口网络的输入阻抗。选取回路 1，使之包含输入端，并令 $\mathbf{I}_1$ 为该回路的电流，令 $(-\mathbf{I}_2)$ 为回路 2 的电流，可以用任何合适的符号表示其他回路电流。这时：

$$\mathbf{Z}_{in}\Big|_{\mathbf{V}_2=0} = \frac{\Delta_\mathbf{Z}}{\Delta_{11}}$$

因此：

$$\mathbf{y}_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_\mathbf{Z}}$$

类似地：

$$\mathbf{y}_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_\mathbf{Z}}$$

为了求出 $\mathbf{y}_{12}$，令 $\mathbf{V}_1=0$，然后将 $\mathbf{I}_1$ 表示成 $\mathbf{V}_2$ 的函数。可见 $\mathbf{I}_1$ 可以用下面的比值形式表示：

$$\mathbf{I}_1=\frac{\begin{vmatrix}0 & \mathbf{Z}_{12} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N}\\ -\mathbf{V}_2 & \mathbf{Z}_{22} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N}\\ 0 & \mathbf{Z}_{32} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \mathbf{Z}_{N2} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N}\\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N}\\ \mathbf{Z}_{31} & \mathbf{Z}_{32} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{Z}_{N1} & \mathbf{Z}_{N2} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN}\end{vmatrix}}$$

因此：

$$\mathbf{I}_1=-\frac{(-\mathbf{V}_2)\Delta_{21}}{\Delta_{\mathbf{Z}}}$$

以及：

$$\mathbf{y}_{12}=\frac{\Delta_{21}}{\Delta_{\mathbf{Z}}}$$

类似的，可以得到：

$$\mathbf{y}_{21}=\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{\mathbf{Z}}}$$

可以看出，$\mathbf{y}_{12}$是否和 $\mathbf{y}_{21}$ 相等取决于 $\Delta_{\mathbf{Z}}$ 的两个子式 Δ_{12} 和 Δ_{21} 是否相等。这两个子式为：

$$\Delta_{21}=\begin{vmatrix}\mathbf{Z}_{12} & \mathbf{Z}_{13} & \mathbf{Z}_{14} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N}\\ \mathbf{Z}_{32} & \mathbf{Z}_{33} & \mathbf{Z}_{34} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N}\\ \mathbf{Z}_{42} & \mathbf{Z}_{43} & \mathbf{Z}_{44} & \cdots & \mathbf{Z}_{4N}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{Z}_{N2} & \mathbf{Z}_{N3} & \mathbf{Z}_{N4} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN}\end{vmatrix}$$

和

$$\Delta_{12}=\begin{vmatrix}\mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{23} & \mathbf{Z}_{24} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N}\\ \mathbf{Z}_{31} & \mathbf{Z}_{33} & \mathbf{Z}_{34} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N}\\ \mathbf{Z}_{41} & \mathbf{Z}_{43} & \mathbf{Z}_{44} & \cdots & \mathbf{Z}_{4N}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{Z}_{N1} & \mathbf{Z}_{N3} & \mathbf{Z}_{N4} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN}\end{vmatrix}$$

首先将其中一个子式（比如 Δ_{21}）的行列互换，这样不会改变行列式的值（任何一本大学代数课本中都能找到其证明），然后将每个互阻抗 $\mathbf{Z}_{ij}$ 替换为 $\mathbf{Z}_{ji}$。即令：

$$\mathbf{Z}_{12}=\mathbf{Z}_{21}\qquad \mathbf{Z}_{23}=\mathbf{Z}_{32}\qquad \text{等等}$$

对于三种熟悉的无源元件，即电阻、电容和电感来说，$\mathbf{Z}_{ij}$ 和 $\mathbf{Z}_{ji}$ 显然是相等的，对于互感而言，它们也是相等的。但是，并不是所有的双端口网络都满足这样的关系，比如受控源就不满足这个

关系，回转器也不满足(回转器是对霍尔效应器件和含有铁氧体的波导进行建模的有用模型)。在比较窄的角频率范围内，从回转器输出端向输入端传输的信号比沿相反方向传输的信号附加 180°的相位差，因此 $\mathbf{y}_{12} = -\mathbf{y}_{21}$。可是，有一类称为非线性元件的常见无源元件，它们不满足 $\mathbf{Z}_{ij}$ 等于 $\mathbf{Z}_{ji}$。

满足 $\mathbf{Z}_{ij} = \mathbf{Z}_{ji}$ 的元件称为双向元件，只包含双向元件的电路称为双向电路。因此，可以看到双向双端口网络的一个很重要的特性为：

$$\mathbf{y}_{12} = \mathbf{y}_{21}$$

根据这个特性，可以得到互易定理：

> 对于任何线性无源双向网络，如果支路 x 中的惟一的电压源 $\mathbf{V}_x$ 在支路 y 中产生的电流为 $\mathbf{I}_y$，那么将电压源从支路 x 移到支路 y 后，将在支路 x 中产生的电流响应为 $\mathbf{I}_y$。

这个定理可以用一种简单的方法描述为：对于任何线性无源双向电路，将理想电压源和理想安培表的位置互换，安培表的读数不变。

如果所考虑的是电路的导纳行列式，并且已经证明导纳行列式 Δ_Y 的子式 Δ_{21} 和 Δ_{12} 相等，那么可以得到互易定理的对偶形式：

> 对于任何线性无源双向网络，如果节点 x 和 x' 之间的惟一的电流源 $\mathbf{I}_x$ 在节点 y 和 y' 之间产生的电压为 $\mathbf{V}_y$，那么将电流源从节点 x 和 x' 之间移到 y 和 y' 之间后，将在节点 x 和 x' 之间产生的电压响应为 $\mathbf{V}_y$。

换句话说，对于任何线性无源双向电路，将理想电流源和理想伏特表的位置互换，伏特表的读数不变。

下一节将重点讨论双端口网络包含受控源时的情形。

练习

17.4 对于图 17.7 所示电路，设 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$ 为理想电流源，设输入端的电压为 $\mathbf{V}_1$，输出端的电压为 $\mathbf{V}_2$，$\mathbf{V}_x$ 为中央的节点到参考点的电压。列出三个节点方程，然后消去 $\mathbf{V}_x$ 得到两个方程，再将它们整理成式(17.5)和式(17.6)的形式使得可以从中直接读取所有的 $\mathbf{y}$ 参数。

17.5 求图 17.8 所示的双端口网络的 $\mathbf{y}$ 参数。

答案：17.4：$\begin{bmatrix} 0.1192 & -0.1115 \\ -0.1115 & 0.1269 \end{bmatrix}$(单位均为 S)；17.5：$\begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ -0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$(单位均为 S)。

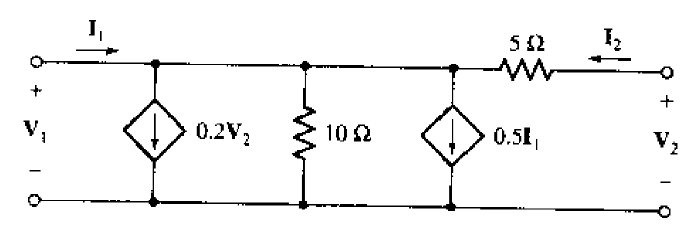


图 17.8

17.4 几个等效网络

分析电子电路时，通常有必要将一些有源设备（或者同时包含无源电路）用一个等效的双端口网络来替换，这个双端口网络一般只包含三到四个阻抗。这里说的等效可以只局限于小信号而且单频的情况，或者是在一个非常窄的频率范围内，也可以是非线性电路的线性近似。然而，如果要分析的是包含许多电阻、电容和电感，同时还含有晶体管（比如2N3823）的电路，那么不管使用以前学过的什么方法，都没法分析这个电路。如果要分析这样的电路，首先必须将晶体管用其线性模型来替换，就像在第6章中用线性模型来替换运放那样。对于通常工作在高频的那些双端口网络来说，y参数模型就是这样的一种线性模型。另一种常用的晶体管线性模型将在17.6节中介绍

下面是两个定义短路导纳参数的方程：

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{y}_{11}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_2 \tag{17.16}$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{y}_{21}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_2 \tag{17.17}$$

式(17.16)与式(17.17)的形式与含有两个非参考节点电路的节点方程的形式类似。一般来说，当$\mathbf{y}_{12}$和$\mathbf{y}_{21}$不相等时，求与式(17.16)和式(17.17)等效的电路比较困难，这时需要一些技巧来得到一对相等的互系数。通过加上并减去$\mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_1$[因为我们希望在式(17.17)的右边看到这一项]，得：

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_2 + (\mathbf{y}_{21} - \mathbf{y}_{12})\mathbf{V}_1 \tag{17.18}$$

即

$$\mathbf{I}_2 - (\mathbf{y}_{21} - \mathbf{y}_{12})\mathbf{V}_1 = \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_2 \tag{17.19}$$

这时，式(17.16)和式(17.19)的右边满足了双向电路的对称性。式(17.19)的左边可以看做是两个电流源的代数和，其中一个是流入节点2的独立源电流$\mathbf{I}_2$，另一个是流出节点2的受控源电流$(\mathbf{y}_{21} - \mathbf{y}_{12})\mathbf{V}_1$。

下面来看式(17.16)和式(17.19)所表示的等效网络。首先指定一个参考节点，然后指定$\mathbf{V}_1$和$\mathbf{V}_2$。根据式(17.16)，令电流$\mathbf{I}_1$流入节点1，然后在节点1和节点2之间放置一个互导纳$(-\mathbf{y}_{12})$，在节点1和参考节点之间放置导纳$(\mathbf{y}_{11} + \mathbf{y}_{12})$。当$\mathbf{V}_2 = 0$时，$\mathbf{I}_1$与$\mathbf{V}_1$的比值确实等于$\mathbf{y}_{11}$。现在来看式(17.19)，令电流$\mathbf{I}_2$流入第二个节点，并使电流$(\mathbf{y}_{21} - \mathbf{y}_{12})\mathbf{V}_1$流出该节点，注意到，两个节点之间已经放置了合适的导纳$(-\mathbf{y}_{12})$，然后，在节点2和参考点之间放置导纳$(\mathbf{y}_{22} + \mathbf{y}_{12})$。完成后的电路如图17.9(a)所示。

通过在式(17.16)右边减去然后加上$\mathbf{y}_{21}\mathbf{V}_2$，可以得到另一个等效网络，如图17.9(b)所示。

如果双端口网络是双向的，那么$\mathbf{y}_{12} = \mathbf{y}_{21}$，则这两个等效网络均可以简化为一个简单的无源Π形网络，它不含受控源。等效的双向双端口网络如图17.9(c)所示。

这些等效电路可以用于不同的场合。前面已经证明了对于任何复杂的双端口网络，不管它含有多少节点和回路，都存在一个与之等效的双端口网络，而且这个等效的双端口网络不会比图17.9所示的电路复杂。如果只对给定网络的端口特性感兴趣的话，那么使用这些等效电路中的某一个可能会比直接使用原网络要简单得多。

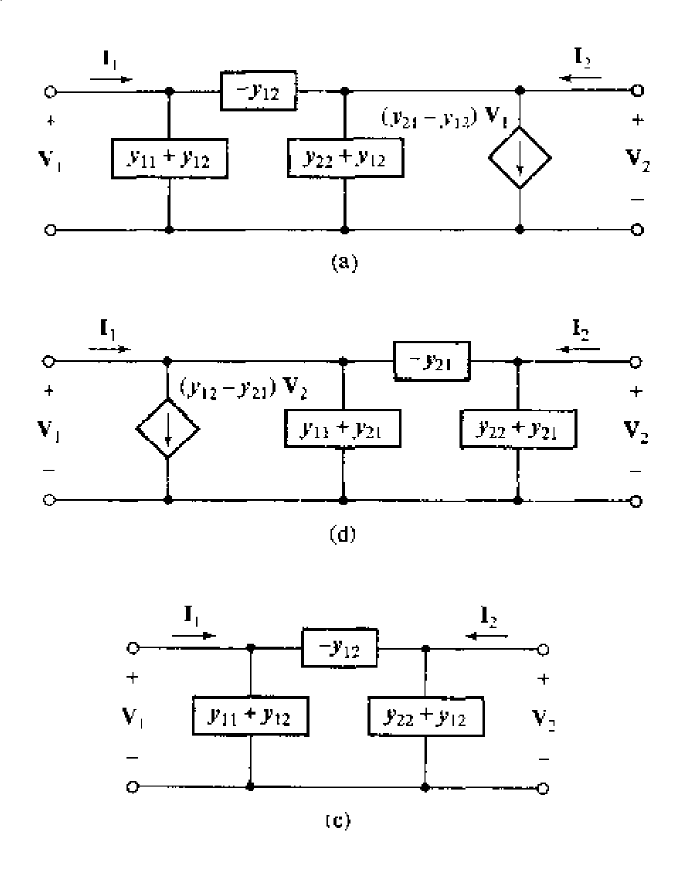


图 17.9 (a),(b)与线性双端口网络等效的双端口。其中(a)中的受控源受控于$\mathbf{V}_1$;(b)中的受控源受控于$\mathbf{V}_2$;(c)互易网络的等效网络

图 17.10(a)所示的三端网络通常称为阻抗的 Δ 形连接,而图 17.10(b)则称为 Y 形连接。当这些阻抗之间满足某些条件的时候,这两种连接形式可以相互转换,使用 **y** 参数可以得到相互转换需要满足的条件。可以得到:

$$\mathbf{y}_{11} = \frac{1}{\mathbf{Z}_A} + \frac{1}{\mathbf{Z}_B} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3/(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3)}$$

$$\mathbf{y}_{12} = \mathbf{y}_{21} = -\frac{1}{\mathbf{Z}_B} + = \frac{-\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_1}$$

$$\mathbf{y}_{22} = \frac{1}{\mathbf{Z}_C} + \frac{1}{\mathbf{Z}_B} = \frac{1}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3/(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3)}$$

求解这些方程,可以将 $\mathbf{Z}_A$,$\mathbf{Z}_B$ 和 $\mathbf{Z}_C$ 用 $\mathbf{Z}_1$,$\mathbf{Z}_2$ 和 $\mathbf{Z}_2$ 来表示:

$$\mathbf{Z}_A = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2} \tag{17.20}$$

$$\mathbf{Z}_B = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_3} \tag{17.21}$$

$$\mathbf{Z}_C = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1} \tag{17.22}$$

也可以得到相反的关系：

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_B}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C} \tag{17.23}$$

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{Z}_B\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C} \tag{17.24}$$

$$\mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{Z}_C\mathbf{Z}_A}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C} \tag{17.25}$$

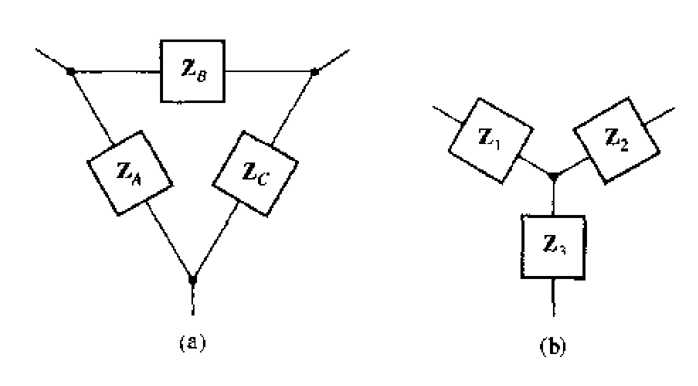


图 17.10　如果图中的 6 个电阻满足 Y-Δ(或 Π-T)变换的条件，即满足式(17.20)到式(17.25)，则三端Δ形网络(a)与三端Y形网络(b)相互等效

读者可以回想起第 5 章中曾经使用过这些关系，但那时并没有给出详细推导。

使用这些公式，可以方便地对 Y 形和 Δ 形网络进行相互转换，这个过程称为 Y-Δ 转换（或者可以称为 Π-T 转换，如果网络是按照这样的字母形式画出的话）。从 Y 形转换为 Δ 形时，采用式(17.20)到式(17.22)，首先求出它们公共的分子，它等于 Y 形网络中的阻抗两两相乘然后相加的结果。然后将此分子分别除以与要求的 Δ 形网络阻抗没有公共节点的 Y 形网络阻抗，就可以得到 Δ 形网络的各个阻抗。相反地，给定 Δ 形网络，首先将其三个阻抗相加，然后用它去除两个 Δ 阻抗的乘积，就可以求得与这两个相乘的 Δ 形网络阻抗均有公共节点的 Y 形网络的阻抗。

在化简无源网络时，特别是在化简阻性网络时，这些变换通常很有用，因为使用它们通常可以避免进行网孔分析或者节点分析。

例题 17.6　求图 17.11(a)所示电路的输入电阻

首先对图 17.11(a)上端的 Δ 形连接进行 Δ-Y 转换。Δ 形连接的三个电阻的和为 $1+4+3=8\ \Omega$。与顶端节点相连的两个电阻的乘积为 $1\times 4 = 4\ \Omega^2$。因此，Y 形连接的上端的电阻为 $\frac{4}{8}\Omega$ 或 $\frac{1}{2}\Omega$。用同样的方法可以求出另外两个电阻，于是可以得到图 17.11(b)所示的网络。

然后将得到的串并联电路合并，可以得到图 17.11(c)和图 17.11(d)所示的网络。因此，图 17.11(a)所示的网络的输入电阻为 $\frac{159}{71}\ \Omega$ 或 $2.24\ \Omega$。

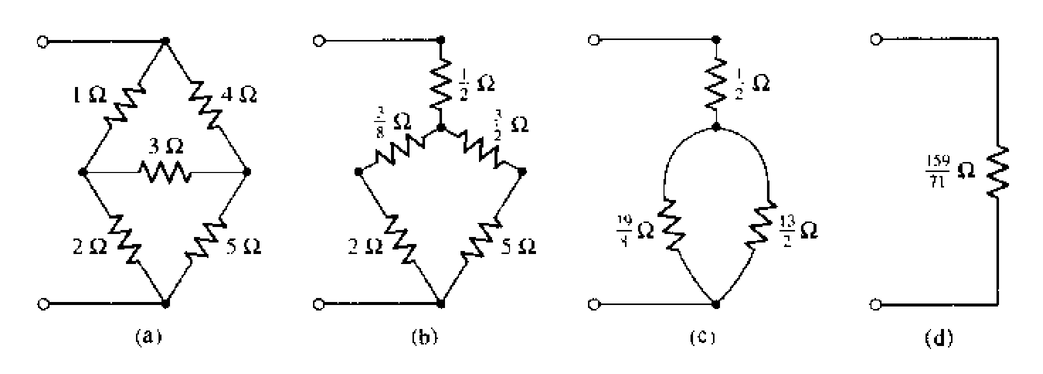


图 17.11 (a)一个阻性网络，求其输入电阻，第5章中曾经讨论过这个网络；(b)用等效Y形连接替换上面的Δ形连接；(c)、(d)转化为串并联连接后，最后可以得到等效输入电阻为$\frac{159}{71}$ Ω

下面来看一个比较复杂的例子，如图 17.12 所示。该电路含有一个受控源，因此，Y-Δ 转换将不再适用。

例题 17.7 图 17.12 所示的电路可以看做是晶体管放大器的近似线性等效电路，其中发射极对应于图中下端的节点，基极对应于输入端上端的节点，集电极对应于输出端上端的节点。在某些特殊的应用场合下，集电极和基极之间连接了一个 2 000 Ω 的电阻，这使得分析电路时变得更加困难。求出这个电路的 y 参数

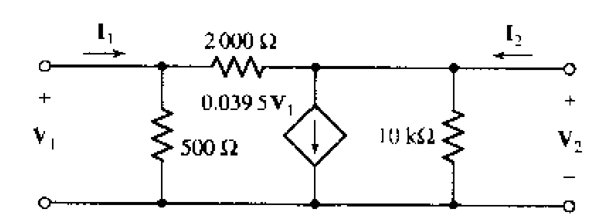


图 17.12 带反馈的晶体管共发射极电路的等效电路，其中反馈电阻接在集电极和基极之间

● 弄清问题的目标：

避开具体的电路术语，可以将该网络看做是一个双端口网络，需要求出其 y 参数。

● 收集已知信息：

图 17.12 标出了双端口网络的 $\mathbf{V}_1$，$\mathbf{I}_1$，$\mathbf{V}_2$ 和 $\mathbf{I}_2$，而且给出了每个元件的参数。

● 选择最适合问题的已有方法：

可以用几种办法来分析这个电路。如果能够看出它的形式与图 17.9(a)所示的等效电路的形式一样的话，那么立刻就可以得出其 y 参数。如果不能立刻看出这一点，那么可以通过使用关系式(17.10)到式(17.13)来求该双端口网络的 y 参数。也可以不使用双端口网络的分析方法，直接列出方程组。

● 建立适当的方程组：

将该电路与图 17.9(a)所示电路进行比较，可以发现 $-\mathbf{y}_{21}$ 对应于 2 kΩ 电阻的导纳，$\mathbf{y}_{11}+\mathbf{y}_{12}$ 对应于 500 Ω 电阻的导纳，$\mathbf{y}_{21}-\mathbf{y}_{12}$ 对应于受控电流源的增益，$\mathbf{y}_{22}+\mathbf{y}_{12}$ 对应于 10 kΩ 电阻的导纳。因此可以得到：

$$\mathbf{y}_{12} = -\frac{1}{2\,000}$$

$$\mathbf{y}_{11} = \frac{1}{500} - \mathbf{y}_{12}$$

$$\mathbf{y}_{21} = 0.039\,5 + \mathbf{y}_{12}$$

$$\mathbf{y}_{22} = \frac{1}{10\,000} - \mathbf{y}_{12}$$

● 确定是否还需要其他信息：

从上面列出的方程可以看出，如果求出了 $\mathbf{y}_{12}$ 的值，就可以求出剩下的 $\mathbf{y}$ 参数的值。

● 试解：

将这些数字输入计算器中，可以得到：

$$\mathbf{y}_{12} = -\frac{1}{2\,000} = -0.5\text{ mS}$$

$$\mathbf{y}_{11} = \frac{1}{500} - \left(-\frac{1}{2\,000}\right) = 2.5\text{ mS}$$

$$\mathbf{y}_{22} = \frac{1}{10\,000} - \left(-\frac{1}{2\,000}\right) = 0.6\text{ mS}$$

以及：

$$\mathbf{y}_{21} = 0.039\,5 + \left(-\frac{1}{2\,000}\right) = 39\text{ mS}$$

最后可以得到下面的方程组：

$$\mathbf{I}_1 = 2.5\mathbf{V}_1 - 0.5\mathbf{V}_2 \tag{17.26}$$

$$\mathbf{I}_2 = 39\mathbf{V}_1 + 0.6\mathbf{V}_2 \tag{17.27}$$

上述方程使用的单位是 mA，V 和 mS 或 kΩ。

● 证实所得解是否合理和满足要求：

直接写出节点方程为：

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{2} + \frac{\mathbf{V}_1}{0.5} \quad 或 \quad \mathbf{I}_1 = 2.5\mathbf{V}_1 - 0.5\mathbf{V}_2$$

和

$$-39.5\mathbf{V}_1 + \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{2} + \frac{\mathbf{V}_2}{10} \quad 或 \quad \mathbf{I}_2 = 39\mathbf{V}_1 + 0.6\mathbf{V}_2$$

这与根据 $\mathbf{y}$ 参数列出的式(17.26)和式(17.27)一致。

下面用式(17.26)和式(17.27)来分析在几种不同的工作情况下，这个双端口网络的特性如何。首先在输入端接上 $1\underline{/0^\circ}$ mA 电流源，在输出端接上 0.5 kΩ(2 mS)的负载。两个端口所连接的网络均为单端口网络，且 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{V}_1$ 以及 $\mathbf{I}_2$ 和 $\mathbf{V}_2$ 之间满足下面的关系：

$$\mathbf{I}_1 = 1(对任何\ \mathbf{V}_1) \qquad \mathbf{I}_2 = -2\mathbf{V}_2$$

现在一共有 4 个方程以及 4 个未知数 $\mathbf{V}_1$、$\mathbf{V}_2$，$\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$。将这两个单端口网络的方程代入式(17.26)和式(17.27)中，可以得到关于 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$ 的方程组：

$$1 = 2.5\mathbf{V}_1 - 0.5\mathbf{V}_2 \qquad 0 = 39\mathbf{V}_1 + 2.6\mathbf{V}_2$$

解之，可得：

$$\mathbf{V}_1 = 0.1\ \text{V} \quad \mathbf{V}_2 = -1.5\ \text{V}$$
$$\mathbf{I}_1 = 1\ \text{mA} \quad \mathbf{I}_2 = 3\ \text{mA}$$

这 4 个值是在指定双端口网络的电流($\mathbf{I}_1 = 1$ mA)和负载($R_L = 0.5\ \Omega$)的情况下得到的。

放大器的性能通常用一些参数来描述。下面来计算这个双端口网络及其连接电路的 4 个反映放大器性能的参数——定义并计算电压增益、电流增益、功率增益和输入阻抗。

电压增益 $\mathbf{G}_V$ 定义为：

$$\mathbf{G}_V = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1}$$

对于上面的数值例子，不难计算出其 $\mathbf{G}_V = -15$。

电流增益 $\mathbf{G}_I$ 定义为：

$$\mathbf{G}_I = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1}$$

对于上面的数值例子：

$$\mathbf{G}_I = 3$$

然后来定义并计算在正弦激励下的功率增益 G_P：

$$G_P = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{\text{Re}\left[-\frac{1}{2}\mathbf{V}_2\mathbf{I}_2^*\right]}{\text{Re}\left[\frac{1}{2}\mathbf{V}_1\mathbf{I}_1^*\right]} = 45$$

因为上面这几种增益均大于 1，因此既可以将这个设备称为电压放大器，也可以将其称为电流放大器或者功率放大器。如果将 2 kΩ 的电阻去掉，则功率增益将增大至 354。

当放大器与其他设备级联时，为了从前级获得最大的输入功率或者给后级输出最大的功率，通常需要计算其输入阻抗和输出阻抗。输入阻抗 $\mathbf{Z}_{in}$ 定义为输入电压和输入电流的比值：

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = 0.1\ \text{k}\Omega$$

这是输出端接上 500 Ω 的负载后电流源看到的阻抗(当输出端短路时，输入阻抗为 $1/\mathbf{y}_{11}$，即 400 Ω)

需要注意的是，不能通过将每个电源用其内阻抗替换，然后采用合并电阻或者电导的办法来求输入阻抗。对于上面这个电路，如果用这样的办法去求，将得到输入阻抗为 416 Ω，出现这个错误是因为将受控源当做独立源看待。如果我们认为输入阻抗在数值上等于当输入电流为 1 A 时输入端的电压值，那么这个 1 A 电流源将使得输入电压 $\mathbf{V}_1$ 不为 0，于是受控源($0.0395\mathbf{V}_1$)的作用不可能为零。应该还记得，在计算含有受控源以及独立源的电路的戴维南等效阻抗时，必须将独立源用短路线或者开路替换，但是不能采用同样的方法替换受控源。当然，如果受控源的控制电压或者控制电流为零时，那么受控源本身就不起作用了，发现并利用这种情况有时可以简化电路。

除了 $\mathbf{G}_V$，$\mathbf{G}_I$，G_P 和 $\mathbf{Z}_{in}$，还有其他一些非常有用的性能参数，其中包括输出阻抗 $\mathbf{Z}_{out}$，需要采用不同的电路结构来求出。

输出阻抗指的是从负载看进去的电路的戴维南等效阻抗。对于前面所讨论的电路，原先假定它受到一个 $1\angle 0°$ mA 电流源的驱动，现在将这个电流源开路并保留受控源，然后求从输出端往左看进去的输入阻抗(移去负载)。因此，定义：

$$\mathbf{Z}_{out} = \mathbf{V}_2 \mid_{\mathbf{I}_2=1}$$

于是，移去负载电阻，并在输出端接上 $1\angle 0°$ mA 的电流源，然后求 $\mathbf{V}_2$(这里使用的单位是 V，mA 和 kΩ)。将这些条件代入式(17.26)和式(17.27)，可得：

$$0 = 2.5\mathbf{V}_1 - 0.5\mathbf{V}_2 \quad 1 = 39\mathbf{V}_1 + 0.6\mathbf{V}_2$$

解之得：

$$\mathbf{V}_2 = 0.1190 \text{ V}$$

于是：

$$\mathbf{Z}_{out} = 0.1190 \text{ k}\Omega$$

另外一种求输出阻抗的办法是先求出开路输出电压及短路输出电流，这时戴维南阻抗即为输出阻抗：

$$\mathbf{Z}_{out} = \mathbf{Z}_{th} = -\frac{\mathbf{V}_{2oc}}{\mathbf{I}_{2sc}}$$

采用这种方法，再次使用 1 mA 的独立源并将负载断开，即 $\mathbf{I}_1 = 1$ mA，$\mathbf{I}_2 = 0$。这时，有：

$$1 = 2.5\mathbf{V}_1 - 0.5\mathbf{V}_2 \quad 0 = 39\mathbf{V}_1 + 0.6\mathbf{V}_2$$

因此：

$$\mathbf{V}_{2oc} = -1.857 \text{ V}$$

然后，使用同样的电流源并将输出端短路，即 $\mathbf{I}_1 = 1$ mA，$\mathbf{V}_2 = 0$。这时可以得到：

$$\mathbf{I}_1 = 1 = 2.5\mathbf{V}_1 - 0 \quad \mathbf{I}_2 = 39\mathbf{V}_1 + 0$$

因此：

$$\mathbf{I}_{2sc} = 15.6 \text{ mA}$$

遵循 $\mathbf{V}_2$ 和 $\mathbf{I}_2$ 设定的方向，可以得到戴维南阻抗或者说是输出阻抗为：

$$\mathbf{Z}_{out} = -\frac{\mathbf{V}_{2oc}}{\mathbf{I}_{2sc}} = -\frac{-1.857}{15.6} = 0.1190 \text{ k}\Omega$$

这和前面求得的结果一致。

现在已经有足够的信息来画出图 17.12 所示的双端口网络在 $1\angle 0°$ mA 电流源驱动下，负载为500 Ω时的戴维南等效电路或者诺顿等效电路了。这时，从负载看进去的诺顿等效电路必然包含一个大小等于短路电流 $\mathbf{I}_{2sc}$ 的电流源，它与输出阻抗并联，如图 17.13(a)所示。而从 $1\angle 0°$ mA电流源看过去的戴维南等效电路则只包含输入阻抗，如图 17.13(b)所示。

在结束 **y** 参数的讨论之前，应该知道它们在描述双端口网络并联连接时的作用，双端口网络的并联如图 17.14 所示。17.2 节中给出端口的定义时，曾经强调过流入和流出端口的两个端子的电流必须相等，并且不能使用外部连接将两个端口连接起来，显然图 17.14 所示的并联连接并不满足这个条件，但是，如果每个双口的输出端口和输入端口均有公共参考节点，而且如果它们并联后仍然有公共参考节点的话，那么并联后所有的端口仍然是端口。这时，对于网络 A，有：

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{y}_A\mathbf{V}_A$$

其中：

$$\mathbf{I}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{A1} \\ \mathbf{I}_{A2} \end{bmatrix} \quad 和 \quad \mathbf{V}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{A1} \\ \mathbf{V}_{A2} \end{bmatrix}$$

对于网络 B，有：

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{y}_B \mathbf{V}_B$$

但是：

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_B = \mathbf{V} \quad 和 \quad \mathbf{I} = \mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B$$

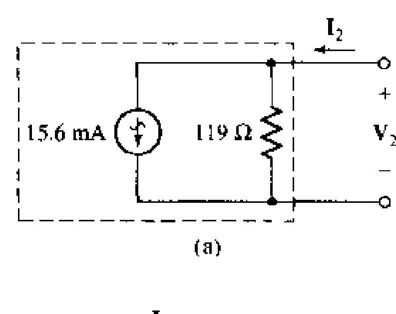
因此：

$$\mathbf{I} = (\mathbf{y}_A + \mathbf{y}_B)\mathbf{V}$$

可以看到，这个并联网络的每个 y 参数等于各个子网络相应的 y 参数之和，即：

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_A + \mathbf{y}_B \tag{17.28}$$

很显然，可以将这个关系推广到任意多个双端口网络并联的情况。



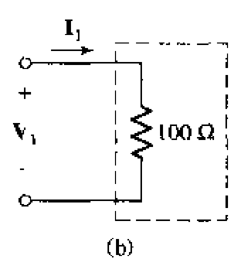


图 17.13 (a)图17.12所示网络从输出端往左看进去的诺顿等效电路，$\mathbf{I}_1 = 1\angle 0°$ mA；(b)$\mathbf{I}_2 = -2\mathbf{V}_2$ 时，图17.12所示网络从输入端往右看过去的戴维南等效电路

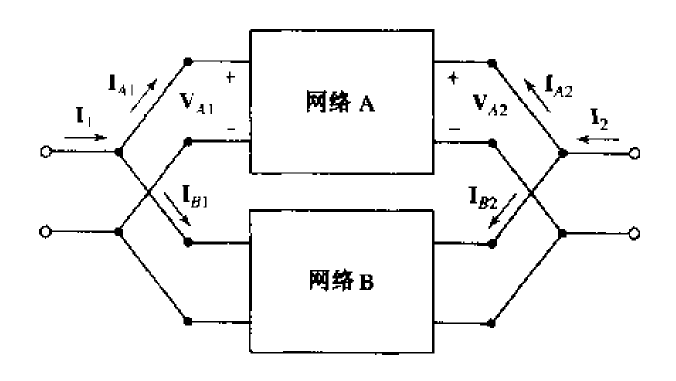


图 17.14 两个双端口网络的并联。如果输出端口和输入端口有公共参考节点，则其导纳矩阵为 $\mathbf{y} = \mathbf{y}_A + \mathbf{y}_B$

练习

17.6 求图 17.15 所示的双端口网络的 y 参数及输出阻抗 $\mathbf{Z}_{out}$。

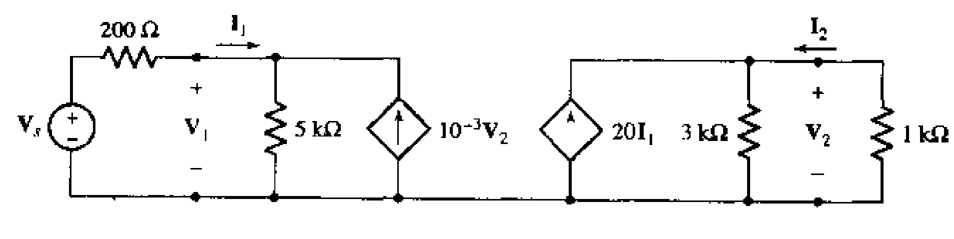


图 17.15

17.7 使用 Δ-Y 变换和 Y-Δ 变换，求(a)图 17.16(a)所示的网络的 R_{in}；(b)图 17.16(b)所示网络的 R_{in}

答案：17.6：$\begin{bmatrix} 2\times10^{-4} & -10^{-3} \\ -4\times10^{-3} & 20.3\times10^{-3} \end{bmatrix}$(S)，51.1 Ω；17.7：53.71 Ω，1.311 Ω

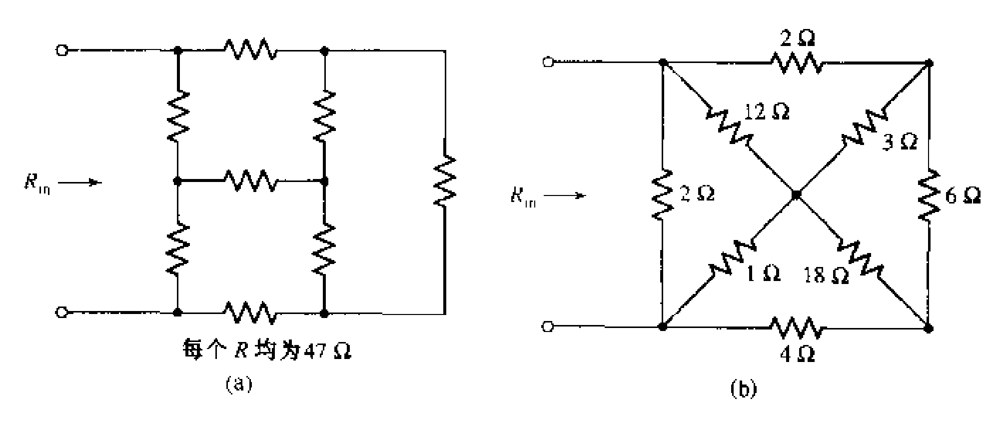


图 17.16

17.5 阻抗参数

前面用短路导纳参数介绍了双端口网络参数的概念。此外，还有其他的双端口网络参数，每种参数都和某种特定类型的网络相关，在分析这类网络时，采用合适的参数可以使得分析过程最为简单。下面将考虑另外三种参数，它们分别是开路阻抗参数(这将在本节中讨论)、混合参数和传输参数，它们将在后面讨论。

首先以一个不包含任何独立源的电路开始进行分析，这里和以前(图 17.5)一样设定电流和电压。现在将电压 $\mathbf{V}_1$ 看做是由两个电流源 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$ 共同产生的，因此，可以将 $\mathbf{V}_1$ 表示为：

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2 \tag{17.29}$$

类似地，对于 $\mathbf{V}_2$ 有：

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2 \tag{17.30}$$

或者写成：

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{zI} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \tag{17.31}$$

当然，在使用这两个方程时，$\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$ 不必是电流源，$\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$ 也不必是电压源。通常，双端口网络的两端可以连接任何网络。根据上面的方程形式，读者很可能会以为 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$ 为给定的量或者说是自变量，而 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$ 为未知量，或者说是因变量，其实并不是这样的。

事实上，用两个方程将这 4 个量关联起来的方法可以有 6 种，每一种都定义了不同的参数，只研究这 6 种参数中最常用的 4 种。

最能描述 z 参数含义的定义由式(17.29)和式(17.30)给出，分别令各个电流为零，可以得到：

$$\mathbf{z}_{11} = \left.\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{I}_2=0} \tag{17.32}$$

$$\mathbf{z}_{12} = \left.\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_2}\right|_{\mathbf{I}_1=0} \tag{17.33}$$

$$\mathbf{z}_{21} = \left.\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{I}_2=0} \tag{17.34}$$

$$\mathbf{z}_{22} = \left.\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2}\right|_{\mathbf{I}_1=0} \tag{17.35}$$

因为电流等于零相当于端口开路,因此 **z** 参数被称为开路阻抗参数。通过求解式(17.29)和式(17.30)中的 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$,可以求得开路阻抗参数与短路导纳参数之间的关系:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{V}_2 & \mathbf{z}_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{vmatrix}}$$

即

$$\mathbf{I}_1 = \left(\frac{\mathbf{z}_{22}}{\mathbf{z}_{11}\mathbf{z}_{22} - \mathbf{z}_{12}\mathbf{z}_{21}}\right)\mathbf{V}_1 - \left(\frac{\mathbf{z}_{12}}{\mathbf{z}_{11}\mathbf{z}_{22} - \mathbf{z}_{12}\mathbf{z}_{21}}\right)\mathbf{V}_2$$

使用行列式记号,并且注意下标为小写字母 **z**、同时假定 $\Delta_z \neq 0$,可以得到:

$$\mathbf{y}_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_z} = \frac{\mathbf{z}_{22}}{\Delta_z} \qquad \mathbf{y}_{12} = -\frac{\Delta_{21}}{\Delta_z} = -\frac{\mathbf{z}_{12}}{\Delta_z}$$

通过求出 $\mathbf{I}_2$,然后可以得到:

$$\mathbf{y}_{21} = -\frac{\Delta_{12}}{\Delta_z} = -\frac{\mathbf{z}_{21}}{\Delta_z} \qquad \mathbf{y}_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_z} = \frac{\mathbf{z}_{11}}{\Delta_z}$$

类似地,可以用 **y** 参数表示 **z** 参数。各种参数之间可以相互转换,有许多这样的转换公式。表 17.1 给出了 **y** 参数和 **z** 参数(以及后面将要讨论的 **h** 参数和 **t** 参数)之间的变换作为参考。

如果双端口网络为双向网络,那么它具有互易性,这时不难证明 $\mathbf{z}_{12}$ 等于 $\mathbf{z}_{21}$。

考察式(17.29)和式(17.30),同样可以得到其等效电路,只要对式(17.30)加上并减去 $\mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_1$ 或者对式(17.29)加上并减去 $\mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_2$ 即可。两种等效电路均含有一个受控电压源。

这里不去推导这个等效关系,而是考虑一个更加一般的例子。考虑能否构造一个从双端口网络输出端看过来的通用戴维南等效电路?首先有必要指定一个输入电路,将这个输入电路取为独立电压源 $\mathbf{V}_s$(上端为正),其内阻为 $\mathbf{Z}_g$ 串联,这时:

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{V}_1 + \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_g$$

将其与式(17.29)和式(17.30)联立,消去 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{I}_1$,然后得到:

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{z}_{11} + \mathbf{Z}_g}\mathbf{V}_s + \left(\mathbf{z}_{22} - \frac{\mathbf{z}_{12}\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{z}_{11} + \mathbf{Z}_g}\right)\mathbf{I}_2$$

根据这个方程,可以直接画出戴维南等效电路,如图 17.17 所示。将输出阻抗用 z 参数表示为:

$$\mathbf{Z}_{out} = \mathbf{z}_{22} - \frac{\mathbf{z}_{12}\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{z}_{11} + \mathbf{Z}_g}$$

表 17.1　y,z,h 和 t 参数之间的变换

	y		z		h		t	
y	y_{11}	y_{12}	$\frac{z_{22}}{\Delta_z}$	$\frac{-z_{12}}{\Delta_z}$	$\frac{1}{h_{11}}$	$\frac{-h_{12}}{h_{11}}$	$\frac{t_{22}}{t_{12}}$	$\frac{-\Delta_t}{t_{12}}$
	y_{21}	y_{22}	$\frac{-z_{21}}{\Delta_z}$	$\frac{z_{11}}{\Delta_z}$	$\frac{h_{21}}{h_{11}}$	$\frac{\Delta_h}{h_{11}}$	$\frac{-1}{t_{12}}$	$\frac{t_{11}}{t_{12}}$
z	$\frac{y_{22}}{\Delta_y}$	$\frac{-y_{12}}{\Delta_y}$	z_{11}	z_{12}	$\frac{\Delta_h}{h_{22}}$	$\frac{h_{12}}{h_{22}}$	$\frac{t_{11}}{t_{21}}$	$\frac{\Delta_t}{t_{21}}$
	$\frac{-y_{21}}{\Delta_y}$	$\frac{y_{11}}{\Delta_y}$	z_{21}	z_{22}	$\frac{-h_{21}}{h_{22}}$	$\frac{1}{h_{22}}$	$\frac{1}{t_{21}}$	$\frac{t_{22}}{t_{21}}$
h	$\frac{1}{y_{11}}$	$\frac{-y_{12}}{y_{11}}$	$\frac{\Delta_z}{z_{22}}$	$\frac{z_{12}}{z_{22}}$	h_{11}	h_{12}	$\frac{t_{12}}{t_{22}}$	$\frac{\Delta_t}{t_{22}}$
	$\frac{y_{21}}{y_{11}}$	$\frac{\Delta_y}{y_{11}}$	$\frac{-z_{21}}{z_{22}}$	$\frac{1}{z_{22}}$	h_{21}	h_{22}	$\frac{-1}{t_{22}}$	$\frac{t_{21}}{t_{22}}$
t	$\frac{-y_{22}}{y_{21}}$	$\frac{-1}{y_{21}}$	$\frac{z_{11}}{z_{21}}$	$\frac{\Delta_z}{z_{21}}$	$\frac{-\Delta_h}{h_{21}}$	$\frac{-h_{11}}{h_{21}}$	t_{11}	t_{12}
	$\frac{-\Delta_y}{y_{21}}$	$\frac{-y_{11}}{y_{21}}$	$\frac{1}{z_{21}}$	$\frac{z_{22}}{z_{21}}$	$\frac{-h_{22}}{h_{21}}$	$\frac{-1}{h_{21}}$	t_{21}	t_{22}

对所有的参数集:$\Delta_p = p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}$。

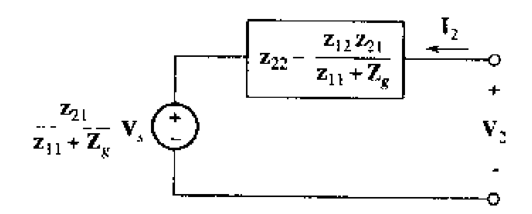


图 17.17　从输出端口看过来的双端口网络的戴维南等效电路,其参数用开路阻抗参数表示

如果信号源的阻抗为零,则上式可以简化为:

$$\mathbf{Z}_{out} = \frac{\mathbf{z}_{11}\mathbf{z}_{22} - \mathbf{z}_{12}\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{z}_{11}} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{22}} = \frac{1}{\mathbf{y}_{22}}, \quad (\mathbf{Z}_g = 0)$$

对于这个例子,输出导纳等于 $\mathbf{y}_{22}$,满足式(17.13)。

例题 17.8　给定下列阻抗参数:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 10^3 & 10 \\ -10^6 & 10^4 \end{bmatrix}$$

它表示三极管共发射极连接时的参数,求电压增益、电流增益、功率增益和输出阻抗。可以认为这个双端口网络受理想正弦电压源 $\mathbf{V}_s$ 与 500 Ω 电阻的串联所驱动,且该双端口网络的负载为10 kΩ电阻。

描述这个双端口网络的两个方程为:

$$\mathbf{V}_1 = 10^3\mathbf{I}_1 + 10\mathbf{I}_2 \tag{17.36}$$

$$\mathbf{V}_2 = -10^6\mathbf{I}_1 + 10^4\mathbf{I}_2 \qquad (17.37)$$

输入输出网络的特性方程为：

$$\mathbf{V}_s = 500\mathbf{I}_1 + \mathbf{V}_1 \qquad (17.38)$$

$$\mathbf{V}_2 = -10^4\mathbf{I}_2 \qquad (17.39)$$

根据这4个方程，可以很容易求得用 $\mathbf{V}_s$ 表示的 $\mathbf{V}_1$，$\mathbf{I}_1$，$\mathbf{V}_2$ 和 $\mathbf{I}_2$ 表达式：

$$\mathbf{V}_1 = 0.75\mathbf{V}_s \quad \mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_s}{2\,000}$$

$$\mathbf{V}_2 = -250\mathbf{V}_s \quad \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_s}{40}$$

根据这些结果，容易求出电压增益为：

$$\mathbf{G}_V = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = -333$$

电流增益为：

$$\mathbf{G}_I = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = 50$$

功率增益为：

$$G_P = \frac{\mathrm{Re}\left[-\frac{1}{2}\mathbf{V}_2\mathbf{I}_2^*\right]}{\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\mathbf{V}_1\mathbf{I}_1^*\right]} = 16\,670$$

输入阻抗为：

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = 1\,500\ \Omega$$

参考图17.17可以得到输出阻抗：

$$\mathbf{Z}_{out} = \mathbf{z}_{22} - \frac{\mathbf{z}_{12}\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{z}_{11} + \mathbf{Z}_g} = 16.67\ \mathrm{k\Omega}$$

根据最大功率传输理论，当 $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_{out}^* = 16.67\ \mathrm{k\Omega}$ 时获得最大的功率增益，相应的最大功率增益为17 045。

双端口网络并联时，使用 **y** 参数进行分析很有效，与之相对偶的是，当网络串联时，如图17.8所示，使用 **z** 参数可以简化问题。需要注意的是，串联连接和后面讨论传输参数时谈到的级联连接不同。如果每个网络的输入端和输出端有公共参考节点，而且这些参考点连接在一起，如图17.18所示，那么 $\mathbf{I}_1$ 流过这两个串联网络的输入端口，$\mathbf{I}_2$ 与之类似。因此，连接以后端口还是端口，这样 $\mathbf{I} = \mathbf{I}_A = \mathbf{I}_B$，且：

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_B = \mathbf{z}_A\mathbf{I}_A + \mathbf{z}_B\mathbf{I}_B$$
$$= (\mathbf{z}_A + \mathbf{z}_B)\mathbf{I} = \mathbf{z}\mathbf{I}$$

其中：

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_A + \mathbf{z}_B$$

因此 $\mathbf{z}_{11} = \mathbf{z}_{11A} + \mathbf{z}_{11B}$，其余类推。

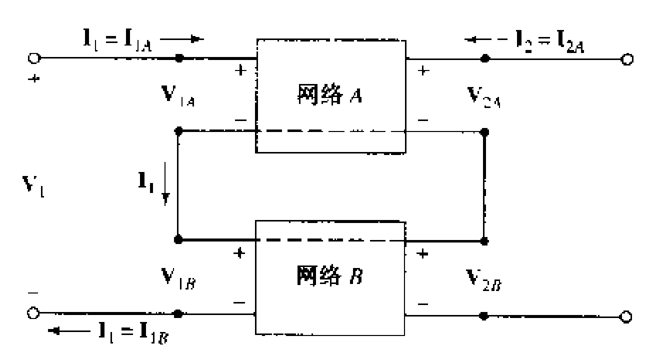


图 17.18 将两个双端口网络 4 个公共参考节点连接起来，得到双端口网络的串联连接，其阻抗参数为 $\mathbf{z} = \mathbf{z}_A + \mathbf{z}_B$

练习

17.8 (a)求图 17.19(a)所示双端口网络的 **z** 参数；(b)求图 17.19(b)所示双端口网络的 **z** 参数。

17.9 求图 17.19(c)所示双端口网络的 **z** 参数。

答案：17.8：$\begin{bmatrix} 45 & 25 \\ 25 & 75 \end{bmatrix}(\Omega)$，$\begin{bmatrix} 21.2 & 11.76 \\ 11.76 & 67.6 \end{bmatrix}(\Omega)$；17.9：$\begin{bmatrix} 70 & 100 \\ 50 & 150 \end{bmatrix}(\Omega)$

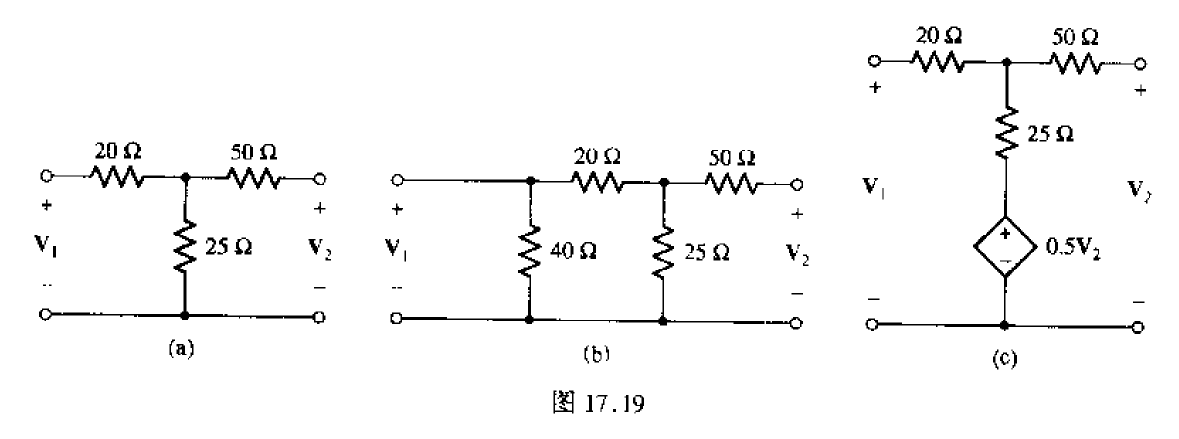


图 17.19

17.6 混合参数

测量双端口网络的某些参数时，有时可能会碰到困难，比如开路阻抗参数中 $\mathbf{z}_{21}$ 测量。对于三极管电路，虽然在其输出端放置正弦电流源是一件容易的事情，但是因为三极管电路的输出阻抗非常大，所以在测量输出端的电压时，很难做到在提供必要的直流偏置电压的情况下，使输出端开路，而测量输出端短路电流则要容易得多。

混合参数通过两个包含 $\mathbf{V}_1$，$\mathbf{I}_1$，$\mathbf{V}_2$ 和 $\mathbf{I}_2$ 的方程所定义，这里将 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$ 看做自变量：

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{h}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12}\mathbf{V}_2 \tag{17.40}$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22}\mathbf{V}_2 \tag{17.41}$$

即

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{h}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \tag{17.42}$$

为了明白这些参数的意义，首先令 $\mathbf{V}_2=0$；这时：

$$\mathbf{h}_{11}=\left.\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0}=\text{短路输入阻抗}$$

$$\mathbf{h}_{21}=\left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0}=\text{短路同向电流增益}$$

然后令 $\mathbf{I}_1=0$，可以得到：

$$\mathbf{h}_{12}=\left.\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{I}_1=0}=\text{开路反向电压增益}$$

$$\mathbf{h}_{22}=\left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{I}_1=0}=\text{开路输出导纳}$$

因为这些参数分别表示阻抗、导纳、电压增益和电流增益，因此将它们称为“混合”参数。

用混合参数描述晶体三极管模型时，它们的下标可以用简单的符号表示。这时，$\mathbf{h}_{11}$，$\mathbf{h}_{12}$，$\mathbf{h}_{21}$和$\mathbf{h}_{22}$分别表示成 $\mathbf{h}_i$，$\mathbf{h}_r$，$\mathbf{h}_f$ 和 $\mathbf{h}_o$，这些下标分别表示输入(input)、反向(reverse)、正向(forward)和输出(output)。

实际应用

晶体三极管的特性

通常用 **h** 参数来描述双极型晶体三极管的参数。晶体管是由贝尔实验室的研究人员在20世纪40年代发明的，它是一种非线性半导体器件，晶体管几乎是所有放大器和和数字逻辑电路的基础。晶体三极管的三个端子分别称为基极(b)、集电极(c)和发射极(e)，如图17.20(a)所示，这是根据它们对器件中的载流子所起的作用来命名的．通常采用发射极接地(也称为共发射极接法)来测量双极型晶体管的 **h** 参数，将基极作为输入，集电极作为输出。正如前面所提到的，由于晶体三极管是非线性器件，不可能定义适合于所有电压和电流的 **h** 参数，因此，通常 **h** 参数是在特定的集电极电流 I_C 和集电极电压 V_{CE} 的条件下给出的。该器件的非线性产生的另一个结果是其交流 **h** 参数和直流 **h** 参数通常在数值上相差甚远。

有许多测量晶体三极管 **h** 参数的仪表。半导体参数分析仪就是这样的一种仪表，如图17.20(b)所示，这种仪器可以画出特定电压(用横坐标表示)下的电流值(用纵坐标表示)，通过步进地改变基极电流可以画出一簇曲线。

下面来看一个例子，对于硅晶体三极管2N3904，制造商给出的输入阻抗 h_{ie}($\mathbf{h}_{11}$)为1.0到10 kΩ，电压反馈系数 h_{re}($\mathbf{h}_{12}$)为0.5到8.0×10^{-4}，小信号电流增益 h_{fe}($\mathbf{h}_{21}$)为100到400，输出导纳 h_{oe}($\mathbf{h}_{22}$)为1.0到40 μmhos[①] 注意到制造商采用了不同符号来表示这些参数，而且只给出了交流参数。上述参数是在 $I_C=1.0$ mA，$V_{CE}=10$ V(直流)和 $f=1.0$ kHz 时测得的。出于

① 姆欧，欧姆的倒数——译者注。

兴趣，本书的作者之一和他的一个朋友决定亲自测量一下这些参数。他们使用图 17.20(b)所示的仪器对这种器件进行测量，测得的结果为：

$$h_{oe} = 3.3\ \mu\text{mhos} \qquad h_{fe} = 109$$

$$h_{ie} = 3.02\ \text{k}\Omega \qquad h_{re} = 4 \times 10^{-3}$$

前三个参数在制造商给出的范围之内，并且与给出的最小值很接近与最大值都相差较远。但是 h_{re} 的值比制造商给出的值大一个数量级！这很让人奇怪，因为我们认为在测量时已经做得非常好了。

经过仔细考虑，意识到实验的过程使得器件温度升高了，因为为了得到图 17.20(b)所示的轨迹，在 $I_C = 1$ mA 上下进行扫描。遗憾的是，晶体三极管的特性随温度变化非常显著，而制造商给出是温度为 25℃时的值。通过改变扫描方式，使器件的发热量减到最小后，得到 h_{re} 的值为 2.0×10^{-4}。显然，线性电路比较容易对付，但是非线性电路却要有趣得多！

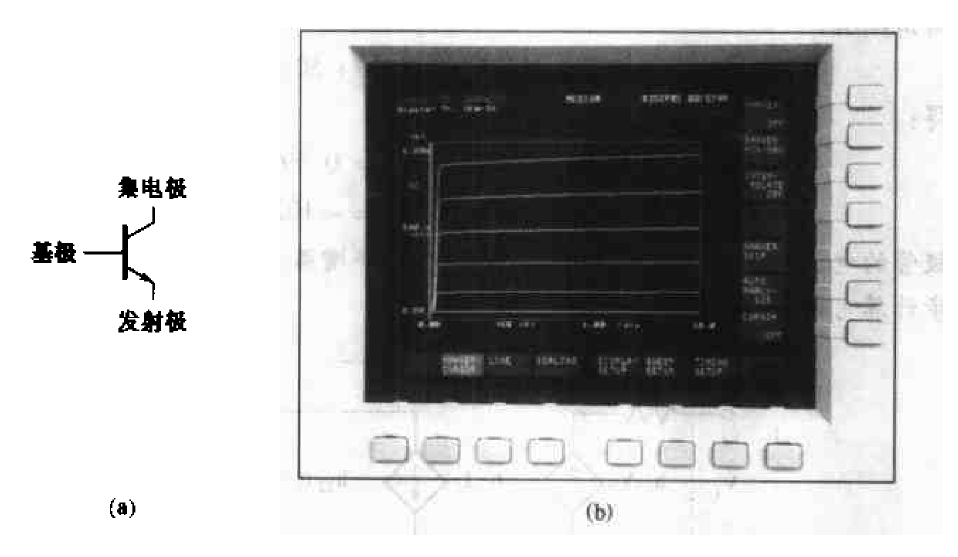


图 17.20　(a)双极型晶体三极管的符号；(b)用半导体参数分析仪 HP 4155A 绘制出的双极型结型晶体管 2N3904 的特性曲线，可以根据这些曲线来测量晶体管的 h 参数

例题 17.9　求图 17.21 所示的双向阻性电路的 h 参数

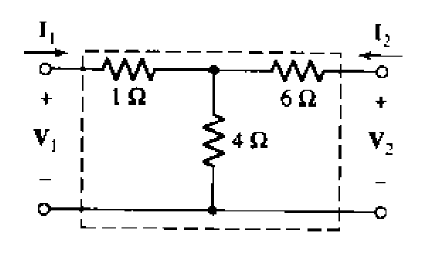


图 17.21　求该双向网络的 h 参数

令输出端短路($\mathbf{V}_2 = 0$)，在输入端放置 1 A 电流源($\mathbf{I}_1 = 1$ A)时，输入电压为3.4 V($\mathbf{V}_1 = 3.4$ V)，因此，$\mathbf{h}_{11} = 3.4\ \Omega$。在同样的条件下，根据分流原理，可以很容易求得输出电流 $\mathbf{I}_2 = -0.4$ A，因此，$\mathbf{h}_{21} = -0.4$。

剩下的两个参数可以通过令输入开路($\mathbf{I}_1 = 0$)，然后在输出端放置一个 1 V 电压源($\mathbf{V}_2 =$

1 V)来得到。这时,输入端的电压为 0.4 V($\mathbf{V}_1$ = 0.4 V),因此 $\mathbf{h}_{12}$ = 0.4;输出端的电流为 0.1 A($\mathbf{I}_2$ = 0.1 A),因此 $\mathbf{h}_{22}$ = 0.1 S。

因此可以得到 $\mathbf{h}=\begin{bmatrix}3.4\ \Omega & 0.4\\ -0.4 & 0.1\ \mathrm{S}\end{bmatrix}$。$\mathbf{h}_{12} = -\mathbf{h}_{21}$是因为双向网络的互易性。

图 17.22 所示电路是根据定义 h 参数的两个方程式(17.40)和式(17.41)直接画出的。第一个方程表示输入回路的 KVL 方程,第二个方程表示输出端上端节点的 KCL 方程。假定这个共发射极连接的合理的 h 参数为:$\mathbf{h}_{11}$ = 1 200 Ω,$\mathbf{h}_{12} = 2\times10^{-4}$,$\mathbf{h}_{21}$ = 50,$\mathbf{h}_{22} = 50\times10^{-6}$ S。假定输入端为信号发生器,可以将其看成 $1\angle 0°$ mV 的电压源与 800 Ω 电阻的串联,输出端的负载为5 kΩ电阻。这时,对于输入端有:

$$10^{-3} = (1\,200 + 800)\mathbf{I}_1 + 2\times10^{-4}\mathbf{V}_2$$

对于输出端有:

$$\mathbf{I}_2 = -2\times10^{-4}\mathbf{V}_2 = 50\mathbf{I}_1 + 50\times10^{-6}\mathbf{V}_2$$

解之得:

$$\mathbf{I}_1 = 0.510\ \mu\mathrm{A}\quad \mathbf{V}_1 = 0.592\ \mathrm{mV}$$
$$\mathbf{I}_2 = 20.4\ \mu\mathrm{A}\quad \mathbf{V}_2 = -102\ \mathrm{mV}$$

该三极管的电流增益为 40,电压增益为 -172,功率增益为 6 880。其输入阻抗为 1 160 Ω,进一步计算可以求得输出阻抗为 22.2 kΩ。

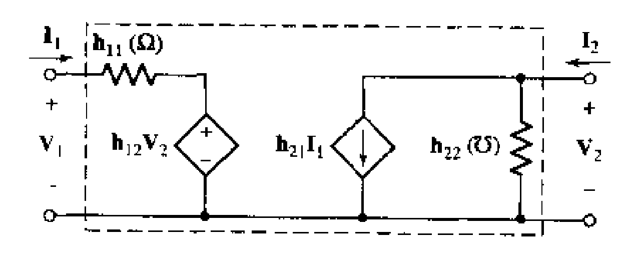


图 17.22 用 4 个 h 参数表示双端口网络,相应的方程组为$\mathbf{V}_1 = \mathbf{h}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12}\mathbf{V}_2$和$\mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22}\mathbf{V}_2$

当双端口网络的输入端串联而输出端并联时,它们的混合参数可以直接相加,这种连接方式称为串-并连接,但比较少用。

练习

17.10 (a) 求图 17.23(a)所示双端口网络的 h 参数;(b) 求图 17.23(b)所示双端口网络的 h 参数。

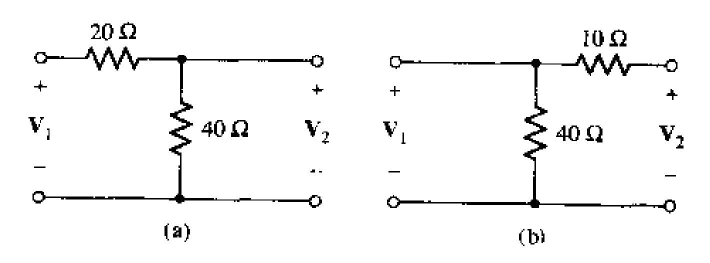


图 17.23

17.11　如果 $\mathbf{h}=\begin{bmatrix} 5\ \Omega & 2 \\ -0.5 & 0.1\ \text{S} \end{bmatrix}$，求(a)$\mathbf{y}$；(b)$\mathbf{z}$。

答案：17.10：$\begin{bmatrix} 20\ \Omega & 1 \\ -1 & 25\ \text{mS} \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 8\ \Omega & 0.8 \\ -0.8 & 20\ \text{mS} \end{bmatrix}$；17.11：$\begin{bmatrix} 0.2 & -0.4 \\ -0.1 & 0.3 \end{bmatrix}(\text{S})$，$\begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}(\Omega)$

17.7　传输参数

最后要介绍的一种双端口网络参数称为 **t** 参数、**ABCD** 参数，或者称为传输参数。它们通过下面的方程来定义：

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{t}_{11}\mathbf{V}_2 - \mathbf{t}_{12}\mathbf{I}_2 \tag{17.43}$$

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{t}_{21}\mathbf{V}_2 - \mathbf{t}_{22}\mathbf{I}_2 \tag{17.44}$$

即

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{t}\begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \tag{17.45}$$

其中 $\mathbf{V}_1$，$\mathbf{V}_2$，$\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$ 的定义和以前一样(图 17.5)。需要将方程(17.43)和方程(17.44)中的负号和输出电流看做一个整体，即看成($-\mathbf{I}_2$)，因此，$\mathbf{I}_1$ 和 $-\mathbf{I}_2$ 均指向右边，与能量或者信号的传输方向一致。

传输参数的另一种广泛采用的记法为：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}_{11} & \mathbf{t}_{12} \\ \mathbf{t}_{21} & \mathbf{t}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \tag{46}$$

注意，上面的 **t** 矩阵和 **ABCD** 矩阵中没有负号。

重新来看方程(17.43)到方程(17.45)，可以看到方程左边的变量为输入电压 $\mathbf{V}_1$ 和输入电流 $\mathbf{I}_1$，通常认为是已知量或者是自变量，而因变量为输出量 $\mathbf{V}_2$ 和 $\mathbf{I}_2$。传输参数给出了输入和输出之间的直接关系，因此，传输参数常用于传输线分析和级联网络中。

下面我们来求图 17.24(a)所示的双向阻性双端口网络的 **t** 参数。为了说明如何求得 **t** 参数中的某一个参数，考虑：

$$\mathbf{t}_{12} = \left.\frac{\mathbf{V}_1}{-\mathbf{I}_2}\right|_{\mathbf{V}_2=0}$$

因此，将输出短路($\mathbf{V}_2=0$)并使 $\mathbf{V}_1=1\ \text{V}$，如图 17.24(b)所示。需要注意的是，不能通过在输出端放置一个 1 A 电流源而使上式分母为 1，因为已经将其短路了。从 1 V 电压源看过去的等效阻抗为 $R_{eq}=2+(4\parallel 10)\ \Omega$，根据分流原理，可得：

$$-\mathbf{I}_2 = \frac{1}{2+(4\parallel 10)}\times\frac{10}{10+4} = \frac{5}{34}\ \text{A}$$

因此：

$$\mathbf{t}_{12} = \frac{1}{-\mathbf{I}_2} = \frac{34}{5} = 6.8\ \Omega$$

如果需要求出所有 **t** 参数，可以通过列出含有四个端点变量 $\mathbf{V}_1$，$\mathbf{V}_2$，$\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$ 的方程组来得到。如图 17.24(a)，可以列出两个网孔方程：

$$\mathbf{V}_1 = 12\mathbf{I}_1 + 10\mathbf{I}_2 \tag{17.47}$$

$$\mathbf{V}_2 = 10\mathbf{I}_1 + 14\mathbf{I}_2 \tag{17.48}$$

从式(17.48)求出 $\mathbf{I}_1$ 的表达式，得：

$$\mathbf{I}_1 = 0.1\mathbf{V}_2 - 1.4\mathbf{I}_2$$

因此 $\mathbf{t}_{21} = 0.1\ \text{S}, \mathbf{t}_{22} = 1.4$。用上式替换式(17.47)中的 $\mathbf{I}_1$，可以得到：

$$\mathbf{V}_2 = 12(0.1\mathbf{V}_2 - 1.4\mathbf{I}_2) + 10\mathbf{I}_2 = 1.2\mathbf{V}_2 - 6.8\mathbf{I}_2$$

于是 $\mathbf{t}_{11} = 1.2, \mathbf{t}_{12} = 6.8\ \Omega$(和前面求得的结果一致)。

对于互易网络，t 矩阵的行列式为：

$$\Delta_t = \mathbf{t}_{11}\mathbf{t}_{22} - \mathbf{t}_{12}\mathbf{t}_{21} = 1$$

对于图 17.24 所示的阻性双端口网络，$\Delta_t = 1.2 \times 1.4 - 6.8 \times 0.1 = 1$，满足上面的等式！

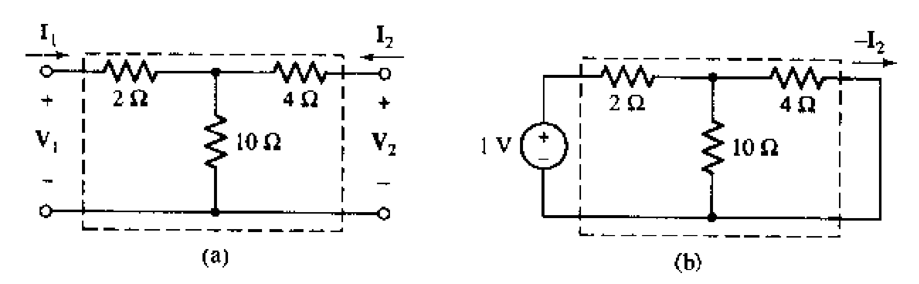


图 17.24 (a)一个阻性双端口网络，求其 t 参数；(b)为了求 $\mathbf{t}_{12}$，令 $\mathbf{V}_1 = 1\text{V}, \mathbf{V}_2 = 0$，则 $\mathbf{t}_{12} = 1/(-\mathbf{I}_2) = 6.8\Omega$

在结束关于双端口网络的讨论之前，考虑两个双端口网络的级联情况，如图 17.25 所示，图中已经标出了每个双端口网络的端口电压和电流。网络 A 的 t 参数为：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{t}_A \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{t}_A \begin{bmatrix} \mathbf{V}_3 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}$$

网络 B 的 t 参数为：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_3 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{t}_B \begin{bmatrix} \mathbf{V}_4 \\ -\mathbf{I}_4 \end{bmatrix}$$

图 17.25 双端口网络 A 和网络 B 级联时，级联网络的 t 参数可以用矩阵的乘积来表示，即 $\mathbf{t} = \mathbf{t}_A\mathbf{t}_B$

将上面的结果合并，可得：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{t}_A\mathbf{t}_B \begin{bmatrix} \mathbf{V}_4 \\ -\mathbf{I}_4 \end{bmatrix}$$

因此，级联网络的 t 参数等于矩阵的乘积：

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_A\mathbf{t}_B$$

这里的乘积不是通过将矩阵相应的元素相乘得到。如果需要，可以参看附录 B 中有关矩阵乘法的计算方法。

例题 17.10　求图 17.26 所示的级联网络的 t 参数

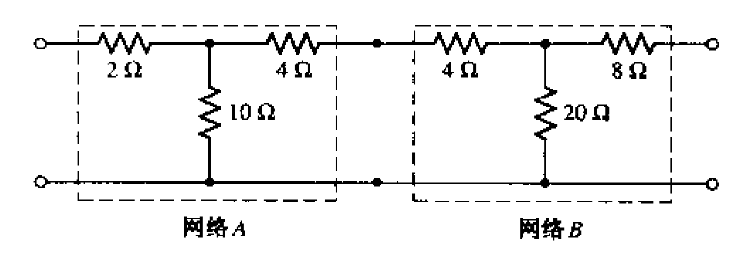


图 17.26　两个双端口网络的级联

网络 A 为图 17.24 所示的双端口网络，因此：

$$\mathbf{t}_A = \begin{bmatrix} 1.2 & 6.8\ \Omega \\ 0.1\ \mathrm{S} & 1.4 \end{bmatrix}$$

网络 B 的所有电阻值均为网络 A 中相应电阻值的两倍，因此：

$$\mathbf{t}_B = \begin{bmatrix} 1.2 & 13.6\ \Omega \\ 0.05\ \mathrm{S} & 1.4 \end{bmatrix}$$

对于级联网络，有：

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_A\mathbf{t}_B = \begin{bmatrix} 1.2 & 6.8 \\ 0.1 & 1.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.2 & 13.6 \\ 0.05 & 1.4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.2\times 1.2 + 6.8\times 0.05 & 1.2\times 13.6 + 6.8\times 1.4 \\ 0.1\times 1.2 + 1.4\times 0.05 & 0.1\times 13.6 + 1.4\times 1.4 \end{bmatrix}$$

因此：

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 1.78 & 25.84\ \Omega \\ 0.19\ \mathrm{S} & 3.32 \end{bmatrix}$$

练习

17.12　已知 $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 3.2 & 8\ \Omega \\ 0.2\ \mathrm{S} & 4 \end{bmatrix}$，求(a)z 参数；(b)将两个这样的网络级联后的 t 参数；(c)将两个这样的网络级联后的 z 参数。

答案：$\begin{bmatrix} 16 & 56 \\ 5 & 20 \end{bmatrix}(\Omega)$；$\begin{bmatrix} 11.84 & 57.6\ \Omega \\ 1.44\ \mathrm{S} & 17.6 \end{bmatrix}$；$\begin{bmatrix} 8.22 & 87.1 \\ 0.694 & 12.22 \end{bmatrix}(\Omega)$。

计算机辅助分析

使用 t 参数来描述双端口网络的特性可以大大简化对双口级联网络的分析。比如本节中所举的例子，其中：

$$\mathbf{t}_A = \begin{bmatrix} 1.2 & 6.8\ \Omega \\ 0.1\ \mathrm{S} & 1.4 \end{bmatrix}$$

以及：

$$\mathbf{t}_B = \begin{bmatrix} 1.2 & 13.6\,\Omega \\ 0.05\,\text{S} & 1.4 \end{bmatrix}$$

可以看到，只要将 $\mathbf{t}_A$ 和 $\mathbf{t}_B$ 相乘就可以得到级联网络的 t 参数：

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_A \cdot \mathbf{t}_B$$

这样的矩阵运算可以使用计算器或者类似 MATLAB 的软件包来计算。比如，MATLAB 的语句如下：

```
EDU >> tA = [1.2 6.8;0.1 1.4];
EDU >> tB = [1.2 13.6;0.05 1.4];
EDU >> t = tA * tB

t =
    1.7800   25.8400
    0.1900    3.3200
```

这和例题 17.10 中得到的结果一致。

MATLAB 中的矩阵名称是大小写敏感的（比如本例中的 tA，tB 和 t）。MATLAB 的矩阵元素是按行输入的，第一行为起始行，行与行之间通过分号隔开。再次提醒读者，必须时刻注意矩阵运算的顺序，比如 tB * tA 将与上面求得的结果大相径庭：

$$\mathbf{t}_B \cdot \mathbf{t}_A = \begin{bmatrix} 2.8 & 27.2 \\ 0.2 & 2.3 \end{bmatrix}$$

对于简单的矩阵相乘（比如本例），使用科学计算器就可以算出。但是，对于更大的级联网络，更适合于使用计算机来计算，因为这时可以非常方便地在屏幕上同时看到所有的矩阵。

17.8 小结与复习

- 使用本章所介绍的分析方法时特别需要记住的是，每个端口必须连接到一个单端口网络或者另一个多端口网络的其中一个端口上。
- 双端口网络的导纳（y）参数由下面的方程定义：

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{y}_{11}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_2 \quad 和 \quad \mathbf{I}_2 = \mathbf{y}_{21}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_2$$

其中：

$$\mathbf{y}_{11} = \left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0} \qquad \mathbf{y}_{12} = \left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{V}_1=0}$$

$$\mathbf{y}_{21} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0} \qquad \mathbf{y}_{22} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{V}_1=0}$$

- 双端口网络的阻抗(**z**)参数由下面的方程定义：

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2 \quad \text{和} \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2$$

- 双端口网络的混合(**h**)参数由下面的方程定义：

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{h}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12}\mathbf{V}_2 \quad \text{和} \quad \mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22}\mathbf{V}_2$$

- 双端口网络的传输(**t**)参数(也称为 **ABCD** 参数)由下面的方程定义：

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{t}_{11}\mathbf{V}_2 - \mathbf{t}_{12}\mathbf{I}_2 \quad \text{和} \quad \mathbf{I}_1 = \mathbf{t}_{21}\mathbf{V}_2 - \mathbf{t}_{22}\mathbf{I}_2$$

- 根据电路分析的需要，可以将 **h**，**z**，**t** 和 **y** 参数相互转换，表 17.1 给出了它们之间的转换公式。

习题

1. 求图 17.27 所示网络的 Δ_Z，然后根据所得的结果，分别求出将 100 V 的直流电压源分别插入图中外围支路的(a)网孔 1；(b)网孔 2；(c)网孔 3 时电源输出的功率。
2. 求图 17.28 所示网络的 Δ_Y，然后根据所得的结果，分别求出将 10 A 的直流电流源插入图中参考节点与下例节点之间时电源输出的功率：(a)节点 1；(b)节点 2；(c)节点 3。

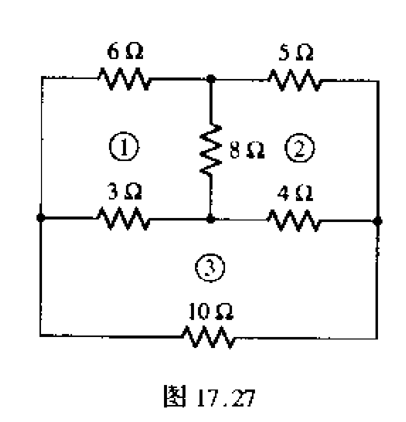


图 17.27

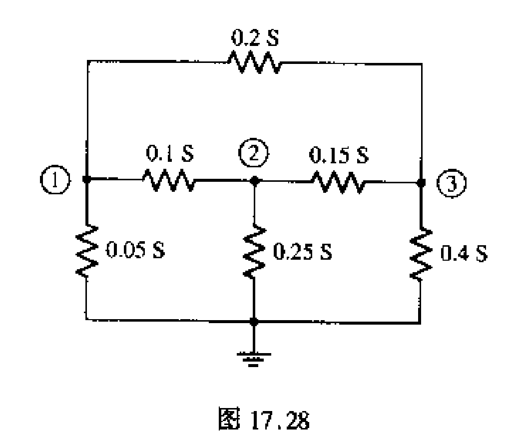
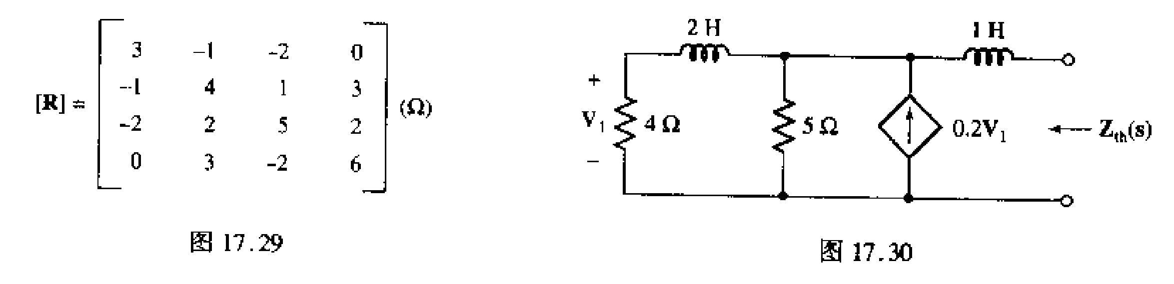


图 17.28

3. 图 17.29 为某单端口网络的阻抗矩阵，求将电源置于网孔 1 时的 R_{in}。
4. 求图 17.30 所示单端口网络的戴维南等效阻抗 $\mathbf{Z}_{th}(\mathbf{s})$。



$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \end{bmatrix} (\Omega)$$

图 17.29　　图 17.30

5. 按照下述步骤求图 17.31 所示单端口网络的 $\mathbf{Z}_{in}$：(a)求 Δ_Z；(b)首先求出 Δ_Y 和 $\mathbf{Y}_{in}$，然后求 $\mathbf{Z}_{in}$。
6. 求图 17.32 所示网络的输出阻抗，用 **s** 函数表示。

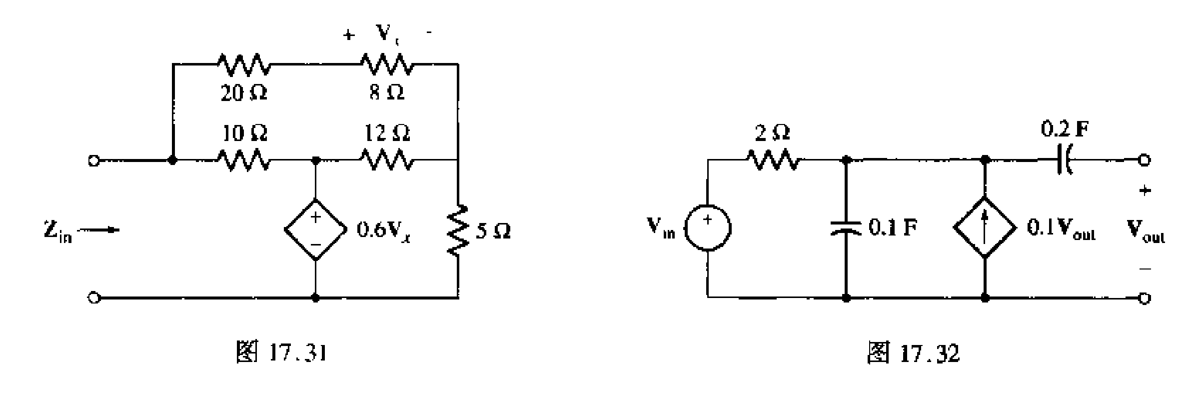


图 17.31　　　　图 17.32

7. 设图 17.33 所示的运放为理想运算($R_i = \infty$, $R_o = 0$, $A = \infty$),求 R_{in}。

8. (a)如果图 17.34 所示的两个运放均为理想运算($R_i = \infty$, $R_o = 0$, $A = \infty$),求 $\mathbf{Z}_{in}$;(b)$R_1 = 4\ \text{k}\Omega$, $R_2 = 10\ \text{k}\Omega$, $R_3 = 10\ \text{k}\Omega$, $R_4 = 1\ \text{k}\Omega$, $C = 200\ \text{pF}$,证明 $\mathbf{Z}_{in} = j\omega L_{in}$,其中 $L_{in} = 0.8\ \text{mH}$。

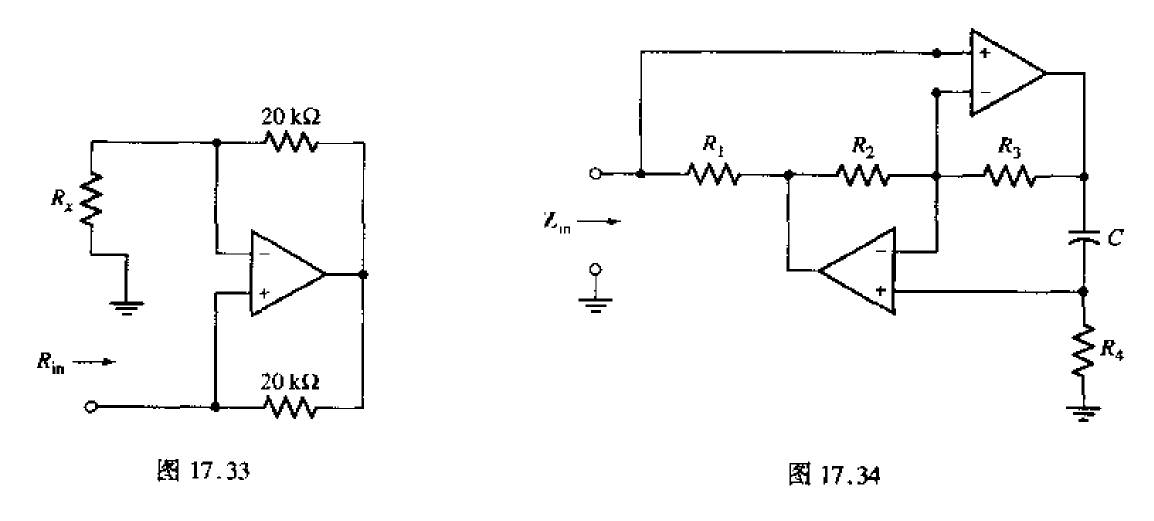


图 17.33　　　　图 17.34

9. 求图 17.35 所示双端口网络的 $\mathbf{y}_{11}$ 和 $\mathbf{y}_{12}$。

10. 设图 17.36 所示双端口网络的 y 参数为 $\mathbf{y}_{11} = 10$, $\mathbf{y}_{12} = -5$, $\mathbf{y}_{21} = 50$, $\mathbf{y}_{22} = 20$,所有单位均为 mS,求当 $\mathbf{V}_s = 100\ \text{V}$, $R_s = 25\ \Omega$, $R_L = 100\ \Omega$ 时 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$ 的值。

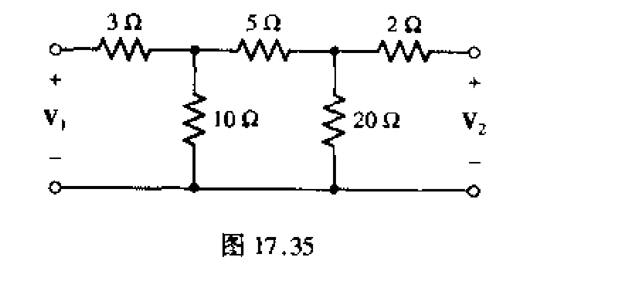


图 17.35

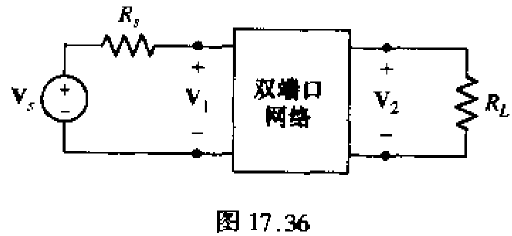


图 17.36

11. 求图 17.37 所示网络的 y 参数。

12. 求图 17.38 所示双端口网络的 y 参数。

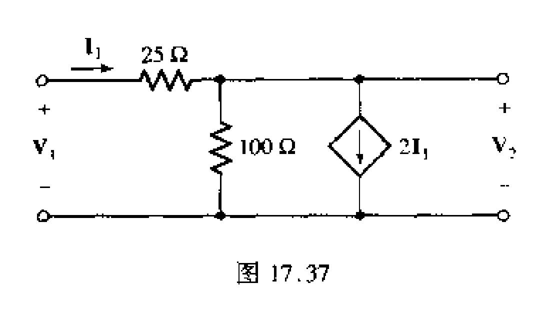


图 17.37

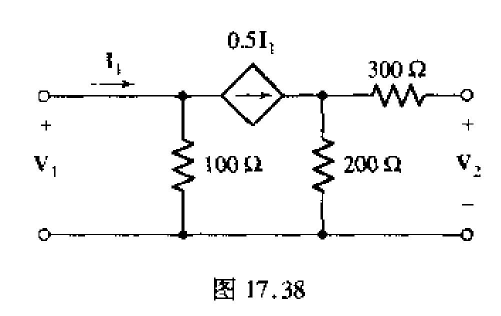


图 17.38

13．令图 17.39 所示双端口网络的 y 参数为$[\mathbf{y}]=\begin{bmatrix}0.1 & -0.0025\\ -8 & 0.005\end{bmatrix}$(S)。(a)求 $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1$，$\mathbf{I}_2/\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{V}_1/\mathbf{I}_1$；(b)移去 5 Ω 电阻，并用短路线替换 1 V 电源，求 $\mathbf{V}_2/\mathbf{I}_2$。

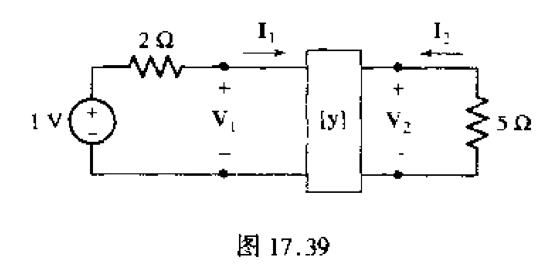
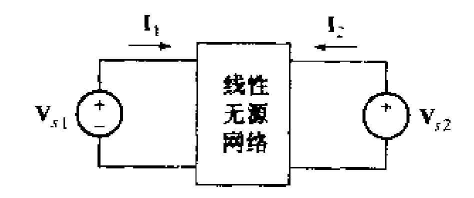


图 17.39

14．某双端口网络的导纳参数为$[\mathbf{y}]=\begin{bmatrix}10 & -5\\ -20 & 2\end{bmatrix}$(mS)。分别采用下面的方式将一个 100 Ω 电阻连接到该双端口网络中，求出连接后的[y]：(a)串联连接到输入端的一个端子；(b)串联连接到输出端的一个端子。

15．根据图 17.40，将下表补充完整，并求出 y 参数。



	V_{s1} (V)	V_{s2} (V)	I_1 (A)	I_2 (A)
Exp't #1	100	50	5	−32.5
Exp't #2	50	100	−20	−5
Exp't #3	20	0		
Exp't #4			5	0
Exp't #5			5	15

图 17.40

16．使用 Y-Δ 转换或 Δ-Y 转换求图 17.41 所示单端口网络的 R_{in}。

17. 使用 Y-Δ 转换或 Δ-Y 转换求图 17.42 所示单端口网络的输入阻抗。

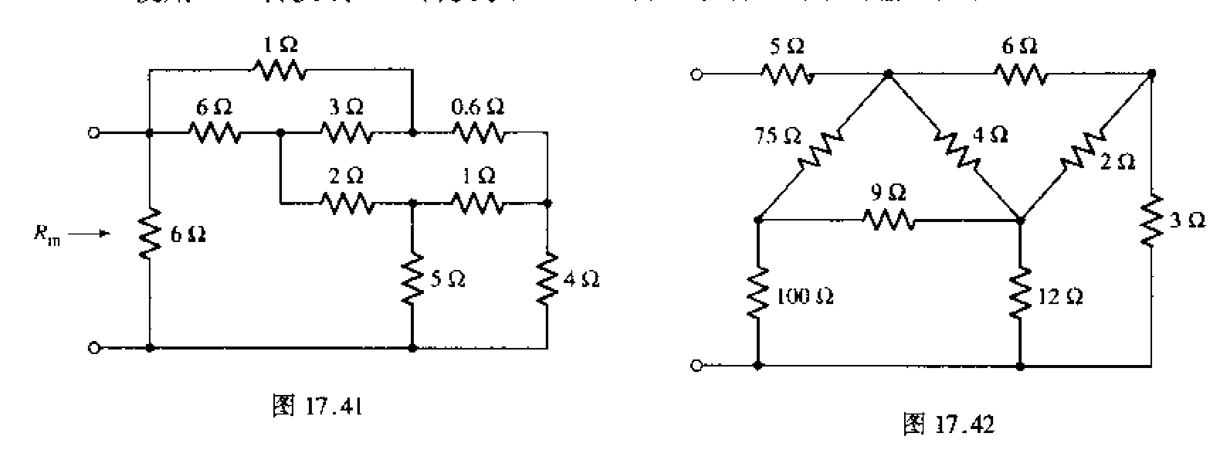


图 17.41

图 17.42

18. 求图 17.43 所示网络的 $\mathbf{Z}_{in}$。

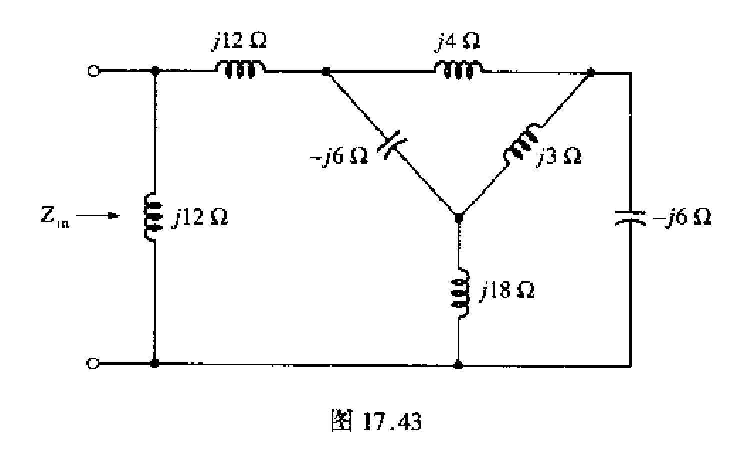


图 17.43

19. 设图 17.44 所示双端口网络的 **y** 参数为 $[\mathbf{y}]=\begin{bmatrix} 0.4 & -0.002 \\ -5 & 0.04 \end{bmatrix}$(S)，求(a)$\mathbf{G}_V$；(b)$\mathbf{G}_I$；(c)$G_P$；(d)$\mathbf{Z}_{in}$；(e)$\mathbf{Z}_{out}$。

20. 设图 17.45 所示双端口网络的 **y** 参数为 $[\mathbf{y}]=\begin{bmatrix} 0.1 & -0.05 \\ -0.5 & 0.2 \end{bmatrix}$(S)，求(a)$\mathbf{G}_V$；(b)$\mathbf{G}_I$；(c)$G_P$；(d)$\mathbf{Z}_{in}$；(e)$\mathbf{Z}_{out}$。(f)使 $\mathbf{V}_s=0$ 并移去负载 R_L，这时 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$ 的比值 $\mathbf{V}_1/\mathbf{V}_2$ 称为反向电压增益 $\mathbf{G}_{V,rev}$，计算 $\mathbf{G}_{V,rev}$。(g)插入功率增益 G_{ins} 定义为接入双端口网络时 5 Ω 电阻吸收的功率 $P_{5\Omega}$ 与去掉双端口网络，并用跳线将输入口的两个端子分别与相应的输出口两个端子短接后 5 Ω 电阻吸收的功率 $P_{5\Omega}$ 的比值，求 G_{ins}。

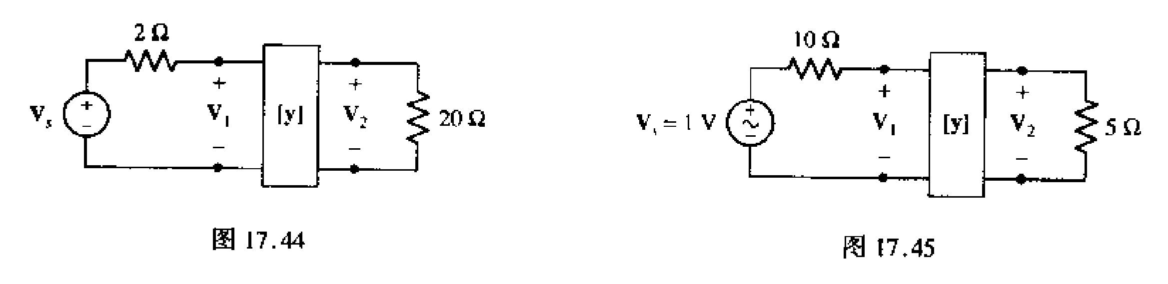


图 17.44

图 17.45

21. (a)按照图 17.9(b)的形式画出$[\mathbf{y}]=\begin{bmatrix}1.5 & -1\\ 4 & 3\end{bmatrix}$(mS)相应的等效电路;(b)如果将两个这样的双端口网络并联起来,画出并联后的等效电路并证明新的 y 参数$[\mathbf{y}]_{new}=2[\mathbf{y}]$。

22. (a)求出图 17.46(a)所示双端口网络的 y 参数$[\mathbf{y}]_a$;(b)求图 17.46(b)所示双端口网络的 y 参数$[\mathbf{y}]_b$;(c)画出这两个双端口网络并联后的电路图,然后证明其 y 参数$[\mathbf{y}]=[\mathbf{y}]_a+[\mathbf{y}]_b$。

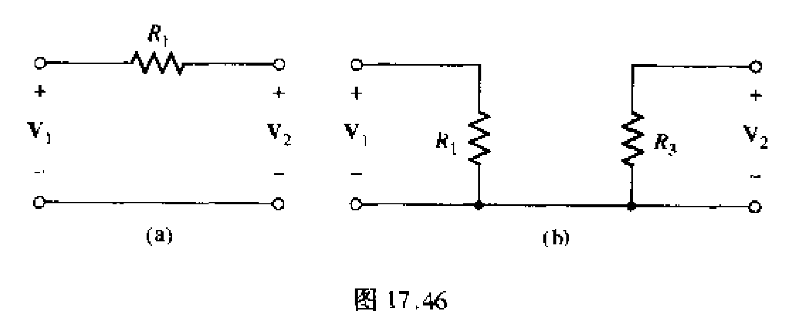


图 17.46

23. 求图 17.47 所示双端口网络的 z 参数$[\mathbf{z}]$。

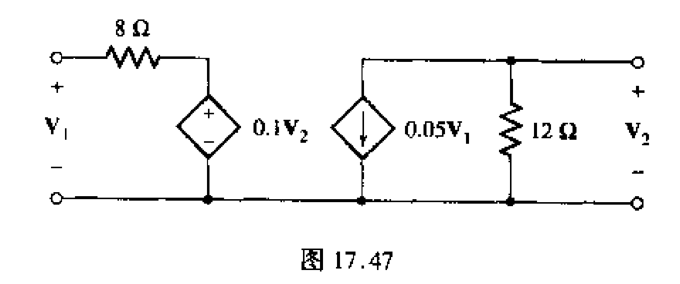


图 17.47

24. (a)求图 17.48 所示双端口网络的 z 参数$[\mathbf{z}]$;(b)如果$\mathbf{I}_1=\mathbf{I}_2=1$ A,求电压增益$\mathbf{G}_V$。

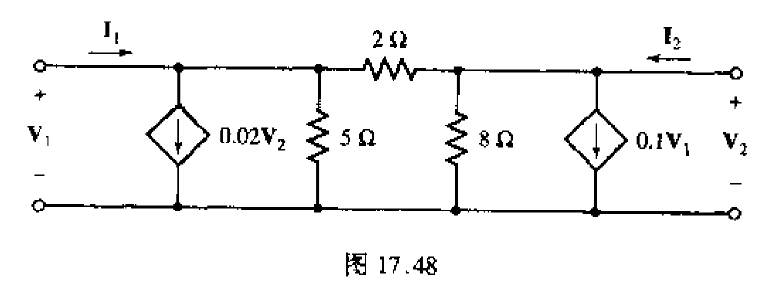


图 17.48

25. 某双端口网络的 z 参数为$[\mathbf{z}]=\begin{bmatrix}4 & 1.5\\ 10 & 3\end{bmatrix}$(Ω)。在输入端接上电源$\mathbf{V}_s$与5 Ω电阻的串联组合,在输出端接上负载$R_L=2$ Ω后,求(a)$\mathbf{G}_I$;(b)$\mathbf{G}_V$;(c)G_P;(d)$\mathbf{Z}_{in}$;(e)$\mathbf{Z}_{out}$。

26. 设图 17.49 所示双端口网络的 z 参数为$[\mathbf{z}]=\begin{bmatrix}1\,000 & 100\\ -2\,000 & 400\end{bmatrix}$(Ω)。求(a)传输到 200 Ω 电阻上的平均功率;(b)传输到 500 Ω 电阻上的平均功率;(c)传输到双端口网络上的平均功率。

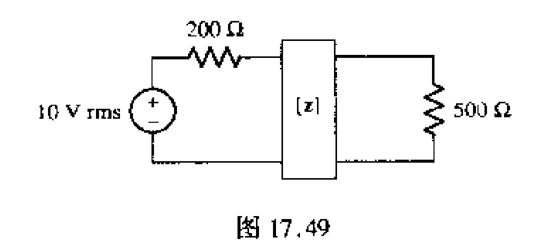


图 17.49

27. 对于图 17.50 所示的三极管高频等效电路，求 $\omega = 10^8$ rad/s 时的 **z** 参数。

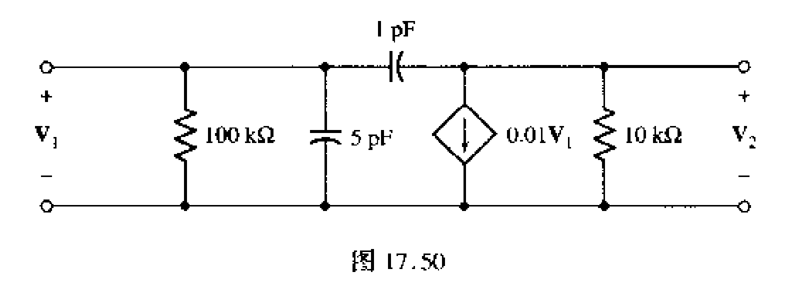


图 17.50

28. 某 **z** 参数为 $[\mathbf{z}] = \begin{bmatrix} 20 & 2 \\ 40 & 10 \end{bmatrix}(\Omega)$ 由电源 $\mathbf{V}_s = 100\underline{/0°}$ V 和5 Ω电阻的串联组合驱动，其输出端接有25 Ω的电阻。求从25 Ω电阻看过去的戴维南等效电路。

29. 某双端口网络的 **h** 参数为 $[\mathbf{h}] = \begin{bmatrix} 9\ \Omega & -2 \\ 20 & 0.2\ \mathrm{S} \end{bmatrix}$. 分别求出将一个1 Ω电阻串接到(a)输入端和(b)输入端后接双端口网络的 **h** 参数。

30. 求某双端口网络在内阻为 $R_s = 100\ \Omega$ 电源的驱动下，负载为 $R_L = 500\ \Omega$ 时的 $\mathbf{Z}_{in}$ 和 $\mathbf{Z}_{out}$，设该双端口网络的 **h** 参数为 $[\mathbf{h}] = \begin{bmatrix} 100\ \Omega & 0.01 \\ 20 & 1\ \mathrm{mS} \end{bmatrix}$。

31. 参看图 17.51 所示的双端口网络，求(a)$\mathbf{h}_{12}$；(b)$\mathbf{z}_{12}$；(c)$\mathbf{y}_{12}$。

32. 设图 17.52 所示双端口网络的 **h** 参数为 $\mathbf{h}_{11} = 1\ \mathrm{k\Omega}$, $\mathbf{h}_{12} = -1$, $\mathbf{h}_{21} = 4$, $\mathbf{h}_{22} = 500\ \mu\mathrm{S}$。分别求出传输到下列器件的平均功率：(a) $R_s = 200\ \Omega$；(b) $R_L = 1\ \mathrm{k\Omega}$；(c)整个双端口网络。

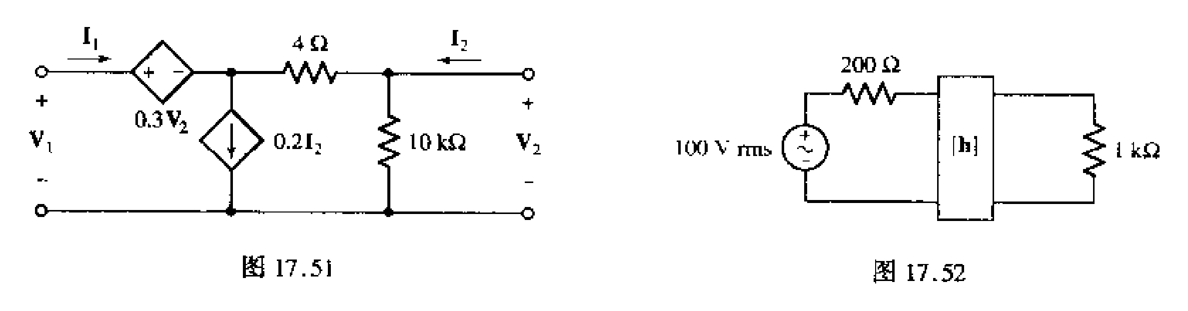


图 17.51

图 17.52

33. (a)求图 17.53 所示双端口网络的 **h** 参数[**h**]；(b)如果在输入端接上电源 $\mathbf{V}_s$ 与 $R_s = 200\ \Omega$ 电阻的串联组合，求 $\mathbf{Z}_{out}$。

34. 分别求出图 17.54 所示的两个双端口网络的[**y**]，[**z**]和[**h**]参数。如果某个参数值为无穷大，则跳过该参数矩阵。

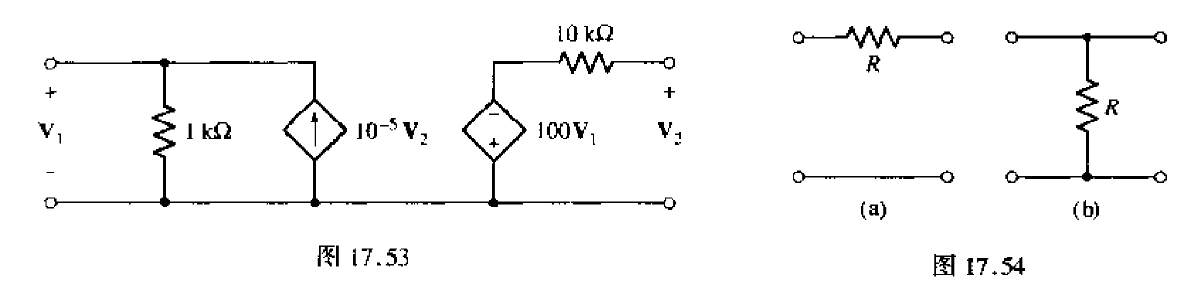


图 17.53　　　　图 17.54

35. 给定矩阵：$[\mathbf{y}]=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$，$[\mathbf{b}]=\begin{bmatrix}4 & 6\\ -1 & 5\end{bmatrix}$，$[\mathbf{c}]=\begin{bmatrix}3 & 2 & 4 & -1\\ -2 & 3 & 5 & 0\end{bmatrix}$，$[\mathbf{d}]=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 5\\ -2 & -3 & 1\\ 4 & -4 & 2\end{bmatrix}$，计算：(a)$[\mathbf{y}][\mathbf{b}]$；(b)$[\mathbf{b}][\mathbf{y}]$；(c)$[\mathbf{b}][\mathbf{c}]$；(d)$[\mathbf{c}][\mathbf{d}]$；(e)$[\mathbf{y}][\mathbf{b}][\mathbf{c}][\mathbf{d}]$。

36. (a)求图 17.55 所示双端口网络的 t 参数$[\mathbf{t}]$；(b)如果电源的内阻 $R_s=15\ \Omega$，求该双端口网络的 $\mathbf{Z}_{out}$。

37. 求图 17.56 所示双端口网络的$[\mathbf{t}]$。

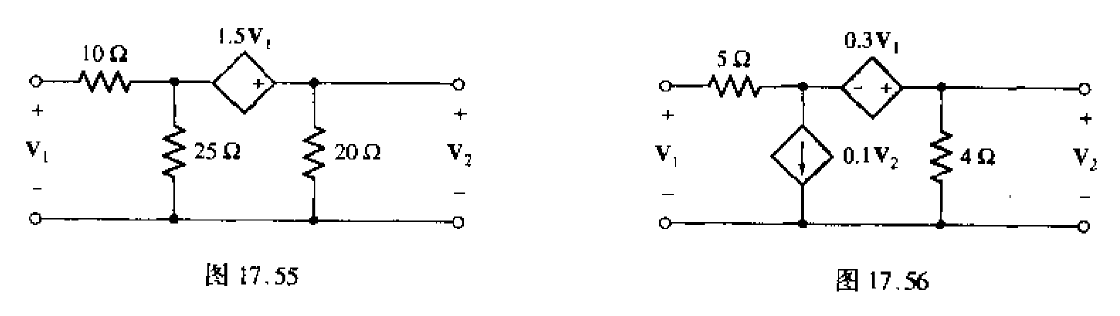


图 17.55　　　　图 17.56

38. (a)分别求出图 17.57 所示的级联双端口网络的$[\mathbf{t}]_A$，$[\mathbf{t}]_B$ 和$[\mathbf{t}]_C$；(b)求出这 6 个电阻双端口网络的$[\mathbf{t}]$。

39. (a)求图 17.58 所示的 2 Ω 电阻构成的双端口网络的$[\mathbf{t}]_A$；(b)将图中的 2 Ω 电阻替换成10 Ω电阻后得到新的双端口网络，证明其 t 参数等于$([\mathbf{t}]_A)^5$。

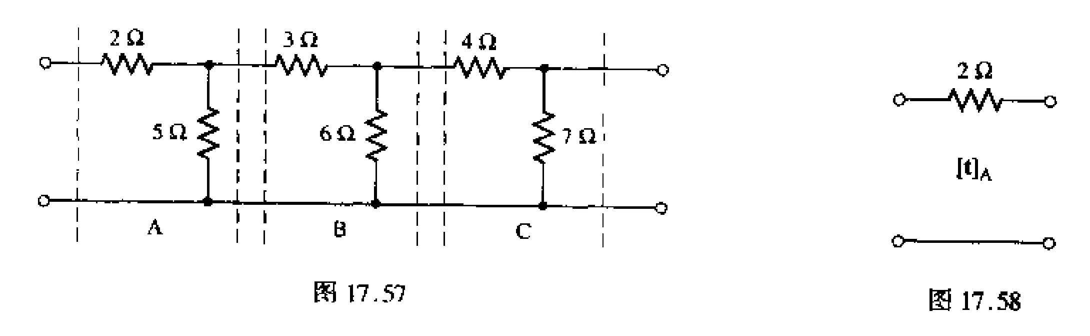


图 17.57　　　　图 17.58

40. (a)分别求出图 17.59(a)、图 17.59(b)和图 17.59(c)所示网络相应的$[\mathbf{t}]_a$，$[\mathbf{t}]_b$ 和$[\mathbf{t}]_c$；(b)利用双端口网络级联公式求图 17.59(d)所示网络的$[\mathbf{t}]$。

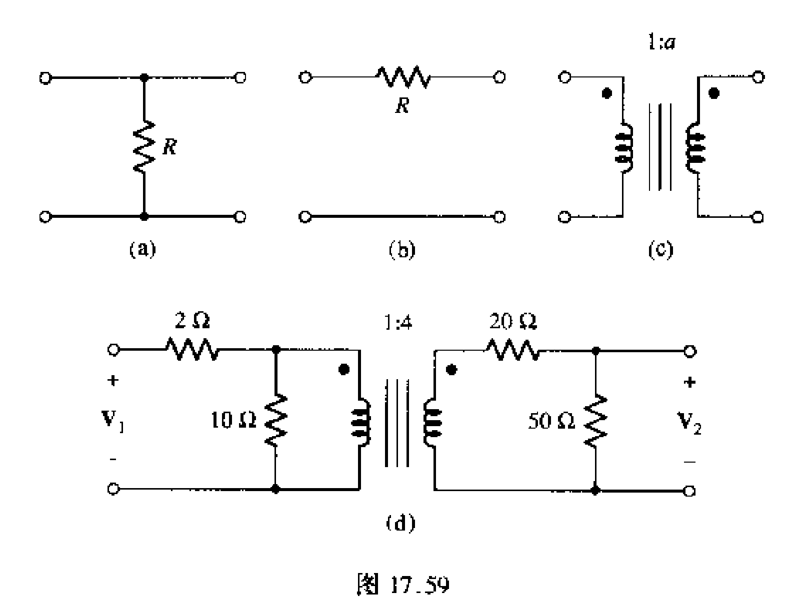


图 17.59

41. (a)求图 17.60 所示双端口网络的[**t**]；(b)在输出端接上 20 Ω 的电阻，使用双端口网络级联的方法求$[\mathbf{t}]_{new}$。

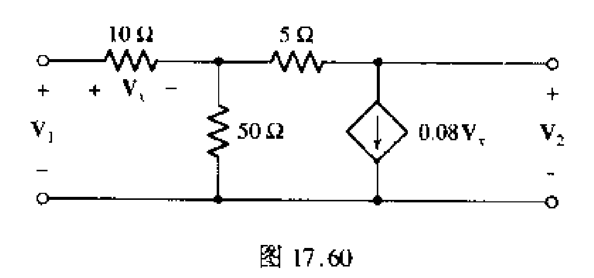


图 17.60

第 18 章 傅里叶电路分析

本章要点：

- 学习如何用傅里叶级数的三角形式表示周期函数
- 掌握偶对称性和奇对称性，偶次谐波和奇次谐波
- 学会分析频谱中包含的信息
- 学会使用傅里叶变换，并用它进行频域电路的分析

18.1 引言

通过研究时域和频域的周期函数，本章继续介绍电路分析方法。特别是，我们将考虑周期激励函数，并且它满足一定的数学限制，而这些限制正是实验室中所能产生函数具有的特性。这样的函数可以表示为无穷多个正弦和余弦及其谐波函数之和，因为每个正弦成分产生的受迫响应可以通过正弦稳态分析得到。因此，对于线性网络，一般形式的周期激励函数产生的响应可以通过将各频率成分的响应叠加起来而得到。

傅里叶级数在许多领域都有非常重要的意义，特别是在通信领域。不过，最近几年来，使用基于傅里叶方法进行电路分析已经慢慢变少了。现在，使用脉冲调制方式进行能量供应的设备（比如计算机）所消耗的能量的比例正日益增长，因此有关电力系统和电力设备谐波的课题正迅速成为一个非常重要的问题，即使是对于大规模的发电厂，也面临着同样的问题。只有使用傅里叶分析才有可能了解这些潜在问题并获得相应的解决办法。

18.2 傅里叶级数的三角形式

前面已经知道，线性电路对任何激励函数的完全响应均由受迫响应和自由响应两部分组成。从第 7 章开始一直到第 9 章讨论了自由响应，不过那时只考虑了简单的 *RL*，*RC* 和 *RLC* 串联或者并联电路的情况，几乎没有考虑别的情况。后来，在第 14 章和第 15 章中引入了复频率概念，它提供了求解自由响应的一般方法，在求出网络传递函数的极点之后，就可以写出其自由响应。

18.2.1 谐波

为了研究用无穷多个正弦和余弦函数表示一般周期函数的可能性，下面来考虑一个简单的例子。首先来看一个角频率为 ω_0 的余弦函数：

$$v_1(t) = 2\cos\omega_0 t$$

其中：

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

其周期 T 为：

$$T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

T 表示基频周期，通常不带下标 0。这个正弦波的谐波频率为 $n\omega_0$，其中 ω_0 为基频，$n = 1, 2, 3, \cdots$。第一个谐波频率即为基频。

然后考虑一个三次谐波电压：

$$v_{3a}(t) = \cos 3\omega_0 t$$

图 18.1(a)画出了基波 $v_1(t)$、三次谐波以及这两个波形的叠加。注意到它们的叠加也是周期的，周期为 $T = 2\pi/\omega_0$。

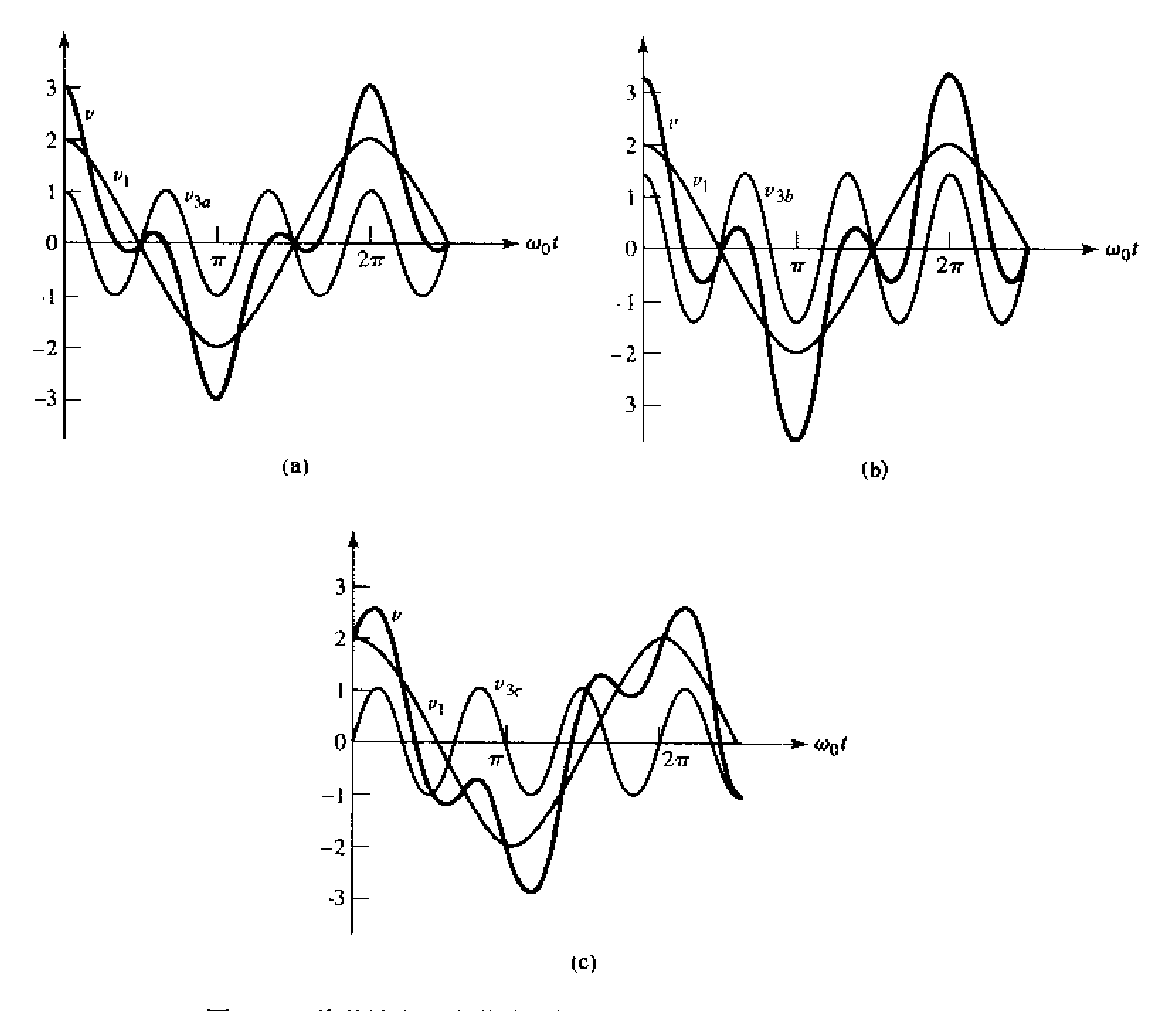


图 18.1 将基波和三次谐波叠加可以得到无限种不同的波形，这是其中的几个例子。基波为 $v_1 = 2\cos\omega_0 t$，三次谐波分别为：(a) $v_{3a} = \cos 3\omega_0 t$；(b) $v_{3b} = 1.5\cos 3\omega_0 t$；(c) $v_{3c} = \sin 3\omega_0 t$

当三次谐波的相位和幅度变化时，它与基波叠加的函数形式也会发生变化。图 18.1(b)画出了将 $v_1(t)$ 与幅度稍大一些的三次谐波：

$$v_{3b}(t) = 1.5\cos 3\omega_0 t$$

叠加后的结果。改变三次谐波的相位，使之等于：

$$v_{3c}(t) = \sin 3\omega_0 t$$

相应的叠加结果也会发生变化，如图 18.1(c)所示。不过，对于前面所有这些情况，叠加后波形的周期均等于基波周期，但它与每个谐波成分的幅度和相位有关，后面将看到，可以通过正弦函数的适当组合来生产完全不具有正弦特性的波形。

熟悉了用无穷多个正弦和余弦函数的叠加来表示周期波形以后，下面来考虑一般的非周期波形的频域表示，这种方法类似于拉普拉斯变换。

练习

18.1　某三次谐波电压与基波的和可以表示为 $v = 2\cos\omega_0 t + V_{m3}\sin 3\omega_0 t$，其中 $V_{m3} = 1$，其波形如图 18.1(c)所示。(a)求 V_{m3}的值，使得当 $\omega_0 t = 2\pi/3$ 时 $v(t)$的值为 0；(b)计算当 $\omega_0 t = 2\pi/3$ 时 $v(t)$的值。

答案：0.577；-1.000

18.2.2　傅里叶级数

首先来考虑周期函数 $f(t)$，11.3 节给出了其定义，可以用下面的函数关系来表示：

$$f(t) = f(t + T)$$

其中 T 为周期。进一步假定函数 $f(t)$满足下面的条件：

1. $f(t)$在任何时候均是单值的，即 $f(t)$满足数学上关于函数的定义。
2. 对任意 t_0，积分 $\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|\, dt$ 均存在(即不是无穷大)。
3. $f(t)$在每个周期内只有有限个非连续点。
4. $f(t)$在每个周期内只有有限个极大值和极小值。

假定 $f(t)$代表电压或者电流波形，任何实际能够产生的电压或电流波形都必须满足这些条件。虽然有些臆造的数学函数可能不满足这些条件，但这里不考虑这种情况，因此总是假定这四个条件成立。

傅里叶定理指出，对于这样的周期函数 $f(t)$，可以用无穷级数表示：

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + a_1\cos\omega_0 t + a_2\cos 2\omega_0 t + \cdots \\ &\quad + b_1\sin\omega_0 t + b_2\sin 2\omega_0 t + \cdots \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t + b_n\sin n\omega_0 t) \end{aligned} \tag{18.1}$$

其中基波频率 ω_0 与周期 T 的关系可以用下式表示：

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

a_0，a_n 和 b_n 为与 n 和 $f(t)$有关的常数。方程(18.1)为 $f(t)$的傅里叶级数的三角形式，求解常数 a_0，a_n 和 b_n 的过程称为傅里叶分析。我们的目的不是去证明这个定理，而是简单地推导傅里叶分析的过程并验证其正确性。

18.2.3 一些有用的三角积分

在讨论傅里叶级数的系数的计算方法之前，先来看一些有用的三角积分。下面用 n 和 k 表示整数下标集合 1,2,3,…。在下面的积分中，取 0 和 T 作为积分限，但必须明白，取任何一个周期区间都是可以的。因为正弦函数在一个周期内的平均值为 0，所以：

$$\int_0^T \sin n\omega_0 t\, dt = 0 \tag{18.2}$$

以及：

$$\int_0^T \cos n\omega_0 t\, dt = 0 \tag{18.3}$$

很容易证明下面三个定积分也等于 0：

$$\int_0^T \sin k\omega_0 t \cos n\omega_0 t\, dt = 0 \tag{18.4}$$

$$\int_0^T \sin k\omega_0 t \sin n\omega_0 t\, dt = 0,(k \neq 0) \tag{18.5}$$

$$\int_0^T \cos k\omega_0 t \cos n\omega_0 t\, dt = 0,(k \neq 0) \tag{18.6}$$

不包含在式(18.5)和式(18.6)中的例外情况也很容易计算，可以得到：

$$\int_0^T \sin^2 n\omega_0 t\, dt = \frac{T}{2} \tag{18.7}$$

$$\int_0^T \cos^2 n\omega_0 t\, dt = \frac{T}{2} \tag{18.8}$$

18.2.4 傅里叶系数的计算

现在可以计算傅里叶级数中的待定常数了。首先来求 a_0，分别将式(18.1)两边在一个周期上进行积分，得：

$$\int_0^T f(t)\,dt = \int_0^T a_0\,dt + \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)\,dt$$

而求和号中的每一项具有式(18.2)或式(18.3)的形式，因此：

$$\int_0^T f(t)\,dt = a_0 T$$

即

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \tag{18.9}$$

常数 a_0 为 $f(t)$一个周期的平均值，因此将其称为 $f(t)$的直流成分。

为了计算余弦系数（比如 $\cos k\omega_0 t$ 的系数 a_k），首先将式(18.1)的两边乘以 $\cos k\omega_0 t$，然后分别将两边在一个周期上进行积分得：

$$\int_0^T f(t)\cos k\omega_0 t\, dt = \int_0^T a_0 \cos k\omega_0 t\, dt$$
$$+ \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos k\omega_0 t \cos n\omega_0 t\, dt$$

$$+\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cos k\omega_0 t\ \sin n\omega_0 t dt$$

根据式(18.3)、式(18.4)和式(18.6)可以看出,上式右边的所有项,除了 $k=n$ 时,a_n 项不为 0 以外,其他项均等于 0。利用式(18.8),可以求出 a_k 或 a_n:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t dt \tag{18.10}$$

它等于乘积 $f(t)\cos n\omega_0 t$ 在一个周期上的平均值的两倍.

用类似的方法,通过乘以 $\sin k\omega_0 t$,然后在一个周期上积分,并注意到除了一项以外,其他所有项均等于 0,再将式(18.7)代入,可以求出 b_k 或 b_n:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\ dt \tag{18.11}$$

它等于 $f(t)\sin n\omega_0 t$ 在一个周期上的平均值的两倍。

利用式(18.9)到式(18.11),可以求出式(18.1)的傅里叶级数中的 a_0 和所有 a_n 和 b_n 的值:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t + b_n\sin n\omega_0 t) \tag{18.1}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \tag{18.9}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t\ dt \tag{18.10}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\ dt \tag{18.11}$$

例题 18.1　半波整流电路是一种非线性电路,用来将正弦电压输入转化为(脉动)直流电压输出,图 18.2(a)所示的"半正弦"的波形表示半波整流电路输出端的电压响应。求这个波形的傅里叶级数表示

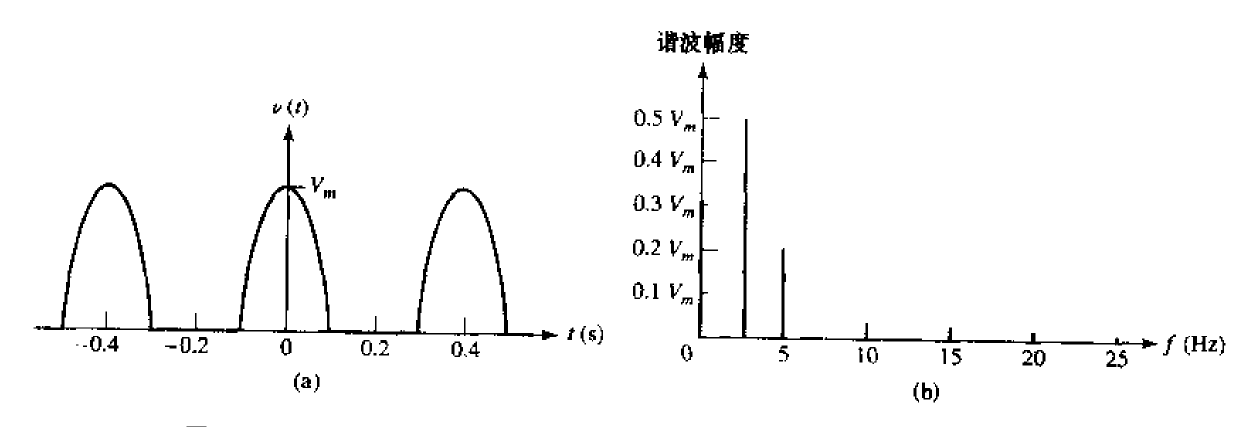


图 18.2　(a)输入为正弦波半波整流电路的输出;(b)图(a)中的波形的离散频谱

● 弄清问题的目标：

要分析的函数是一个周期函数，它与正弦函数有些相似，需要求出其傅里叶级数表示。如果负半部分电压没有被去掉，则它只包含一个正弦分量，这是非常简单的问题。

● 收集已知信息：

为了将此电压波形用傅里叶级数表示，首先必须确定其周期，并将这个用图形给出的电压波形表示为关于时间的函数形式。从图中可以看出，其周期为：

$$T = 0.4 \text{ s}$$

因此：

$$f_0 = 2.5 \text{ Hz}$$

于是：

$$\omega_0 = 5\pi \text{ rad/s}$$

● 选择最适合问题的已有方法：

求出这三个量以后，下面来求 $f(t)$ 或 $v(t)$ 在一个周期内的表达式。事实证明，对许多学生来说，求这样的表达式是傅里叶分析中最难的部分。困难主要来自于缺乏读这种图的经验，以及在确定表达式的乘数因子时粗心大意，或者没有写出完整的表达式等等。对于本例，函数的形式为正弦波，其幅度为 V_m、角频率已经求出为 5π，而且该余弦波形只有正半部分。因此，在周期 $t=0$ 到 $t=0.4$ 上，其函数表达式为：

$$v(t) = \begin{cases} V_m \cos 5\pi t, & 0 \leqslant t \leqslant 0.1 \\ 0, & 0.1 \leqslant t \leqslant 0.3 \\ V_m \cos 5\pi t, & 0.3 \leqslant t \leqslant 0.4 \end{cases}$$

但是，如果将周期区间取为 $t = -0.1$ 到 $t = 0.3$ 可以减少分段表达式的数目，这时，需要求的积分就更少：

$$v(t) = \begin{cases} V_m \cos 5\pi t, & -0.1 \leqslant t \leqslant 0.1 \\ 0, & 0.1 \leqslant t \leqslant 0.3 \end{cases} \tag{18.12}$$

虽然前面这两种描述形式均可以得到正确的结果，但是后面这种形式比较好。

● 建立适当的方程组：

很容易求得零频率成分为：

$$a_0 = \frac{1}{0.4}\int_{-0.1}^{0.3} v(t)\,dt = \frac{1}{0.4}\left[\int_{-0.1}^{0.1} V_m \cos 5\pi t\,dt + \int_{0.1}^{0.3}(0)\,dt\right]$$

注意到，对于分段定义的函数，在一个周期上进行积分时必须分几个子区间进行，每个子区间上 $v(t)$ 的函数形式均已知。

余弦项的幅度为：

$$a_n = \frac{2}{0.4}\int_{-0.1}^{0.1} V_m \cos 5\pi t \cos 5\pi n t\,dt$$

● 确定是否还需要其他信息：

求积分时，当 $n=1$ 时和 n 为其他值时得到的形式不同。当 $n = 1$ 时，有：

$$a_1 = 5V_m \int_{-0.1}^{0.1} \cos^2 5\pi t\,dt = \frac{V_m}{2} \tag{18.13}$$

当 n 不等于 1 时，有：

$$a_n = 5V_m\int_{-0.1}^{0.1}\cos 5\pi t\ \cos 5\pi nt\ dt$$

● 试解：

计算上式，可得：

$$a_0 = \frac{V_m}{\pi} \tag{18.14}$$

$$a_n = 5V_m\int_{-0.1}^{0.1}\frac{1}{2}[\cos 5\pi(1+n)t + \cos 5\pi(1-n)t]dt$$

即

$$a_n = \frac{2V_m}{\pi}\frac{\cos(\pi n/2)}{1-n^2},\quad (n \neq 1) \tag{18.15}$$

采用类似的方法进行积分，可以发现，对任何 n，均有 $b_n = 0$，即该傅里叶级数不包含正弦项。根据式(18.1)、式(18.13)、式(18.14)和式(18.15)可以得到该傅里叶级数为：

$$\begin{aligned} v(t) = {} & \frac{V_m}{\pi} + \frac{V_m}{2}\cos 5\pi t + \frac{2V_m}{3\pi}\cos 10\pi t - \frac{2V_m}{15\pi}\cos 20\pi t \\ & + \frac{2V_m}{35\pi}\cos 30\pi t - \cdots \end{aligned} \tag{18.16}$$

必须指出，当 $n=1$ 时，对 $n \neq 1$ 时 a_n 的表达式取极限 $n \to 1$，恰好可以得到正确的表达式。

● 证实所得解是否合理和满足要求：

可以通过取式(18.16)前面的若干项，忽略后面的项，然后将数值代入来验证解答。另一种方法是将函数画出来，图 18.3 画出了取前 n 项(n = 1,2 和 4)的情况。从中可以看到，取的项数越多，画出的曲线就越接近于图 18.2(b)。

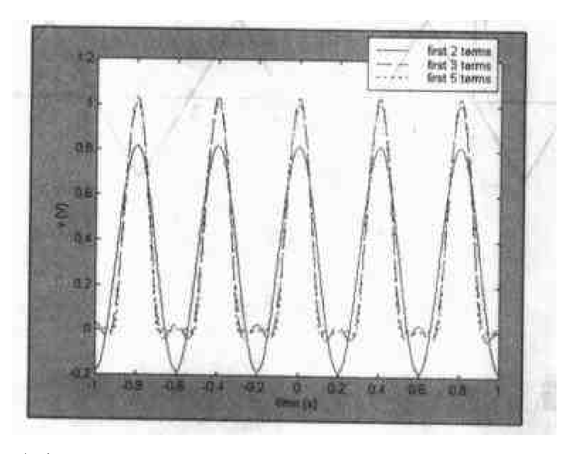


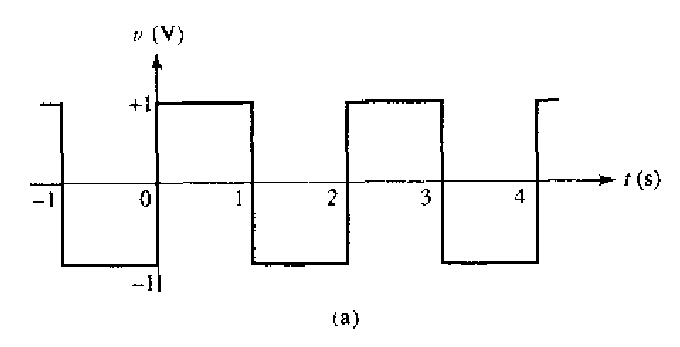
图 18.3　式(18.16)中取前 n 项(n = 1,2 和 4)的曲线，为方便起见，取幅度 $V_m = 1$

练习

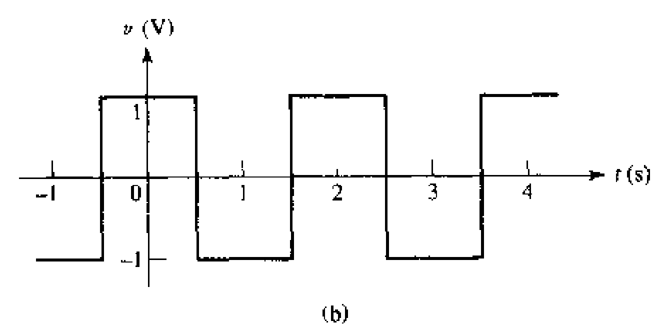
18.2　某周期波形 $f(t)$ 可以用下面的表达式来描述：$f(t) = -4$，$0 < t < 0.3$；$f(t) = 6$，$0.3 < t < 0.4$；$f(t) = 0$，$0.4 < t < 0.5$；$T = 0.5$。求(a)a_0；(b)a_3；(c)b_1。

18.3　用傅里叶级数表示图 18.4 所示的电压波形。

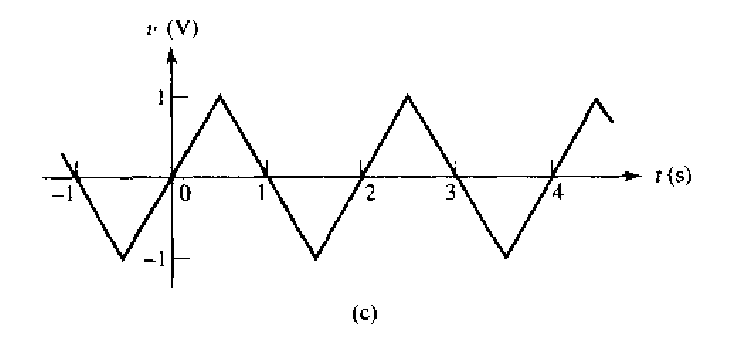
答案：18.2：-1.200；1.383；-4.44。18.3：$\left(\frac{4}{\pi}\right)\left(\sin \pi t+\frac{1}{3}\sin 3\pi t+\frac{1}{5}\sin 5\pi t+\cdots\right)$V；$\left(\frac{4}{\pi}\right)\left(\cos \pi t+\frac{1}{3}\cos 3\pi t+\frac{1}{5}\cos 5\pi t-\cdots\right)$V；$\left(\frac{8}{\pi^2}\right)\left(\sin \pi t-\frac{1}{9}\sin 3\pi t+\frac{1}{25}\sin 5\pi t-\cdots\right)$



(a)



(b)



(c)

图 18.4

18.2.5 线谱和相位谱

图 18.2(a)中画出了 $v(t)$随时间变化的函数曲线，式(18.12)给出了 $v(t)$关于时间的分析表达式，它们都是时域表示形式。式(18.16)用傅里叶级数表示 $v(t)$，也是时域表示形式，但很容易将其转化为频域表示形式。比如，可以将式(18.16)中的各频率在 s 平面上相应的位置画出来，这样在原点和正负 $j\omega$ 轴的对称位置上将会画上标记。另外一种表示频率信息的更常用的方法是使用线谱，它反映了每种频率成分的幅度。式(18.16)的线谱如图 18.2(b)所示，每种频率成分的幅度用该频率处的垂线的长度表示。这种频谱也称为离散谱，因为任何有限频率区间只包含了有限数目的频率成分。

这里必须提醒大家注意，由于上面的例子不包含正弦项，因此 n 次谐波的幅度为 $|a_n|$。如果 b_n 不等于 0，那么频率为 $n\omega_0$ 的成分的幅度必然是 $\sqrt{a_n^2+b_n^2}$，这是线谱图中必须标出的量。在后面讨论傅里叶级数的复数形式时，将看到可以更加直接地求得这个幅度。

除幅度谱以外，还可以得到离散相位谱。对任何频率 $n\omega_0$，将余弦项和正弦项合并，可以求得相位角 ϕ_n：

$$a_n\cos n\omega_0 t + b_n\sin n\omega_0 t = \sqrt{a_n^2+b_n^2}\cos\left(n\omega_0 t + \tan^{-1}\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

$$= \sqrt{a_n^2+b_n^2}\cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

即

$$\phi_n = \tan^{-1}\frac{-b_n}{a_n}$$

式(18.16)中，对每个 n，$\phi_n = 0°$或 $180°$。

这个例子中求得的傅里叶级数不包含正弦项，余弦项中不包含奇次项（基波除外）。事实上，通过观察给定的时域函数，在进行积分之前就可以判断出要求的傅里叶级数缺少哪些项。下一节考虑对称性的应用。

18.3 对称性的应用

18.3.1 偶对称和奇对称

两种很容易判断的对称为偶函数对称和奇函数对称，或者简称为偶对称和奇对称。如果 $f(t)$满足：

$$f(t) = f(-t) \tag{18.17}$$

则称 $f(t)$具有偶对称性。

具有偶对称性的函数有 t^2，$\cos 3t$，$\ln(\cos t)$，$\sin^2 7t$ 以及常数 C 等等。对于任何这样的函数，将 t 替换为$(-t)$不会改变函数的值。这种对称性也可以在图形上体现出来，如果 $f(t)=f(-t)$，则关于 $f(t)$轴存在镜像对称性。图 18.5 所示的函数具有偶对称性，如果沿 $f(t)$轴将该图折叠起来，则其正时间部分的图像与负时间部分的图像将完全重合。

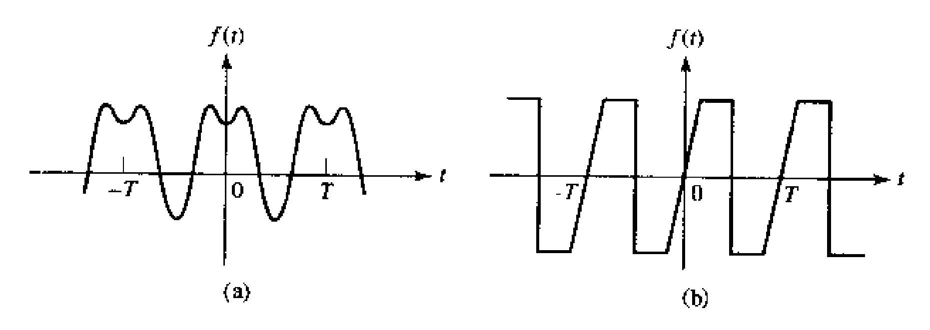


图 18.5　(a)具有偶对称性的波形；(b)具有奇对称性的波形

奇对称性定义为：如果 $f(t)$具有奇对称性，则：

$$f(t) = -f(-t) \tag{18.18}$$

换句话说，如果将 t 替换为 $(-t)$，则得到该函数的相反数。函数 t，$\sin t$、$t\cos 70t$，$\sqrt{1+t^2}$ 以及图 18.5(b)所示的函数均为奇函数，具有奇对称性。从图像上看，奇对称函数的特性也是很明显的，如果将 $f(t)$ 的 $t>0$ 部分绕着 t 轴旋转 180°，然后再将所得的结果沿着 $f(t)$ 轴对折，那么这两部分($t>0$ 部分和 $t<0$ 部分)将完全重合。换句话说，现在具有的对称性是关于原点的对称性而不是像偶对称函数那样关于 $f(t)$ 轴的轴对称性。

了解了偶对称和奇对称的定义之后，可以知道，两个偶函数的乘积或者两个奇函数的乘积具有偶对称性；一个奇函数和一个偶函数的乘积具有奇对称性。

18.3.2　对称性和傅里叶级数项的关系

下面来考察偶对称性使得傅里叶级数有什么样的性质。考虑到 $f(t)$ 等于无穷多个正弦函数与余弦函数的和，很显然，当 $f(t)$ 为偶对称函数时，这些正弦函数与余弦函数的和也必然是偶函数。但是正弦函数为奇函数，将任意多个正弦函数相加，除了 0 以外(它既是奇函数也是偶函数)其结果不会是任何偶函数。因此，偶函数的傅里叶级数只包含常数项和余弦项。下面来详细证明 $b_n=0$。已知：

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt \\ &= \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt + \int_{0}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt\right] \end{aligned}$$

将第一个积分的积分变量 t 替换为 $-\tau$，则 $\tau=-t$，然后利用 $f(t)=f(-t)=f(\tau)$，有：

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} f(-\tau)\sin(-n\omega_0\tau)(-d\tau) + \int_{0}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt\right] \\ &= \frac{2}{T}\left[-\int_{0}^{T/2} f(\tau)\sin n\omega_0\tau\,d\tau + \int_{0}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt\right] \end{aligned}$$

因为积分的结果和积分变量的名称无关，因此：

$$\int_{0}^{T/2} f(\tau)\sin n\omega_0\tau\,d\tau = \int_{0}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt$$

于是：

$$b_n = 0 \quad (\text{偶对称性}) \tag{18.19}$$

即不含正弦项。因此，如果 $f(t)$ 具有偶对称性，那么 $b_n=0$；反之，如果 $b_n=0$，那么 $f(t)$ 具有偶对称性。

采用类似的方法进行分析，可以发现 a_n 的表达式可以简化为在半个周期区间进行积分，即 $t=0$ 到 $t=\frac{1}{2}T$ 之间的积分：

$$a_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt \quad (\text{偶对称性}) \tag{18.20}$$

对于偶函数，通过“在半个周期上积分并乘以 2”来求 a_n，这看起来也是符合逻辑的。

类似地，具有奇对称性的函数的傅里叶展开式中不含有常数项和余弦项。下面来证明这个命题。已知：

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt$$

$$= \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt + \int_{0}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt\right]$$

然后对第一个积分做替换 $t = -\tau$：

$$a_n = \frac{2}{T}\left[\int_{T/2}^{0} f(-\tau)\cos(-n\omega_0\tau)(-d\tau) + \int_{0}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[\int_{0}^{T/2} f(-\tau)\cos n\omega_0\tau\,d\tau + \int_{0}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt\right]$$

又 $f(-\tau) = -f(\tau)$，因此：

$$a_n = 0 \qquad (\text{奇对称性}) \tag{18.21}$$

类似地(但更简单一些)，可以证明：

$$a_0 = 0 \qquad (\text{奇对称性})$$

因此，如果 $f(t)$具有奇对称性，那么 $a_n = 0$ 且 $a_0 = 0$；反之，如果 $a_n = 0$ 且 $a_0 = 0$，则 $f(t)$具有奇对称性。

同样，在半个周期上进行积分就可以求得 b_n：

$$b_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt \qquad (\text{奇对称性}) \tag{18.22}$$

本节后面的练习 18.3 中给出了偶对称性和奇对称性的例子。该练习的(a)小题和(b)小题所给出的方波的幅度和周期均相同，只是时间的原点不同，使得(a)小题的方波具有奇对称性，而(b)小题具有偶对称性，所求的结果分别只含有正弦项和余弦项。需要指出的是，可以将 $t = 0$ 取在别的位置，使得函数既不具有奇对称性，也不具有偶对称性；这样得到的傅里叶级数项的系数个数则至少是原来的两倍。

18.3.3　半波对称性

练习 18.3 中给出的两种方波的傅里叶级数均具有另外一个有趣的特性，即它们都不包含偶次谐波[①]。也就是说，级数中的频率成分中只包含基频的奇数倍；当 n 为偶数时，a_n 和 b_n 均等于 0。这是由另一种对称性引起的，称为半波对称。如果：

$$f(t) = -f\left(t - \frac{1}{2}T\right)$$

则称 $f(t)$具有半波对称性。也可以用下式来表示：

$$f(t) = -f\left(t + \frac{1}{2}T\right)$$

除了符号不同以外，每个半周期与相邻的半周期完全一样。半波对称性与偶对称性和奇对称性不一样，它不是由时间原点 $t = 0$ 所取的位置不同而导致的。因此，方波[图 18.4(a)或图 18.4(b)]具有半波对称性。图 18.5 所示的波形均不具有半波对称性，但与它们有些类似的图 18.6 中波形却具有半波对称性。

可以证明，任何具有半波对称性的函数的傅里叶级数只包含奇次谐波。下面来考虑系数 a_n，同样地：

① 需要经常注意避免把偶函数和偶次谐波，以及奇函数和奇次谐波搞混淆。比如，b_{10} 为偶次谐波系数，而如果 $f(t)$为偶函数，则它等于 0。

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t dt$$

$$= \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt + \int_{0}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt\right]$$

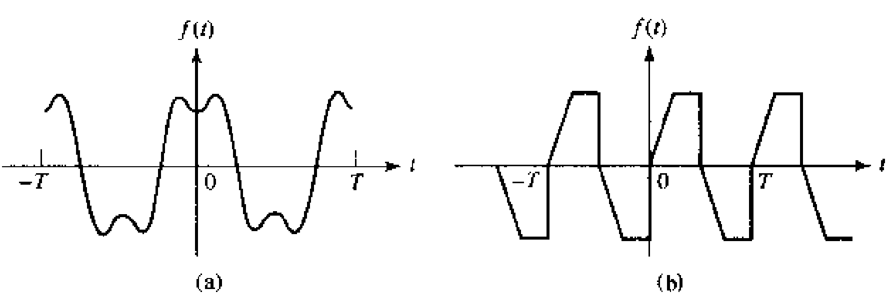


图 18.6 (a)与图 18.5(a)所示波形有点类似,但具有半波对称性;
(b)与图 18.5(b)所示波形有点类似,但具有半波对称性

可以将上式表示为:

$$a_n = \frac{2}{T}(I_1 + I_2)$$

然后对 I_1 做变量替换 $\tau = t + \frac{1}{2}T$ 得:

$$I_1 = \int_0^{T/2} f\left(\tau - \frac{1}{2}T\right)\cos n\omega_0\left(\tau - \frac{1}{2}T\right)d\tau$$

$$= \int_0^{T/2} - f(\tau)\left(\cos n\omega_0\tau \cos\frac{n\omega_0 T}{2} + \sin n\omega_0\tau \sin\frac{n\omega_0 T}{2}d\tau\right)$$

而 $\omega_0 T$ 等于 2π,于是:

$$\sin\frac{n\omega_0 T}{2} = \sin n\pi = 0$$

因此:

$$I_1 = -\cos n\pi\int_0^{T/2} f(\tau)\cos n\omega_0\tau\, d\tau$$

注意到上式与 I_2 有相同的因式,然后可以得到:

$$a_n = \frac{2}{T}(1-\cos n\pi)\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt$$

因子$(1-\cos n\pi)$说明当 n 为偶数时 a_n 等于 0。因此:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases} \qquad (\text{半波对称}) \qquad (18.23)$$

采用类似的方法可以证明,当 n 为偶数时,b_n 也等于 0,因此:

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t dt, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases} \qquad (\text{半波对称}) \qquad (18.24)$$

需要注意的是,具有奇对称性或偶对称性的波形均可以具有半波对称性。比如图 18.6(a)中给出的波形,它既具有偶对称性,又具有半波对称性。当波形既有半波对称性又有偶对称性或

奇对称性时，可以根据其 1/4 周期的波形来重构整个波形。a_n 和b_n 的值也可以通过在任何1/4 周期上进行积分而求得，即：

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt, && n \text{ 为奇数} \\ a_n &= 0, && n\ (\text{为偶数}) \\ b_n &= 0, && \text{所有 } n \end{aligned}\right\}\quad (\text{半波和偶对称}) \qquad (18.25)$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 0, && \text{所有 } n \\ b_n &= \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\sin \omega_0 t\, dt, && n \text{ 为奇数} \\ b_n &= 0, && n \text{ 为偶数} \end{aligned}\right\}\quad (\text{半波和奇对称}) \qquad (18.26)$$

在计算给定波形的傅里叶级数时，花一些时间来考虑其对称性是值得的。

练习

18.4　画出下面所给函数的图像，分别指出它们是否具有偶对称性、奇对称性和半波对称性，并指出它们的周期分别是多少：(a) $v = 0, -2 < t < 0$ 或 $2 < t < 4$；$v = 5, 0 < t < 2$；$v = -5, 4 < t < 6$；然后周期重复；(b) $v = 10, 1 < t < 3$；$v = 0, 3 < t < 7$；$v = -10, 7 < t < 9$；然后周期重复；(c) $v = 8t, -1 < t < 1$；$v = 0, 1 < t < 3$；然后周期重复。

18.5　求练习 18.4 中(a)和(b)的波形的傅里叶级数。

答案：18.4：否，否，是，8；否，否，否，8；否，是，否。18.5：$\sum_{n=1(\text{odd})}^{\infty} \frac{10}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi t}{4} + \sin\frac{n\pi t}{4}\right)$；$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{n\pi}\left[(\sin\frac{3n\pi}{4} - 3\sin\frac{n\pi}{4})\cos\frac{n\pi t}{4} + (\cos\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{3n\pi}{4})\sin\frac{n\pi t}{4})\right]$

18.4　周期激励函数的完全响应

使用傅里叶级数，可以将任何周期激励函数表示为无穷多个正弦激励函数相加的形式。通过常规的稳态分析，可以求出每个正弦函数的受迫响应，而通过求出网络的传递函数的极点可以得到自由响应。根据网络的初始条件，包括受迫响应的初始值，可以求出自由响应的幅度，然后将受迫响应和自由响应相加，就得到完全响应。

例题 18.2　将图 18.7(a)所示的方波信号(包括其直流成分)作用于图 18.7(b)所示的 RL 网络中，求该电路的周期性响应。激励函数是在 $t = 0$ 时接入的，求电流的响应，其初始值为 0

该激励函数的基频为 $\omega_0 = 2$ rad/s，将本题的波形与练习 18.3 中图 18.4(a)所示波形进行比较，可以写出其傅里叶级数为：

$$v_s(t) = 5 + \frac{20}{\pi}\sum_{n=1(\text{odd})}^{\infty}\frac{\sin 2nt}{n}$$

在频域中求解，可以求出 n 次谐波的受迫响应，其中：

$$v_{sn}(t) = \frac{20}{n\pi}\sin 2nt$$

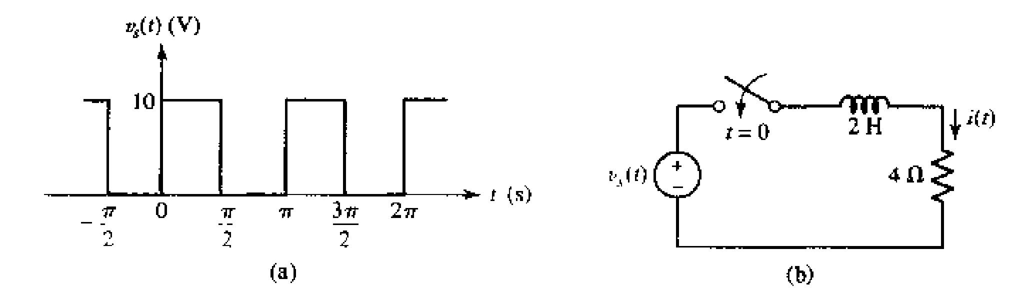


图 18.7 (a)方波电压激励函数；(b)在 $t=0$ 时将(a)中的激励函数作用于串联 RL 电路中，求 $i(t)$ 的完全响应

即

$$\mathbf{V}_m = \frac{20}{n\pi}(-j)$$

在这个频率上，RL 电路的阻抗为：

$$\mathbf{Z}_n = 4 + j(2n) \times 2 = 4 + j4n$$

因此，在这个频率上的受迫响应为：

$$\mathbf{I}_{fn} = \frac{\mathbf{V}_{sn}}{\mathbf{Z}_n} = \frac{-j5}{n\pi(1+jn)}$$

变换到时域中，可以得到：

$$i_{fn} = \frac{5}{n\pi}\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}\cos(2nt - 90^\circ - \tan^{-1}n)$$

$$= \frac{5}{\pi(1+n^2)}\left(\frac{\sin 2nt}{n} - \cos 2nt\right)$$

直流成分产生的响应为 5V/4 Ω = 1.25 A，因此，总的受迫响应可以用下式表示：

$$i_f(t) = 1.25 + \frac{5}{\pi}\sum_{n=1(\text{odd})}^{\infty}\left[\frac{\sin 2nt}{n(1+n^2)} - \frac{\cos 2nt}{1+n^2}\right]$$

对于这样一个简单电路，很容易写出其自由响应为单个指数项[说明传递函数 $\mathbf{I}_f/\mathbf{V}_s = 1/(4+2\mathbf{s})$ 只有一个极点]：

$$i_n(t) = Ae^{-2t}$$

因此，完全响应等于下面的和：

$$i(t) = i_f(t) + i_n(t)$$

因为 $i(0)=0$，所以：

$$A = -i_f(0)$$

令 $t=0$，可以得到 $i_f(0)$：

$$i_f(0) = 1.25 - \frac{5}{\pi}\sum_{n=1(\text{odd})}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$$

虽然可以用这种和的形式来表示 A，但是计算出这个和式的数值并用它来表示更方便一些。和式 $\sum 1/(1+n^2)$ 的前 5 项的和为 0.671，前 10 项的和为 0.695，前 20 项的和为 0.708，精确的和为 0.720(保留三位有效数字)。因此：

$$A = -1.25 + \frac{5}{\pi}(0.720) = -0.104$$

于是：

$$i(t) = -0.104e^{-2t} + 1.25 + \frac{5}{\pi}\sum_{n=1(\text{odd})}^{\infty}\left[\frac{\sin 2nt}{n(1+n^2)} - \frac{\cos 2nt}{1+n^2}\right] \quad \text{A}$$

在这个求解过程中，必须用到本章和前面第 17 章中介绍的许多最一般的概念。因为这个特定问题比较简单，因此不必用到别的概念，不过对于一般的分析则可能会用到它们。从这个意义上说，可以将对本问题的解答看做是这门电路分析入门课程学习的重大成就。尽管很有成就感，但必须指出的是，例题 18.2 所求出的用解析形式表示的完全响应实际上并没有多大价值，因为它没有形象地描述响应的特点。实际上，我们需要得到 $i(t)$随时间变化的曲线，这可以通过取足够多的项进行繁琐的计算而得到，这可以借助于计算机或者可编程计算器来进行。将自由响应、直流项和前几个谐波项的曲线叠加起来，可以近似地得到总的响应曲线，不过，这是一件相当繁琐而不值得去做的工作。

其实，本问题最好的解法是采用反复的瞬态分析方法。也就是说，可以先计算出时间区间 $t=0$ 到 $t=\pi/2$ s 内的曲线，这是一个指数上升的曲线，最大值为 2.5 A。求出第一个区间终点的值以后，相当于知道了下一个($\pi/2$)秒区间的初始值。这样反复进行下去，直到响应曲线具有周期性为止。这种方法非常适合于本例，因为相邻区间 $\pi/2 < t < 3\pi/2$ 和 $3\pi/2 < t < 5\pi/2$ 的响应曲线的差异几乎可以忽略。图 18.8 画出了电流的完全响应。

练习

18.6　对图 18.8 所示的电流曲线，使用第 8 章所介绍的方法求出 t 等于下列值时的电流值：(a)$\pi/2$；(b)π；(c)$3\pi/2$。


答案：2.392 A；0.1034 A；2.396 A

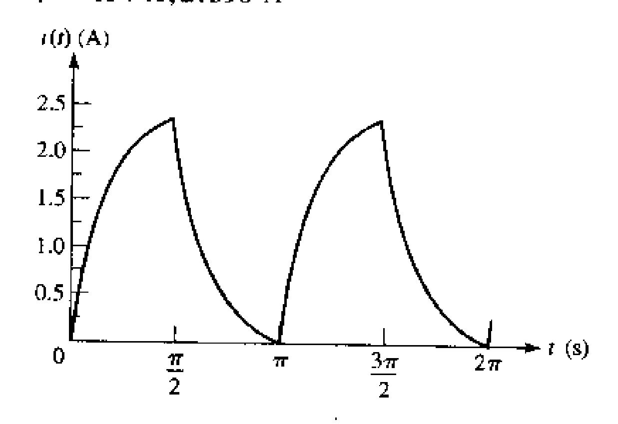


图 18.8　图 18.7(b)所示电路在图 18.7(a)所示方波激励下的完全响应的初始波形

18.5　傅里叶级数的复数形式

在求频谱时，已经看到每种频率成分的幅度和 a_n 及 b_n 均有关，也就是说正弦项和余弦项均对幅度有贡献，幅度的确切表达式为$\sqrt{a_n^2+b_n^2}$。如果将傅里叶级数的每一项均用余弦函数及相角形式来表示，则可以直接得到每种频率的幅度。

如果将正弦项和余弦项用带有复常数因子的指数函数来表示，则可以得到一种更方便和更简洁的傅里叶级数表示形式。

首先写出傅里叶级数的三角形式：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

然后将其中的正弦项和余弦项用指数形式代替并整理得：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{jn\omega_0 t}\frac{a_n - jb_n}{2} + e^{-jn\omega_0 t}\frac{a_n + jb_n}{2}\right)$$

然后定义复常数 $\mathbf{c}_n$ 为：

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad (n = 1,2,3,\cdots) \tag{18.27}$$

a_n，b_n 和 $\mathbf{c}_n$ 的值均与 n 和 $f(t)$ 有关。如果将 n 替换为 $(-n)$，那么这些常数将有什么变化呢？关于 a_n 和 b_n 的定义请参见式(18.10)和式(18.11)，显然：

$$a_{-n} = a_n$$

但

$$b_{-n} = -b_n$$

根据式(18.27)，有：

$$\mathbf{c}_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n), \quad (n = 1,2,3,\cdots) \tag{18.28}$$

因此：

$$\mathbf{c}_n = \mathbf{c}_{-n}^*$$

另外，令：

$$\mathbf{c}_0 = a_0$$

这样，可以将 $f(t)$ 表示为：

$$f(t) = \mathbf{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{c}_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$$

或

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{c}_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$$

最后，将第二个和式变成从 -1 到 $-\infty$ 进行求和，而不从 1 到 ∞ 进行求和，得到：

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty}\mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t}$$

即

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} \tag{18.29}$$

按照约定，从 $-\infty$ 到 ∞ 求和包含了 $n=0$ 的情况。

式(18.29)即为 $f(t)$ 的傅里叶级数的复数形式，使用这种形式最重要的原因在于它的简洁性。将式(18.10)和式(18.11)代入式(18.27)中，可以得到复系数的计算公式：

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt - j\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\, dt$$

然后，使用正弦和余弦的指数表达式将其简化为：

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t}\, dt \tag{18.30}$$

这样，就用一个简洁的公式代替了傅里叶级数的三角形式中的两个公式。在求傅里叶系数时，只需要做一次积分就可以了，不需要做两次，而且这个积分的计算几乎总是要简单一些。需要注意的是，式(18.30)中，积分的乘积因子为 $1/T$，而 a_n 和 b_n 的积分公式中的因子均为 $2/T$。

将指数形式的傅里叶级数的两个基本关系式写在一起为：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} \tag{18.29}$$

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \tag{18.30}$$

其中，$\omega_0 = 2\pi/T$，和以前一致。

对于指数形式的傅里叶级数，频率成分 $\omega = n\omega_0$ 的幅度为 $|\mathbf{c}_n|$（其中 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$）。可以画出 $|\mathbf{c}_n|$ 随着 $n\omega_0$ 或 nf_0 变化的离散谱，横坐标由正的和负的 n 值组成，这时，将得到关于原点对称的图像，因为根据式(18.27)和式(18.28)可以证明 $|\mathbf{c}_n| = |\mathbf{c}_{-n}|$。

根据式(18.29)和式(18.30)，也可以看到频率成分 $\omega = n\omega_0$ 的幅度为 $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|\mathbf{c}_n| = 2|\mathbf{c}_{-n}| = |\mathbf{c}_n| + |\mathbf{c}_{-n}|$（其中 $n = 1,2,3,\cdots$）。对于直流成分，$a_0 = \mathbf{c}_0$。

同样地，$f(t)$ 的对称性也会影响指数形式的傅里叶级数[式(18.30)]的系数计算。在各种对称情况下，$\mathbf{c}_n$ 的计算公式为：

$$\mathbf{c}_n = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt, \text{（偶对称）} \tag{18.31}$$

$$\mathbf{c}_n = \frac{-j2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\, dt, \text{（奇对称）} \tag{18.32}$$

$$\mathbf{c}_n = \begin{cases} \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\, dt, & (n \text{ 为奇数}) \quad (18.33\text{a}) \\ 0, & (n \text{ 对偶数}, \frac{1}{2} \text{ 波对称}) \quad (18.33\text{b}) \end{cases}$$

$$\mathbf{c}_n = \begin{cases} \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/4} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt, & (n \text{ 为奇数}, \frac{1}{2} \text{ 波和偶对称}) \quad (18.34\text{a}) \\ 0, & (n \text{ 对偶数}, \frac{1}{2} \text{ 波和偶对称}) \quad (18.34\text{b}) \end{cases}$$

$$\mathbf{c}_n = \begin{cases} \dfrac{-j4}{T}\displaystyle\int_0^{T/4} f(t)\sin n\omega_0 t\, dt, & (n \text{ 为奇数}, \frac{1}{2} \text{ 波和奇对称}) \quad (18.35\text{a}) \\ 0, & (n \text{ 为偶数}, \frac{1}{2} \text{ 波和奇对称}) \quad (18.35\text{b}) \end{cases}$$

例题 18.3　求图 18.4(b)所示方波的傅里叶级数系数 $\mathbf{c}_n$

这个方波具有偶对称性，同时具有半波对称性。如果忽略这些对称性而使用一般式(18.30)来求，取 $T = 2$，$\omega_0 = 2\pi/2 = \pi$，这时：

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{-0.5} -e^{-jn\pi t}dt + \int_{-0.5}^{0.5} e^{-jn\pi t}dt - \int_{0.5}^{1} e^{-jn\pi t}dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{-jn\pi}(e^{-jn\pi t})_{-1}^{0.5} + \frac{1}{-jn\pi}(e^{-jn\pi t})_{-0.5}^{0.5} + \frac{-1}{-jn\pi}(e^{-jn\pi t})_{0.5}^{1}\right]$$

$$= \frac{1}{j2n\pi}(e^{jn\pi/2} - e^{jn\pi} - e^{-jn\pi/2} + e^{jn\pi/2} + e^{-jn\pi} - e^{-jn\pi/2})$$

$$= \frac{1}{j2n\pi}(2e^{jn\pi/2} - 2e^{-jn\pi/2}) = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

可以得到 $\mathbf{c}_0 = 0, \mathbf{c}_1 = 2/\pi, \mathbf{c}_2 = 0, \mathbf{c}_3 = -2/3\pi, \mathbf{c}_4 = 0, \mathbf{c}_5 = 2/5\pi$ 等等。不过，如果我们还记得当 $b_n = 0$ 时，$a_n = 2\mathbf{c}_n$ 的话，那么可以看出，这里求出的结果与练习 18.3 中对图 18.4(b)所示波形所求得的结果一致。

利用波形的对称性(偶对称和半波对称性)来求要简单一些，根据式(18.34a)和(18.34b)，有：

$$\mathbf{c}_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/4} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt$$

$$= \frac{4}{2}\int_0^{0.5}\cos n\pi t\, dt = \frac{2}{n\pi}(\sin n\pi t)\Big|_0^{0.5}$$

$$= \begin{cases}\dfrac{2}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi}{2}, & (n\ \text{为奇数})\\ 0, & (n\ \text{为偶数})\end{cases}$$

这和不利用对称性所求得的结果一致。

下面来考虑一个难一些但比较有趣的例子。

例题 18.4 函数 $f(t)$ 为幅度等于 V_0，宽度为 τ 的矩形脉冲系列，周期为 T，如图 18.9(a)所示。求 $f(t)$ 的指数形式的傅里叶级数

基频为 $f_0 = 1/T$。因为没有任何对称性，因此必须利用一般形式的复系数计算公式(18.30)：

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \frac{V_0}{T}\int_{t_0}^{t_0+\tau} e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

$$= \frac{V_0}{-jn\omega_0 T}(e^{-jn\omega_0(t_0+\tau)} - e^{-jn\omega_0 t_0})$$

$$= \frac{2V_0}{n\omega_0 T}e^{-jn\omega_0(t_0+\tau/2)}\sin\left(\frac{1}{2}n\omega_0\tau\right)$$

$$= \frac{V_0\tau}{T}\frac{\sin\left(\frac{1}{2}n\omega_0\tau\right)}{\frac{1}{2}n\omega_0\tau}e^{-jn\omega_0(t_0+\tau/2)}$$

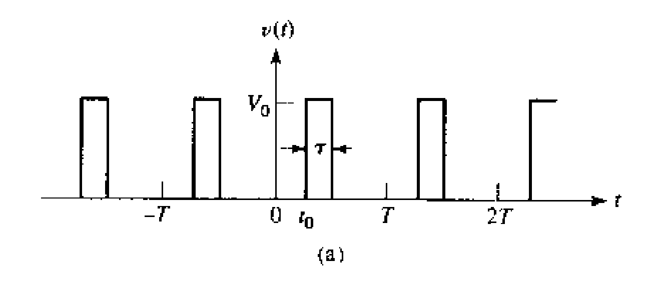
因此可以求出 $\mathbf{c}_n$ 的幅度为：

$$|\mathbf{c}_n| = \frac{V_0\tau}{T}\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{2}n\omega_0\tau\right)}{\frac{1}{2}n\omega_0\tau}\right| \tag{18.36}$$

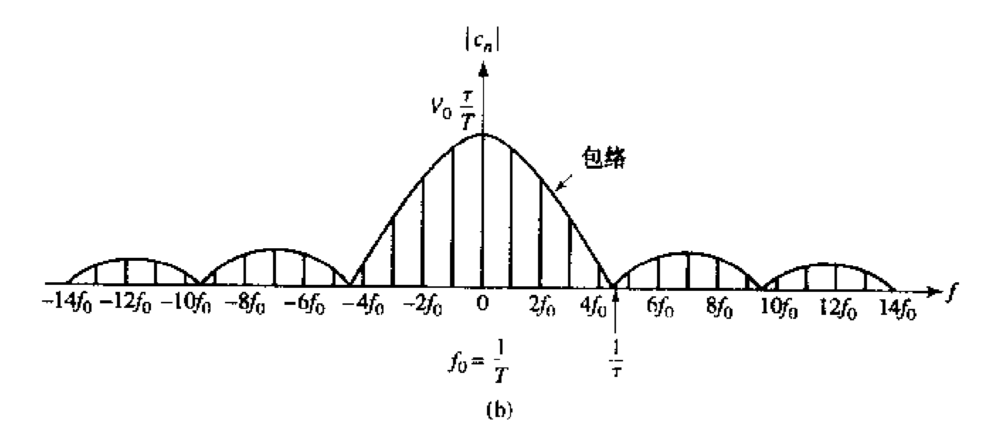
相角为：

$$\text{ang } \mathbf{c}_n = -n\omega_0\left(t_0+\frac{\tau}{2}\right) \quad (\text{正向脉冲 } 180^\circ) \tag{18.37}$$

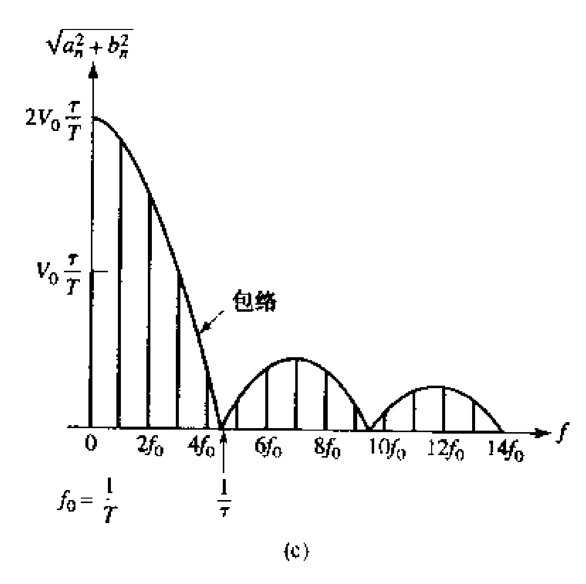
式(18.36)和式(18.37)即为要求的指数形式的傅里叶级数。



(a)



(b)



(c)

图 18.9　(a) 周期矩形脉冲；(b) $|\mathbf{c}_n|$对应的离散线谱，$f=nf_0$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$；(c) $\sqrt{a_n^2+b_n^2}$，$f=nf_0$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$

18.5.1　采样函数

在现代通信理论中，式(18.36)中绝对值符号内的因子称为采样函数。“采样”源于

图 18.9(a)所示的时间函数,采样函数也是由此而来的。将该脉冲序列与任何其他函数 $f(t)$ 相乘,如果 τ 足够小并且 $V_0=1$,将得到 $f(t)$ 的样本,样本之间的间隔为 T 秒。定义为:

$$\mathrm{Sa}(x)=\frac{\sin x}{x}$$

因为它有助于求出 $f(t)$ 各种频率成分的幅度,因此有必要去研究这个函数的重要性质。首先,注意到当 x 为 π 的整数倍时 $\mathrm{Sa}(x)$ 为 0,即:

$$\mathrm{Sa}(n\pi)=0,\qquad n=1,2,3,\cdots$$

当 x 为 0 时,该函数的值未知,不过容易证明其值为 1:

$$\mathrm{Sa}(0)=1$$

因此,$\mathrm{Sa}(x)$ 的幅度在 $x=0$ 到 $x=\pi$ 区间的是下降的。当 x 从 π 增加到 2π 时,$|\mathrm{Sa}(x)|$ 从 0 增加到一个小于 1 的极大值,然后又下降为 0。当 x 继续增加时,接下来的极大值将继续减小,因为分子不会大于 1 而分母却继续增大。另外,$\mathrm{Sa}(x)$ 具有偶对称性。

现在来计算其线谱。首先考虑 $|\mathbf{c}_n|$,将式(18.36)表示成关于基频 f_0 的函数:

$$|\mathbf{c}_n|=\frac{V_0\tau}{T}\left|\frac{\sin(n\pi f_0\tau)}{n\pi f_0\tau}\right| \tag{18.38}$$

将已知值 τ 和 $T=1/f_0$ 代入式(18.38)中,然后取不同的 n 值,就可以求出 $\mathbf{c}_n$ 的幅度,$n=1,\pm1,\pm2,\cdots$。这里不使用式(18.38)去求这些离散频点处的值,而是将频率 nf_0 看成连续变量,画出 $|\mathbf{c}_n|$ 的包络。换句话说,可以只将 f(实际上是 nf_0)取为谐波频率 $0,\pm f_0,\pm 2f_0,\pm 3f_0$ 等等,但这时必须将 n 看做是连续变量。当 f 等于 0 时,$|\mathbf{c}_n|$ 显然等于 $V_0\tau/T$,当 f 增加至 $1/\tau$ 时,$|\mathbf{c}_n|$ 为 0。图 18.9(b)中的虚线即为所求的包络,在每个谐波频率上画一条垂直线就可以得到其线谱,如图所示,垂直线的高度即为 $\mathbf{c}_n$ 的幅度。该图所画出的是 $\tau/T=1/(1.5\pi)=0.212$ 时的曲线。对于本例,在包络值为 0 处恰好没有谐波频率,不过,如果取另外的 τ 和 T 值,则可以得到这样的情况。

图 18.9(c)画出了正弦成分的幅度随频率变化的曲线,再次注意到 $a_0=\mathbf{c}_0$ 以及 $\sqrt{a_n^2+b_n^2}=|\mathbf{c}_n|+|\mathbf{c}_{-n}|$。观察图 18.9(c)所示的周期方波序列的线谱,可以得到几个结论。很明显,离散线谱的包络"宽度"与 τ 有关,而与 T 无关。由此可以得出结论,能让这种周期性方波通过的滤波器的带宽是脉冲宽度 τ 的函数,而不是脉冲周期 T 的函数,从图 18.9(c)可以看出,这个带宽约为 $1/\tau$ Hz。脉冲的周期 T 增大(即脉冲的重复频率 f_0 减小),带宽 $1/\tau$ 不变,但频率 0 到频率 $1/\tau$ 之间的谱线的数目增加了,但它还是离散的;每条线谱的幅度与 T 的倒数成正比。最后说一点,改变时间原点的位置不会改变线谱,即 $|\mathbf{c}_n|$ 不是 t_0 的函数。当然,所取的 t_0 不同,频率成分的相对相位会不同。

练习

18.7 分别求(a)图 18.4(a)和(b)图 18.4(c)所示波形的复傅里叶系数 $\mathbf{c}_n$。

答案:n 为奇数时为 $-j2/(n\pi)$,n 为偶数时为 0;对所有的 n 可统一表示为 $-j[4/(n^2\pi^2)]\sin n\pi/2$。

18.6 傅里叶变换的定义

熟悉了周期函数的傅里叶级数表示的基本概念之后,下面来定义傅里叶变换。首先回想

一下上一节中求出的矩形脉冲序列频谱，那是一个离散的频谱，这是所有周期时域函数所具有的性质。频谱为离散是指它不是关于频率光滑的或者说是连续的函数，它只是在某些频率点上具有非零值。

但是，有许多激励函数不是周期时域函数，比如单个矩形脉冲、阶跃函数、斜坡函数以及第 14 章中定义的比较特别的冲激函数等等。可以求出这种非周期函数的频谱，只是它们是连续的，这时，通常在任何非零频率区间内，总是存在一些能量，而不管这个区间有多小。

下面从周期函数开始，然后令周期趋于无穷大来引入傅里叶变换这个概念。根据前面从周期矩形脉冲得到的结果可知，随着周期的增加，频谱包络的幅度将减小，但是形状保持不变，并且在任何给定的频率区间内将会出现更多的频率成分。当周期变为无穷大时，可以想像，包络的幅度将变得几乎为 0，频率成分将变为无穷多，频率之间的间隔将变得趋于 0。比如，频率区间 0 Hz ~ 100 Hz 之间的频率成分变为无穷多，但每个成分的幅度却趋于 0。初看起来，幅度为 0 的频谱的概念非常令人费解。我们知道，周期激励函数的线谱表示每种频率成分的幅度，但是非周期激励函数的零幅度连续谱表示什么含义呢？这个问题留到下一节来回答，现在继续刚才讨论的极限情况。

从指数形式的傅里叶级数开始：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} \tag{18.39}$$

其中：

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \tag{18.40}$$

且

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \tag{18.41}$$

然后令：

$$T \to \infty$$

根据式(18.41)可知，这时 ω_0 将变得无穷小。将这个极限用微分表示：

$$\omega_0 \to d\omega$$

因此：

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \to \frac{d\omega}{2\pi} \tag{18.42}$$

“谐波”频率 $n\omega_0$ 则与频率变量相对应，它反映了连续的频谱。换句话说，当 ω_0 趋于 0 时，n 必须趋于无穷，它们的乘积才是有限值：

$$n\omega_0 \to \omega \tag{18.43}$$

将这 4 个极限代入式(18.40)中，可以发现 $\mathbf{c}_n$ 必然趋于 0，这和原来的设想一致。如果将式(18.40)的两边同时乘以周期 T 然后取极限，则可以得到一个有意义的结果：

$$\mathbf{c}_n T \to \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

该式的右边为 ω(不是 t)的函数，用 $\mathbf{F}(j\omega)$来表示它为：

$$\mathbf{F}(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{18.44}$$

下面来看式(18.39)的极限。将和式乘以 T 并除以 T，得到：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathbf{c}_nTe^{jn\omega_0t}\frac{1}{T}$$

然后将 $\mathbf{c}_nT$ 替换为 $\mathbf{F}(j\omega)$，再利用式(18.42)和式(18.43)。取极限后，求和变成了积分，于是得到：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{F}(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{18.45}$$

式(18.44)和式(18.45)合起来称为傅里叶变换对。函数 $\mathbf{F}(j\omega)$ 称为 $f(t)$ 的傅里叶变换，$f(t)$ 称为 $\mathbf{F}(j\omega)$ 的傅里叶逆变换。

读者可能已经看到，傅里叶变换和拉普拉斯变换之间存在一些相似性。它们之间主要的不同之处在于，采用傅里叶变换进行分析不容易将初始存储的能量包含进来，而采用拉普拉斯变换则很容易；而且某些时域函数（比如指数增长函数）并不存在傅里叶变换。但是，如果关心的主要是频率信息而不是瞬态响应，则使用傅里叶变换更合适。

这个变换关系非常重要！从此之后要牢记它。为了强调其重要性，重新在下面将其列出：

$$\mathbf{F}(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t}f(t)dt \tag{18.46a}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}\mathbf{F}(j\omega)d\omega \tag{18.46b}$$

这两个公式中，指数项的指数部分符号相反，其中，$f(t)$ 的表达式中取正号，这与式(18.39)中复傅里叶级数的形式一致，注意到这一点有助于记忆。

这时，要提出一个问题，对于式(18.46)的傅里叶变换对，是否对于任何 $f(t)$，均可以得到其傅里叶变换呢？事实上，对于几乎所有可以实际产生的电压和电流来说，答案是肯定的。$\mathbf{F}(j\omega)$ 存在的一个充分条件为：

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<\infty$$

不过这不是必要条件，因为有些函数虽然不满足此式，但同样存在傅里叶变换，例如阶跃函数就是一个例子。而且可以发现，$f(t)$ 的傅里叶变换存在不一定要求它是非周期的，周期时域函数的傅里叶级数表示只是更一般的傅里叶变换表示法的特例。

在前面已经指出，傅里叶变换对是惟一的。也就是说，对于给定的函数 $f(t)$，只存在一个 $\mathbf{F}(j\omega)$；对于给定的 $\mathbf{F}(j\omega)$，也只存在一个 $f(t)$。

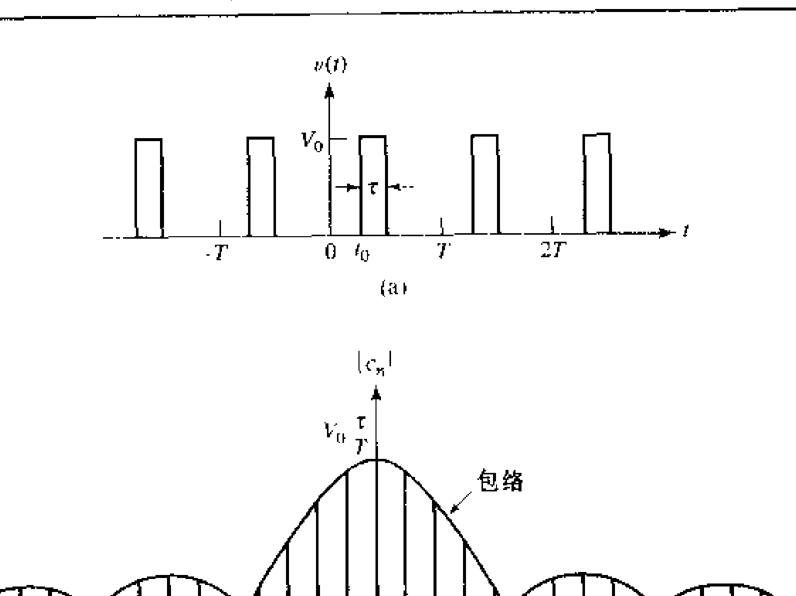
例题 18.5 用傅里叶变换求单个矩形脉冲的连续谱。特别地，考虑图 18.9(a)[重新在图 18.10(a)中画出]所示的脉冲，假设其持续时间区间为 $t_0<t<t_0+\tau$

该脉冲可以表示为：

$$f(t)=\begin{cases}V_0, & t_0<t<t_0+\tau\\ 0, & t<t_0\ 和\ t>t_0+\tau\end{cases}$$

根据式(18.46a)可以得到 $f(t)$ 的傅里叶变换：

$$\mathbf{F}(j\omega)=\int_{t_0}^{t_0+\tau}V_0e^{-j\omega t}dt$$



(b)

图 18.10 (a)周期矩形脉冲;(b)$|c_n|$对应的离散线谱

容易求出这个积分并将其化简得:

$$\mathbf{F}(j\omega) = V_0\tau\,\frac{\sin\frac{1}{2}\omega\tau}{\frac{1}{2}\omega\tau}\,e^{-j\omega(t_0+\tau/2)}$$

$\mathbf{F}(j\omega)$的幅度表示连续频谱,它与采样函数的波形一致。其中,$\mathbf{F}(0)$的值为 $V_0\tau$。频谱的形状与图 18.9(b)所示的包络一致。将$|\mathbf{F}(j\omega)|$随 ω 变化的曲线画出来,它并不表示在任何给定频率下的电压幅度。那么它表示什么呢?考察式(18.45)可以发现,如果 $f(t)$为电压波形,则 $\mathbf{F}(j\omega)$的量纲为"伏特每单位频率",15.2 节中出现过这个概念。

练习

18.8　如果 $f(t) = -10$ V, $-0.2 < t < -0.1$ s, $f(t) = 10$ V, $0.1 < t < 0.2$ s,对任何其他 t, $f(t) = 0$,求当 ω 等于下列值时 $\mathbf{F}(j\omega)$的值:(a)0;(b)10π rad/s;(c)-10π rad/s;(d)15π rad/s;(e)-20π rad/s。

18.9　如果 $-4 < \omega < -2$ rad/s 时 $\mathbf{F}(j\omega) = -10$ V/(rad/s),当 $2 < \omega < 4$ rad/s 时 $\mathbf{F}(j\omega) = +10$ V/(rad/s),当 ω 取其他值时 $\mathbf{F}(j\omega)$等于 0,求 t 等于下列时刻时 $f(t)$的值:(a)10^{-4} s;(b)10^{-2} s;(c)$\pi/4$ s;(d)$\pi/2$ s;(e)π s。

答案:18.8: 0; $j1.273$ V/(rad/s); $-j1.273$ V/(rad/s); $-j0.424$ V/(rad/s); 0。18.9: $j1.909\,9\times10^{-3}$ V; $j0.191\,0$ V; $j4.05$ V; $-j4.05$ V; 0

18.7　傅里叶变换的性质

本节的目标是建立傅里叶变换的若干数学性质,并且更加重要的是理解它们的物理含义。

首先用欧拉公式替换式(18.46a)中的 $e^{-j\omega t}$，得到：

$$\mathbf{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt - j\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt \tag{18.47}$$

因为 $f(t)$，$\cos\omega t$ 和 $\sin\omega t$ 均为时域函数，所以式(18.47)中的积分均为关于 ω 的实函数。因此，令：

$$\mathbf{F}(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = |\mathbf{F}(j\omega)|\,e^{j\phi(\omega)} \tag{18.48}$$

可以得到：

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt \tag{18.49}$$

$$B(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt \tag{18.50}$$

$$|\mathbf{F}(j\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} \tag{18.51}$$

以及：

$$\phi(\omega) = \tan^{-1}\frac{B(\omega)}{A(\omega)} \tag{18.52}$$

用 $-\omega$ 替换 ω 可以发现 $A(\omega)$ 和 $|\mathbf{F}(j\omega)|$ 均为关于 ω 的偶函数，而 $B(\omega)$ 和 $\phi(\omega)$ 均为关于 ω 的奇函数。

如果 $f(t)$ 为关于 t 的偶函数，则式(18.50)的被积函数为奇函数，由于积分区间具有对称性，所以 $B(\omega)$ 为0。因此，如果 $f(t)$ 为偶函数，则其傅里叶变换 $\mathbf{F}(j\omega)$ 为关于 ω 的偶对称实函数，这时，对所有 ω，相位函数 $\phi(\omega)$ 为0或 π。如果 $f(t)$ 为关于 t 奇函数，则 $A(\omega)=0$，$\mathbf{F}(j\omega)$ 为关于 ω 的奇对称纯虚函数，$\phi(\omega)$ 为 $\pm\pi/2$。一般情况下，$\mathbf{F}(j\omega)$ 为关于 ω 的复函数。

最后，注意到，将式(18.47)中的 ω 替换为 $-\omega$，得到 $\mathbf{F}(j\omega)$ 的共轭，即：

$$\mathbf{F}(-j\omega) = A(\omega) - jB(\omega) = \mathbf{F}^*(j\omega)$$

因此，有：

$$\mathbf{F}(j\omega)\mathbf{F}(-j\omega) = \mathbf{F}(j\omega)\mathbf{F}^*(j\omega) = A^2(\omega) + B^2(\omega) = |\mathbf{F}(j\omega)|^2$$

18.7.1 傅里叶变换的物理意义

知道了傅里叶变换的这些基本关系后，现在来考虑其物理意义。假定 $f(t)$ 为 1 Ω 电阻上的电压或者流过 1 Ω 电阻的电流，因此，$f^2(t)$ 为 $f(t)$ 提供给此 1 Ω 电阻的功率。将此功率对时间积分，可以求得 $f(t)$ 提供给此 1 Ω 电阻的总能量：

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt \tag{18.53}$$

下面使用一点技巧对这个积分进行变换。考虑式(18.53)中的被积函数，即 $f(t)$ 乘以它自身，将其中一个 $f(t)$ 用式(18.46b)进行替换，得：

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\,\mathbf{F}(j\omega)\,d\omega\right]dt$$

因为 $f(t)$ 不是关于积分变量 ω 的函数，因此，可以将它放到括号内的积分里面，然后交换积分顺序：

$$W_{1\Omega}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{F}(j\omega)e^{j\omega t}f(t)dt\right]d\omega$$

再将 $\mathbf{F}(j\omega)$从内层积分中提出来，这时，内层积分变为 $\mathbf{F}(-j\omega)$：

$$W_{1\Omega}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{F}(j\omega)\mathbf{F}(-j\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathbf{F}(j\omega)|^2d\omega$$

综合这些结果，得到：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathbf{F}(j\omega)|^2d\omega \tag{18.54}$$

式(18.54)非常有用，它称为 Parseval 定理。该定理以及式(18.53)告诉我们可以通过在整个时域中积分求得能量，也可以通过在整个频域中积分然后乘以 $1/(2\pi)$求得能量。

Parseval 定理使我们能更加深入地理解傅里叶变换的意义。考虑电压 $v(t)$，其傅里叶变换为 $\mathbf{F}_v(j\omega)$，该电压在一个 1 Ω 电阻上提供的能量 $W_{1\Omega}$为：

$$W_{1\Omega}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2d\omega$$

上式右边那个等号成立是因为$|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$ 为关于 ω 的偶对称函数。又因为 $\omega=2\pi f$，因此：

$$W_{1\Omega}=\int_{-\infty}^{\infty}|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2df=2\int_{0}^{\infty}|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2df \tag{18.55}$$

图 18.11 画出了$|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$ 随着 ω 和 f 变化的一个典型的曲线。如果用非常小的区间 df 对频率区间进行分割，那么根据式(18.55)可得，$|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$ 曲线下方宽度为 df 的小块面积为 $|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2df$，如图中阴影部分所示。所有这些面积的和($f$ 从负无穷到正无穷变化)，等于 $v(t)$ 给 1 Ω 电阻提供的总能量。因此，称$|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$ 为单位电阻能量密度或称为 $v(t)$的单位带宽能量(J/Hz)，而且此能量密度函数总是关于 ω 的偶对称非负实函数。在取定的频率区间对$|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$进行积分，可以计算出该频率区间的能量。注意，能量密度与 $\mathbf{F}_v(j\omega)$的相位无关，因此有无穷多个时域函数及傅里叶变换具有相同的能量密度函数。

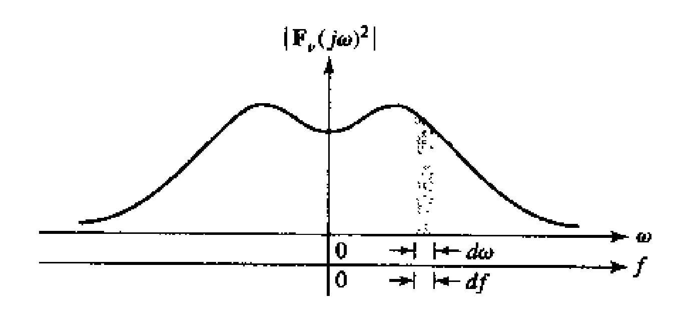


图 18.11　$|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$ 下方的条形区域面积表示 $v(t)$在带宽 df 内的单位电阻能量

例题 18.6　将单边[即 $t<0$ 时 $v(t)=0$]指数脉冲：

$$v(t)=4e^{-3t}u(t)$$

接到理想带通滤波器的输入端，如果该滤波器的通带为 $1<|f|<2$ Hz，计算滤波器输出的总能量

令输出电压为 $v_o(t)$，则 $v_o(t)$的能量等于 $v(t)$在频率区间 $1<f<2$ 和 $-2<f<-1$ 上的能量。首先来求 $v(t)$的傅里叶变换：

$$\mathbf{F}_v(j\omega) = 4\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} e^{-3t} u(t)\, dt$$

$$= 4\int_0^{\infty} e^{-(3+j\omega)t} dt = \frac{4}{3+j\omega}$$

然后计算输入信号的单位电阻能量，它可以用两种办法来求：

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{F}_i(j\omega)|^2 d\omega$$

$$= \frac{8}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{9+\omega^2} = \frac{16}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{d\omega}{9+\omega^2} = \frac{8}{3}\ \mathrm{J}$$

或

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} v^2(t)\, dt = 16\int_0^{\infty} e^{-6t} dt = \frac{8}{3}\ \mathrm{J}$$

$v_o(t)$的总能量比这个值稍小一些，为：

$$W_{o1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-4\pi}^{-2\pi}\frac{16 d\omega}{9+\omega^2} + \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}^{4\pi}\frac{16 d\omega}{9+\omega^2}$$

$$= \frac{16}{\pi}\int_{2\pi}^{4\pi}\frac{d\omega}{9+\omega^2} = \frac{16}{3\pi}\left(\tan^{-1}\frac{4\pi}{3} - \tan^{-1}\frac{2\pi}{3}\right) = 0.358\ \mathrm{J}$$

一般地，理想带通滤波器可以除去某些频率区间的能量而保留另外一些区间的能量。利用傅里叶变换可以帮助定量地求出滤波的效果，而不需要实际求出 $v_o(t)$。当然，如果需要，可以利用傅里叶变换来求 $v_o(t)$的表达式。

练习

18.10 设 $i(t) = 10e^{20t}[u(t+0.1) - u(t-0.1)]$ A，求(a)$\mathbf{F}_i(j0)$；(b)$\mathbf{F}_i(j10)$；(c)$A_i(10)$；(d)$B_i(10)$；(e)$\phi_i(10)$。

18.11 求电流 $i(t) = 20e^{-10t}$在下列区间的单位电阻能量：(a) $-0.1 < t < 0.1$ s；(b) $-10 < \omega < 10$ rad/s；(c)$10 < \omega < \infty$ rad/s。

答案：18.10：3.63 A/(rad/s)；3.33 $\underline{/-31.7^\circ}$ A/(rad/s)；2.83 A/(rad/s) −1.749 A/(rad/s)；−31.7°。18.11：17.29 J；10 J；5 J

18.8 几个简单时域函数的傅里叶变换对

18.8.1 单位冲激函数

下面来求单位冲激函数 $\delta(t-t_0)$的傅里叶变换（在 14.5 节中介绍过冲激函数），也就是说，我们对这个奇异函数的频谱特性或者说对其频域描述感兴趣。如果使用符号$\mathcal{F}\{\}$来表示“{}的傅里叶变换”，则：

$$\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\delta(t-t_0)\, dt$$

对于这种类型的积分，根据前面的讨论有：

$$\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0} = \cos\omega t_0 - j\sin\omega t_0$$

于是可以得到这个关于 ω 的复函数的单位电阻能量密度函数为：

$$|\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\}|^2 = \cos^2\omega t_0 + \sin^2\omega t_0 = 1$$

这个结果说明，在所有频率上，单位冲激函数单位带宽的单位电阻能量为 1，总能量为无穷大。不过，不必感到奇怪，因为实际上这样的单位冲激并不存在，也就是说它不能在实验室中产生。而且，即使存在这样一个冲激，它也会发生变形，因为实验室的任何实际仪器的带宽都是有限的。

因为时域函数和其傅里叶变换之间存在一一对应关系，因此可以说 $e^{-j\omega t_0}$ 的傅里叶逆变换为 $\delta(t-t_0)$。用符号 $\mathcal{F}^{-1}\{\}$ 表示傅里叶逆变换，可以表示为：

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{-j\omega t_0}\} = \delta(t-t_0)$$

因此，现在知道：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}e^{-j\omega t_0}\,d\omega = \delta(t-t_0)$$

而直接计算这种奇异积分则得不到结果。可以用下面的符号来表示这个结果：

$$\delta(t-t_0) \Leftrightarrow e^{-j\omega t_0} \tag{18.56}$$

其中⇔表示这两个函数构成一个傅里叶变换对。

继续考虑单位冲激函数，考虑如下形式的傅里叶变换函数：

$$\mathbf{F}(j\omega) = \delta(\omega-\omega_0)$$

这是 $\omega=\omega_0$ 处的频域单位冲激。相应的 $f(t)$ 为：

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{F}(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\,\delta(\omega-\omega_0)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t}$$

这里用到了单位冲激的位移性质。因此，可以写出：

$$\frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow \delta(\omega-\omega_0)$$

或

$$e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0) \tag{18.57}$$

通过简单地改变一下符号，可以得到：

$$e^{-j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega+\omega_0) \tag{18.58}$$

很明显，式(18.57)和式(18.58)中的时域函数均为复函数，这在现实世界中是不存在的。用实验设备可以产生时域函数 $\cos\omega_0 t$，但却不能产生 $e^{-j\omega_0 t}$。

不过：

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$$

根据傅里叶变换的定义，容易看出：

$$\mathcal{F}\{f_1(t)\} + \mathcal{F}\{f_2(t)\} = \mathcal{F}\{f_1(t)+f_2(t)\} \tag{18.59}$$

因此：

$$\mathcal{F}\{\cos\omega_0 t\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}\right\}$$

$$= \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

上式说明 $\cos \omega_0 t$ 在频域中由一对冲激函数来描述，且这对冲激函数位于 $\omega = \pm \omega_0$ 处。不应该对此感到奇怪，因为在第 14 章中讨论复频率时已经看到，正弦时域函数总是用一对虚频率来表示的，虚频率的位置为 $s = \pm j\omega_0$。因此：

$$\cos \omega_0 t \Leftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \tag{18.60}$$

18.8.2 直流激励函数

在几章以前，首先遇到的激励函数是直流电压或者直流电流。为了求出时域常函数 $f(t) = K$ 的傅里叶变换，首先想到的是将这个常数代入傅里叶变换的定义式中，然后求积分。不过，这么做将会得到一个不确定的表达式。幸运的是，前面实际上已经解决了这个问题，根据式(18.58)：

$$e^{-j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

如果令 $\omega_0 = 0$，则可以得到所求变换对：

$$1 \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \tag{18.61}$$

根据上式可以得到：

$$K \Leftrightarrow 2\pi K\delta(\omega) \tag{18.62}$$

因此，这个问题得到了解答。直流时域函数的频谱只包含一种频率成分 $\omega = 0$，这一点我们早就知道了。

18.8.3 符号函数

再举一个例子，求符号函数 $\text{sgn}(t)$ 的傅里叶变换，这也是一个奇异函数，它由下式定义：

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \tag{18.63}$$

或

$$\text{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$$

如果将这个时域函数代入傅里叶变换的定义式中，在进行积分限代入时，同样会得到一个不确定的解。当 $|t|$ 趋于无穷时，如果时域函数不趋于零，则用通常的办法对这种函数进行傅里叶变换时，总是会碰到和上面一样的问题。不过，可以使用拉普拉斯变换来避免这个问题，因为拉普拉斯变换本身含有一个收敛因子，在计算某些具有奇异性的傅里叶变换时，通过它可以消除奇异性。

上述符号函数可以表示为：

$$\text{sgn}(t) = \lim_{a \to 0}[e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)]$$

注意到中括号中的表达式在 $|t|$ 趋于无穷时为 0。根据傅里叶变换的定义，有：

$$\mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\} = \lim_{a \to 0}\left[\int_0^{\infty} e^{-j\omega t}e^{-at}dt - \int_{-\infty}^{0} e^{-j\omega t}e^{at}dt\right]$$

$$= \lim_{a \to 0} \frac{-j2\omega}{\omega^2 + a^2} = \frac{2}{j\omega}$$

其实部为 0,因为 sgn(t)为关于 t 的奇函数。因此:

$$\operatorname{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{2}{j\omega} \tag{18.64}$$

18.8.4　单位阶跃函数

作为本节的最后一个例子,来看很熟悉的单位阶跃函数 $u(t)$。利用前面求得的符号函数的结果,将单位阶跃函数表示为:

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)$$

然后可以得到这个傅里叶变换对:

$$u(t) \Leftrightarrow \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] \tag{18.65}$$

表 18.1 给出了本节所得到的结果,其中也包含了一些这里没有讨论的变换对。

表 18.1　傅里叶变换表

$f(t)$	$f(t)$	$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathbf{F}(j\omega)$	$\lvert\mathbf{F}(j\omega)\rvert$
	$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	
复数	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	
	$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$	
	1	$2\pi\delta(\omega)$	
	$\operatorname{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$	
	$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$	
	$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{\alpha+j\omega}$	

（续表）

$f(t)$	$f(t)$	$\mathcal{F}\{f(t)\}=\mathbf{F}(j\omega)$	$\lvert\mathbf{F}(j\omega)\rvert$
	$[e^{-\alpha t}\cos\omega_d t]u(t)$	$\dfrac{\alpha+j\omega}{(\alpha+j\omega)^2+\omega_d^2}$	
	$u(t+\frac{1}{2}T)-u(t-\frac{1}{2}T)$	$T\dfrac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}$	

例题 18.7 利用表 18.1 求时域函数 $3e^{-t}\cos 4tu(t)$ 的傅里叶变换

根据倒数第二个表项，有：

$$e^{-\alpha t}\cos\omega_d tu(t)\Leftrightarrow\frac{\alpha+j\omega}{(\alpha+j\omega)^2+\omega_d^2}$$

然后取 α 为 1，取 ω_d 为 4，得到：

$$\mathbf{F}(j\omega)=(3)\times\frac{1+j\omega}{(1+j\omega)^2+16}$$

练习

18.12 计算下列时域函数的傅里叶变换在 $\omega=12$ 时的值：(a)$4u(t)-10\delta(t)$；(b)$5e^{-8t}u(t)$；(c)$4\cos 8tu(t)$；(d)$-4\operatorname{sgn}(t)$。

18.13 求当 $\mathbf{F}(j\omega)$ 为下列函数时，$f(t)$ 的值在 $t=2$ 时的值：(a)$5e^{-j3\omega}-j(4/\omega)$；(b)$8[\delta(\omega-3)+\delta(\omega+3)]$；(c)$(8/\omega)\sin 5\omega$。

答案：18.12：$10.01\angle-178.1°$；$0.347\angle-56.3°$；$-j0.6$；$j0.667$。18.13：2.00；2.45；0.800

18.9 一般周期时域函数的傅里叶变换

在 18.6 节中曾经说过，和非周期函数一样，周期函数也具有傅里叶变换。下面来严格地推导这个结论。考虑周期为 T 的时域函数 $f(t)$ 及其傅里叶展开式，分别用式(18.39)、式(18.40)和式(18.41)表示：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t}\tag{18.39}$$

$$\mathbf{c}_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\tag{18.40}$$

以及：

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}\tag{18.41}$$

记住，和的傅里叶变换等于傅里叶变换的和，因为 $\mathbf{c}_n$ 不是时间的函数，因此：

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n \mathcal{F}\{e^{jn\omega_0 t}\}$$

根据式(18.57)可以得到 $e^{jn\omega_0 t}$ 的傅里叶变换，于是：

$$f(t) \Leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n \delta(\omega - n\omega_0) \tag{18.66}$$

这说明 $f(t)$ 的频谱是由冲激串组成的离散谱，这些冲激串在 ω 轴上的位置为 $\omega = n\omega_0, n = \cdots, -2, -1, 0, 1, \cdots$。每个冲激的强度等于 $f(t)$ 复数形式的傅里叶级数展开式中相应的系数乘以 2π。

为了检验上面这个结果，来看式(18.66)等号右边的表达式的傅里叶逆变换是否等于 $f(t)$。这个傅里叶逆变换可以表示为：

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{F}(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\left[2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n \delta(\omega - n\omega_0)\right] d\omega \overset{?}{=} f(t)$$

因为指数项不含和式的求和指标 n，因此，可以交换积分和求和顺序：

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{F}(j\omega)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{j\omega t} \delta(\omega - n\omega_0) d\omega \overset{?}{=} f(t)$$

因为 $\mathbf{c}_n$ 不是积分变量的函数，因此在积分号内可以将它看做常数。于是，根据冲激函数的移位特性，可以得到：

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{F}(j\omega)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} \overset{?}{=} f(t)$$

这和 $f(t)$ 复数形式的傅里叶级数展开式(18.39)完全一致。因此，现在可以将上式中的问号去掉了，这样就证明了周期时域函数的傅里叶变换的存在性。不过，不必对此感到奇怪，上一节中已经计算出余弦函数的傅里叶变换，余弦函数显然是周期的，虽然那时没有直接指出其周期性。但是前面在计算余弦函数的傅里叶变换时采用的是间接的办法，现在有了这个数学工具后，通过它可以更加直接地求出其傅里叶变换。为了说明这个过程，再次考虑 $f(t) = \cos \omega_0 t$，首先计算其傅里叶系数 $\mathbf{c}_n$：

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_0 t e^{-jn\omega_0 t} dt = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = \pm 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

于是：

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

只有当 $n = \pm 1$ 时，上式才不为 0，因此，整个求和式可以简化为：

$$\mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\} = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

这和前面求得的结果完全一致。

练习

18.14 求(a)$\mathcal{F}\{5 \sin^2 3t\}$；(b)$\mathcal{F}\{A \sin \omega_0 t\}$；(c)$\mathcal{F}\{6 \cos(8t + 0.1\pi)\}$。

答案：$2.5\pi[2\delta(\omega) - \delta(\omega+6) - \delta(\omega-6)]$；$j\pi A[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)]$；$[18.85\angle 18°]\delta(\omega-8) + [18.85\angle -18°]\delta(\omega+8)$

18.10 系统函数和频率响应

在 15.6 节中,学习了在给定输入和物理系统中的冲激响应后,使用时域卷积积分求系统输出的方法,其中的输入、输出和冲激响应均为时域函数。学习了拉普拉斯变换后,发现在频域中进行求解更加方便一些,因为两个函数卷积的拉普拉斯变换等于这两个函数的拉普拉斯变换的乘积,对于傅里叶变换也有类似的结果。

为了证明这一点,考虑系统输出的傅里叶变换。假定输入和输出均为电压,从傅里叶变换的基本定义出发,将输出表示为卷积积分的形式为:

$$\mathcal{F}\{v_0(t)\} = \mathbf{F}_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} v_i(t-z)h(z)dz\right]dt$$

同样地,假定没有存储初始能量。初看起来,这个式子非常复杂,不过,却可以将它化为一种非常简单的形式。首先,将指数项移到积分内部,因为它不含积分变量 z,然后交换积分顺序得:

$$\mathbf{F}_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}v_i(t-z)h(z)dt\right]dz$$

因为 $h(z)$不是时间的函数,因此可以将它从里面那个积分中移出,然后进行变量替换 $t-z=x$ 以简化里面的积分:

$$\mathbf{F}_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(z)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega(x+z)}v_i(x)dx\right]dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega z}h(z)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x}v_i(x)dx\right]dz$$

现在看到了曙光,因为里面那个积分恰好等于 $v_i(t)$的傅里叶变换,而且它不含 z,因此对 z 进行积分时可以将它看做常量。于是,可以将 $\mathbf{F}_i(j\omega)$移到积分符号的外面:

$$\mathbf{F}_0(j\omega) = \mathbf{F}_i(j\omega)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega z}h(z)dz$$

最后剩下的又是熟悉的积分,它也是一个傅里叶变换!这是系统冲激响应的傅里叶变换,用 $\mathbf{H}(j\omega)$来表示它。于是可以得到下面的简单结果:

$$\mathbf{F}_0(j\omega) = \mathbf{F}_i(j\omega)\mathbf{H}(j\omega) = \mathbf{F}_i(j\omega)\mathcal{F}\{h(t)\}$$

这又是一个非常重要的结果,它定义了系统函数等于响应函数的傅里叶变换与激励函数的傅里叶变换的比值。而且,系统函数与冲激响应构成一个傅里叶变换对:

$$h(t)\Leftrightarrow\mathbf{H}(j\omega) \tag{18.67}$$

上面的推导同时也证明了一个一般的命题,即两个时域函数卷积的傅里叶变换等于它们的傅里叶变换的乘积:

$$\mathcal{F}\{f(t)*g(t)\} = \mathbf{F}_f(j\omega)\mathbf{F}_g(j\omega) \tag{18.68}$$

重述一下,如果已经知道激励函数和冲激响应的傅里叶变换,那么系统响应的傅里叶变换等于它们的乘积。这个结果是响应函数的频域描述,响应函数的时域描述可以通过求傅里叶逆变换得到。因此,时域卷积的过程等效于相对简单的频域乘法运算。

前面的说明可能又会让人感到迷惑,既然在频域中计算要容易一些,为什么还要在时域中求解呢?但必须时刻记住,不要去做无用功。一位诗人曾经说过:“我们最真诚的笑声中/充满

了痛楚[1]。"这里的"痛楚"在于求响应函数的傅里叶逆变换时的困难,原因在于数学上的复杂性。另一方面,用简单的台式计算机可以很快地求出两个时域函数的卷积。下面将给出一个 MATLAB 例子,从中可以看到,也可以用计算机来快速地计算 FFT(快速傅里叶变换)。因此,在时域中进行计算和在频域中进行计算,两种方法的优势没有很明显的分界线。一个新问题产生时,必须做一个选择,这要根据当前已知的信息以及所拥有的计算设备来决定。

考虑下面形式的激励函数:

$$v_i(t) = u(t) - u(t-1)$$

以及下面的单位冲激响应:

$$h(t) = 2e^{-t}u(t)$$

首先分别求出它们的傅里叶变换。激励函数为两个单位阶跃函数的差,这两个阶跃函数除了其中一个比另一个有 1 秒的延时外,它们完全一致。首先来计算 $u(t)$产生的响应,而 $u(t-1)$产生的响应除了 1 秒的延时外是相同的。将这两个部分响应相减就得到 $v_i(t)$产生的总的响应。

18.8 节中已经求出了 $u(t)$的傅里叶变换为:

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

对 $h(t)$求傅里叶变换,可以求得系统函数,表 18.1 列出了该函数的变换:

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = \mathbf{H}(j\omega) = \mathcal{F}\{2e^{-t}u(t)\} = \frac{2}{1+j\omega}$$

将这两个函数相乘并求傅里叶逆变换,得到 $v_o(t)$中由 $u(t)$产生的部分:

$$v_{o1}(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2\pi\delta(\omega)}{1+j\omega} + \frac{2}{j\omega(1+j\omega)}\right\}$$

根据单位冲激函数的移位特性可知第一项的逆变换为常数 1。因此:

$$v_{o1}(t) = 1 + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega(1+j\omega)}\right\}$$

第二项的分母是形式为$(\alpha + j\omega)$的两个因子的乘积,使用部分分式分解(在微积分导论课程中都应该学过这种方法),很容易求出其逆变换。这里采用求部分分式分解的方法,虽然在许多情况下还有更好的方法,不过这种方法有一个最大的好处,因为它总能求出解来。每个分式的分子为待定常量,这里一共有两个:

$$\frac{2}{j\omega(1+j\omega)} = \frac{A}{j\omega} + \frac{B}{1+j\omega}$$

然后用一个简单的值去替换 $j\omega$。令 $j\omega = 1$,得到:

$$1 = A + \frac{B}{2}$$

然后令 $j\omega = -2$,得到:

$$1 = -\frac{A}{2} - B$$

于是可以得到 $A = 2, B = -2$。因此:

---

[1] P. B. Shelley, "To a Skylark" 1821。

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega(1+j\omega)}\right\}=\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega}-\frac{2}{1+j\omega}\right\}=\operatorname{sgn}(t)-2e^{-t}u(t)$$

因此:

$$\begin{aligned}v_{o1}(t)&=1+\operatorname{sgn}(t)-2e^{-t}u(t)\\&=2u(t)-2e^{-t}u(t)\\&=2(1-e^{-t})u(t)\end{aligned}$$

根据前面的结果可知,$v_o(t)$中由 $u(t-1)$产生的成分为:

$$v_{o2}(t)=2(1-e^{-(t-1)})u(t-1)$$

因此:

$$\begin{aligned}v_o(t)&=v_{o1}(t)+v_{o2}(t)\\&=2(1-e^{-t})u(t)-2(1-e^{-(t+1)})u(t-1)\end{aligned}$$

由于在 $t=0$ 和 $t=1$ 处不连续,因此将此函数用三个时间区间表示如下:

$$v_o(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 2(1-e^{-t}), & 0<t<1\\ 2(e-1)e^{-t}, & t>1\end{cases}$$

练习

18.15 某线性网络的冲激响应为 $h(t)=6e^{-20t}u(t)$,输入信号为 $3e^{-6t}u(t)$ V。求(a) $\mathbf{H}(j\omega)$;(b)$\mathbf{V}_i(j\omega)$;(c)$\mathbf{V}_o(j\omega)$;(d)$v_o(0.1)$;(e)$v_o(0.3)$;(f)$v_{o,\max}$。

答案:$6/(20+j\omega)$;$3/(6+j\omega)$;$18/[(20+j\omega)(6+j\omega)]$;0.532 V;0.209 V;0.537 2 V

计算机辅助分析

本章所提供的资料可以为以后许多更高级领域的学习奠定基础,这些领域包括信号处理、通信和控制领域等等。在本书中,只能介绍一些很基本的概念,即使如此,仍然可以看到基于傅里叶分析的应用。作为第一个例子,考虑图 18.12 所示的运放电路,这是在 PSpice 中用一个运算放大器 μA741 构造的电路。

因为该电路的电压增益为 −10,而输入正弦波的幅度为 1 V,因此希望输出的正弦信号幅度为 10 V。用 PSpice 对电路进行瞬态分析,确实可以得到这个结果,如图 18.13 所示。

使用 PSpice,用快速傅里叶变换(FFT)可以求出输出电压的频谱,FFT 是信号的傅里叶变换的离散时间近似。从 Plot 菜单中选择 Axis Settings,然后在 Processing Options 中将标有 Fourier 的框选中。则对于图 18.12,得到的结果如图 18.14 所示。

如果峰值电压增加,则输出电压峰值将逐渐达到饱和电压,这个饱和电压由运放的正负直流电压源决定。比如,当输入电压幅度为 1.8 V 时,得到的是一个被“剪切”的输出电压波形,如图 18.15 所示。因为电压波形不再是标准的正弦波,因此可以想像,该函数的频谱中在谐波频率上具有非零值,如图 18.16 所示。达到饱和以后,输出信号将会变形,不再是一个平滑的 100 Hz 的波形,而是 100 Hz 的基波和谐波的叠加。这时,从理论上说输出谐波的数目为无穷多,不过从图 18.16 中可以看到,大部分的能量都集中在前面几个谐波中。

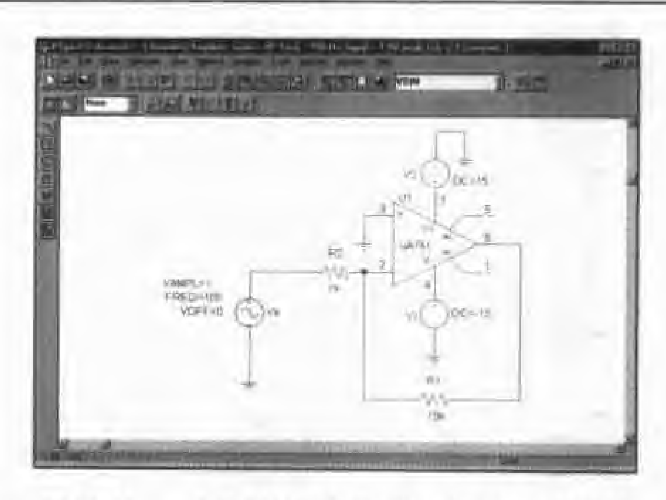


图 18.12 一个反相运放电路，输入为 100 Hz 正弦波

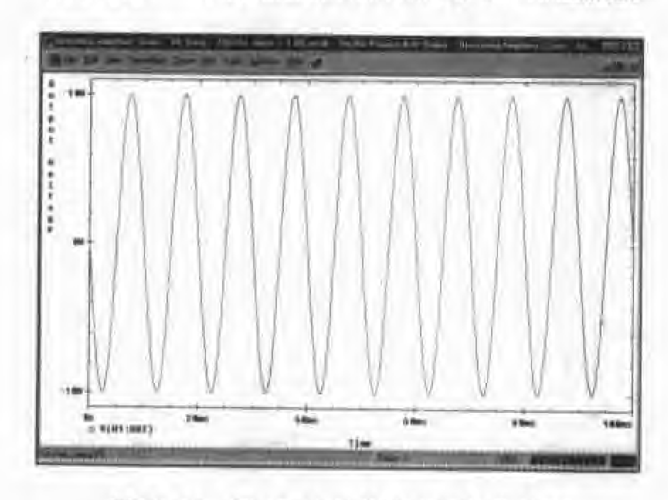


图 18.13 图 18.12 的输出电压仿真结果

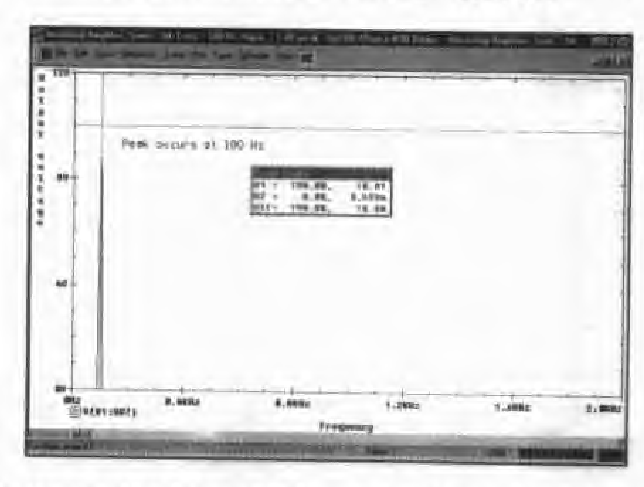


图 18.14 图 18.13 的傅里叶变换的离散近似。谱线具有一定宽度是因为仿真的周期数有限

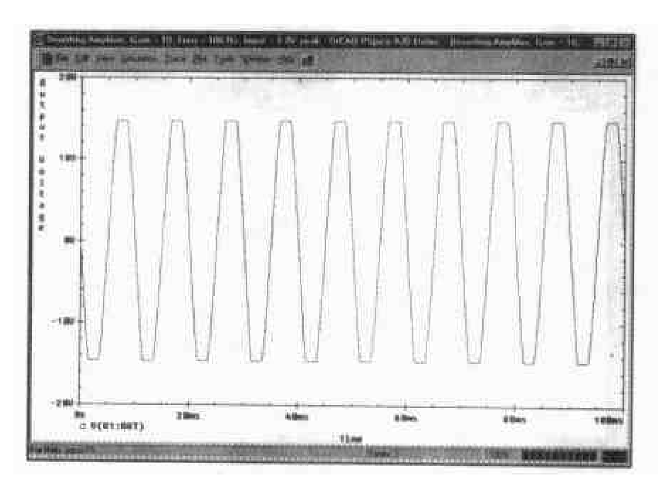


图 18.15 输入为 1.8 V 正弦电压时的输出仿真结果，这时输出已经产生饱和

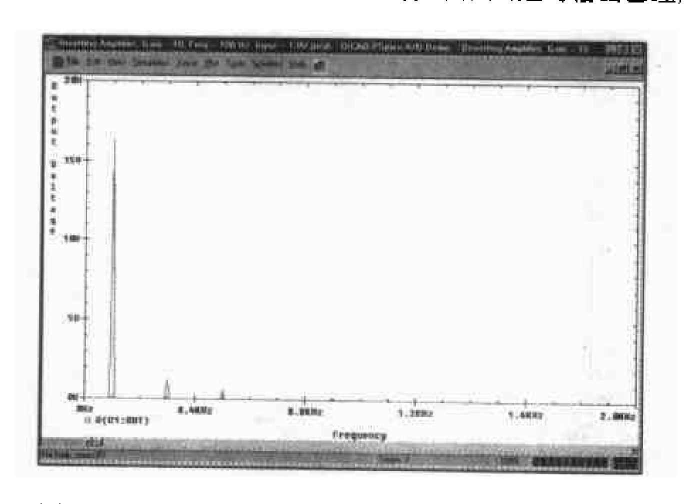


图 18.16 图 18.15 所示波形的频谱，出现了几个谐波

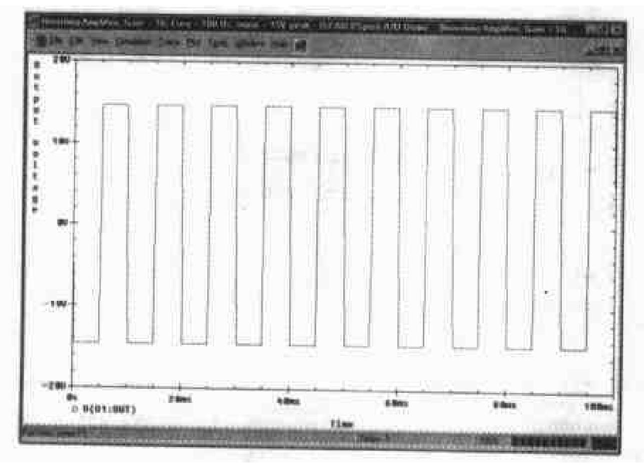


图 18.17 输入为 15 V 正弦电压时的输出仿真结果，这时产生了深度饱和

更极端的是，当输入电压幅度为 15 V 时，输出波形将产生严重失真，这时其频谱只含有偶次谐波，如图 18.18 所示。

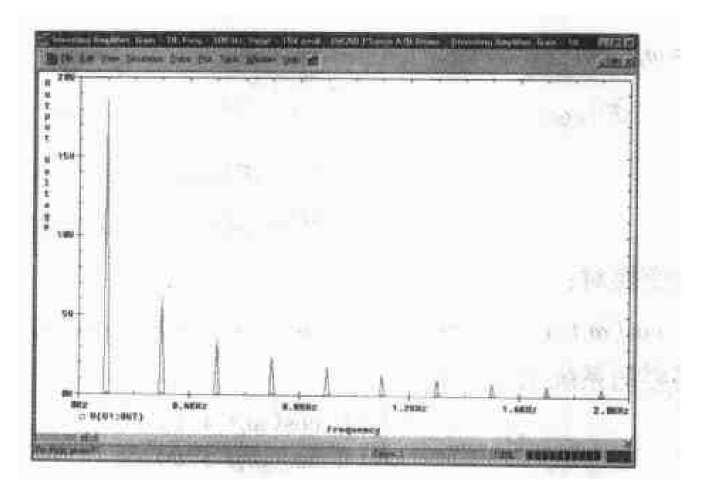


图 18.18　图 18.17 所示波形的 FFT，可以看到，相对基频（100 Hz）能量而言，谐波能量有了很大增加

在 MATLAB 中也可以使用 FFT，限于篇幅，这里就不讨论了。

18.11　系统函数的物理意义

本节中我们试图将傅里叶变换的特点与前面学习的知识联系起来。

给定一个没有初始能量存储的线性双口网络 N，假定正弦激励函数和响应函数为电压，如图 18.19 所示。令输入为 $A\cos(\omega_x t+\theta)$，因此输出可以表示为 $B\cos(\omega_x t+\phi)$，其中幅度 B 和相角 ϕ 为 ω_x 的函数。可以将激励函数和响应函数分别表示为复相量形式 $\mathbf{V}_i = Ae^{j\theta}$，$\mathbf{V}_o = Be^{j\phi}$。复相量形式的响应函数和激励函数的比为 ω_x 的函数：

$$\frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \mathbf{G}(\omega_x) = \frac{B}{A}e^{j(\phi-\theta)}$$

其中 B/A 和 $\phi-\theta$ 分别为 $\mathbf{G}$ 的幅度和相位。传递函数 $\mathbf{G}(\omega_x)$ 可以在实验室中用下面的方法测得，即通过改变 ω_x，然后对每个 ω_x 测量幅度 B/A 和相位 $\phi-\theta$，再将这两个参数随 ω_x 变化的曲线画出来，当点数足够多时，得到的两条曲线可以完整地描述传递函数。

+　　　　　　　　　　　　　　　　　　+

$v_i(t) = A\cos(\omega_x t+\theta)$　　N　　$v_o(t) = B\cos(\omega_x t+\phi)$

图 18.19　可以用正弦分析来确定传递函数 $\mathbf{H}(j\omega_x) = (B/A)e^{j(\phi-\theta)}$，其中 B 和 ϕ 均为 ω_x 的函数

暂时将上面的讨论放一边，从另一个角度来考虑这个问题。

对于图 18.19 所示的电路，当输入和输出均为正弦函数时，其系统函数是什么呢？为了回答这个问题，首先定义 $\mathbf{H}(j\omega)$ 为输出的傅里叶变换与输入的傅里叶变换的比值。这两个时域函数均具有 $\cos(\omega_x t+\beta)$ 的形式，我们还没有求出其傅里叶变换（虽然已经求出了 $\cos\omega_x t$ 的变换），这里要求的傅里叶变换为：

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_x t+\beta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\cos(\omega_x t+\beta)\,dt$$

如果做替换 $\omega_x t+\beta=\omega_x\tau$，则可以得到：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\cos(\omega_x t+\beta)\}&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega\tau+j\omega\beta/\omega_x}\cos\omega_x\tau\,d\tau\\&=e^{j\omega\beta/\omega_x}\ \mathcal{F}\{\cos\omega_x t\}\\&=\pi e^{j\omega\beta/\omega_x}\ [\delta(\omega-\omega_x)+\delta(\omega+\omega_x)]\end{aligned}$$

这是一个新的傅里叶变换对：

$$\cos(\omega_x t+\beta)\Leftrightarrow\pi e^{j\omega\beta/\omega_x}\ [\delta(\omega-\omega_x)+\delta(\omega+\omega_x)]\tag{18.69}$$

现在可以用它来求需要的系统函数了：

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(j\omega)&=\frac{\mathcal{F}\{B\cos(\omega_x t+\phi)\}}{\mathcal{F}\{A\cos(\omega_x t+\theta)\}}\\&=\frac{\pi Be^{j\omega\phi/\omega_x}\ [\delta(\omega-\omega_x)+\delta(\omega+\omega_x)]}{\pi Ae^{j\omega\theta/\omega_x}[\delta(\omega-\omega_x)+\delta(\omega+\omega_x)]}\\&=\frac{B}{A}e^{j\omega(\phi-\theta)/\omega_x}\end{aligned}$$

现在再来看 $\mathbf{G}(\omega_x)$ 的表达式：

$$\mathbf{G}(\omega_x)=\frac{B}{A}e^{j(\phi-\theta)}$$

其中 B 和 ϕ 均为 $\omega=\omega_x$ 时的值。当 $\omega=\omega_x$ 时，$\mathbf{H}(j\omega)$ 等于：

$$\mathbf{H}(\omega_x)=\mathbf{G}(\omega_x)=\frac{B}{A}e^{j(\phi-\theta)}$$

因为下标 x 没有什么特殊的含义，这样，可以认为系统函数和传递函数是一样的：

$$\mathbf{H}(j\omega)=\mathbf{G}(\omega)\tag{18.70}$$

上式中，一个参数为 ω 而另一个为 $j\omega$，这是人为取的，没有本质区别，这里的 j 仅仅是为了更方便地将傅里叶变换和拉普拉斯变换进行比较。

式(18.70)表示傅里叶变换的方法和正弦稳态分析之间的联系。前面所学的使用复相量的正弦稳态分析只是傅里叶变换的一个特例，傅里叶变换是更一般的分析方法。这里说“特例”指的是输入和输出均为正弦函数，而使用傅里叶变换和系统函数则还可以处理非正弦激励函数和响应函数的情形。

因此，为了求出网络的系统函数 $\mathbf{H}(j\omega)$，只需要确定相应的以 ω（或 $j\omega$）为自变量的正弦传递函数即可。

例题 18.8　如图 18.20(a)所示电路，当输入为指数衰减脉冲时，求电感两端的电压

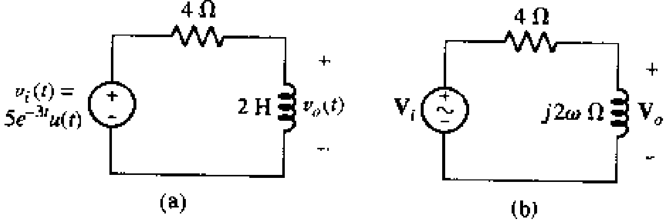


图 18.20　(a)求 $v_i(t)$ 激励下的响应 $v_o(t)$；(b)可以用正弦稳态分析来求得系统函数 $\mathbf{H}(j\omega)$，$\mathbf{H}(j\omega)=\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_i$

为了求出问题的解，需要知道系统函数，但没有必要使用冲激函数，求出冲激响应，再求其逆变换来求得系统函数。其实，可以利用式(18.70)来求系统函数。首先假定输入和输出均为正弦电压，因此可以将它们表示为复相量的形式，如图18.20(b)所示。根据分压原理有：

$$\mathbf{H}(j\omega)=\frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i}=\frac{j2\omega}{4+j2\omega}$$

激励函数的傅里叶变换为：

$$\mathcal{F}\{v_i(t)\}=\frac{5}{3+j\omega}$$

因此 $v_o(t)$ 的傅里叶变换可以用下式表示：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{v_o(t)\}&=\mathbf{H}(j\omega)\mathcal{F}\{v_i(t)\}\\&=\frac{j2\omega}{4+j2\omega}\frac{5}{3+j\omega}\\&=\frac{15}{3+j\omega}-\frac{10}{2+j\omega}\end{aligned}$$

根据最后一步的部分分式分解，可以求出傅里叶逆变换为：

$$\begin{aligned}v_o(t)&=\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{15}{3+j\omega}-\frac{10}{2+j\omega}\right\}\\&=15e^{-3t}u(t)-10e^{-2t}u(t)\\&=5(3e^{-3t}-2e^{-2t})u(t)\end{aligned}$$

这样很容易就得到了问题的解，而且没有使用卷积和微分方程。

练习

18.16　如图18.21所示电路，如果 i_s 等于下列值，分别使用傅里叶变换的方法求 $t=1.5$ ms时 $i_1(t)$ 的值：(a) $\delta(t)$ A；(b) $u(t)$ A；(c) $\cos 500t$ A

答案： −141.7 A; 0.683 A; 0.308 A

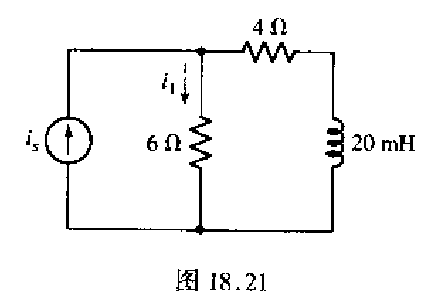


图18.21

18.11.1　本节小结

回到式(18.70)，它表明系统函数 $\mathbf{H}(j\omega)$ 和正弦稳态传递函数 $\mathbf{G}(\omega)$ 是等同的，现在可以认为系统函数为输出复相量与输入复相量的比。假定输入复相量的幅度为1，相位为0，那么输出则为 $\mathbf{H}(j\omega)$。这样，如果对所有 ω，将输出的幅度和相位随 ω 变化的值记录下来，那么就相当于记录了系统函数 $\mathbf{H}(j\omega)$。换句话说，相当于考察了无穷多个正弦输入下系统的响应，这些

正弦输入的幅度均为 1,相位均为 0。现在假定输入为单位冲激,然后考察冲激响应 $h(t)$。这种情况和刚才分析过的情况有什么不同吗?我们知道,单位冲激的傅里叶变换为常数 1,也就是说,它包含所有的频率成分,而且这些频率成分的幅度均相同,相位均为 0,系统响应为所有这些频率成分产生的响应的和。可以用阴极射线管示波器来观察其输出。很显然,就系统的响应而言,系统函数和冲激响应函数反映了相同的信息。

因此,可以用两种不同的方法来描述在激励函数作用下系统的响应,其中一种是时域描述,另一种是频域描述。在时域中计算时,将激励函数与系统的冲激响应进行卷积,可以求得响应函数。在学习卷积时,可以将输入看做是不同强度和时间的冲激连续集(continuum),而输出则为冲激响应连续集。

然而,在频域中进行计算时,则用系统函数乘以激励函数的傅里叶变换来求得响应。这时,将激励函数的傅里叶变换看做是频率谱,或者说是正弦波连续集(continuum of sinusoid),将它与系统函数相乘,可以得到响应函数,这也是正弦波连续集。

不管我们将输出看做是冲激响应连续集还是正弦响应连续集,由于网络的线性性质,根据叠加原理,可以通过对所有频率求和(傅里叶逆变换)或者对所有时间求和(傅里叶变换)得到总的输出。

不过,在使用时这两种方法均有一定的困难和局限性。如果激励函数和冲激响应函数很复杂,则求卷积积分很困难。而且,从实验的角度来看,实际上并不能测量出系统的冲激响应,因为不能产生冲激函数。虽然可以通过一个幅度很大的窄脉冲来作为冲激函数的近似,但是这样很可能会导致系统饱和,以至超出线性工作范围。

至于频域分析,碰到的一个很大的限制是,有些函数不存在傅里叶变换;另外,如果希望求出响应函数的时域描述,则必须计算傅里叶逆变换,而有些逆变换非常难以求出。

另外,这两种方法均不能非常方便地处理初始条件。对于这一点而言,拉普拉斯变换具有明显的优势。

使用傅里叶变换最大的好处在于它可以给出信号的频谱信息,特别是单位带宽内的能量或功率信息,对于这些信息,有些也很容易用拉普拉斯变换得到。对于这两种变换各自优点的详细讨论,将其留给后续的信号与系统课程。

如果要问,为什么直到现在才讨论这些内容?这个问题最好的回答可能是因为这些功能强大的方法使得简单的问题复杂化,不利于理解简单网络的物理特性。举个例子来说,如果只对受迫响应感兴趣,那么没有理由使用拉普拉斯变换去求出受迫响应和自由响应,然后再花很大的功夫去求逆变换。

好的,所有的事情都有一个结束,我们就不继续讨论下去了。在课程的最后,祝你们在以后的学习中取得成功。

18.12 小结与复习

- 基波频率为 ω_0 的正弦波的谐波频率为 $n\omega_0$。
- 傅里叶定理指出,如果函数 $f(t)$ 满足某些特性,则可以把它表示为无穷级数 $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$,其中 $a_0 = (1/T)\int_0^T f(t)\,dt$,$a_n = (2/T)\int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t\, dt$,

$b_n = (2/T)\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\, dt$。

- 如果函数 $f(t)$ 满足 $f(t)=f(-t)$，则它具有偶对称性。
- 如果函数 $f(t)$ 满足 $f(t)=-f(-t)$，则它具有奇对称性。
- 如果函数 $f(t)$ 满足 $f(t)=-f(t-\frac{1}{2}T)$，则它具有半波对称性。
- 偶函数的傅里叶级数只含有常数项和余弦函数项。
- 奇函数的傅里叶级数只含有正弦函数项[1]。
- 具有半波对称性的函数的傅里叶级数只含有奇次谐波。
- 函数的傅里叶级数也可以用复数或指数形式表示，其中 $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t}$，$\mathbf{c}_n = (1/T)\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt$。
- 使用傅里叶变换可以将时变函数表示为频域形式，这和拉普拉斯变换类似。傅里叶变换的定义式为 $\mathbf{F}(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t}f(t)\,dt$ 和 $f(t)=(1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}\mathbf{F}(j\omega)\,d\omega$。

习题

1. 设 $v(t)=3-3\cos(100\pi t-40°)+4\sin(200\pi t-10°)+2.5\cos 300\pi t$ V。求(a) V_{av}；(b) V_{eff}；(c) T；(d) $v(18\text{ ms})$。
2. (a)画出电压 $v(t)=2\cos 2\pi t+1.8\sin 4\pi t$ 在区间 $0<t<T$ 上的波形；(b)求该区间上 $v(t)$ 的最大值；(c)求该区间上 $v(t)$ 幅度最大的负电压值。
3. 图 18.22 所示的波形以周期 $T=10$ s 重复。求(a)平均值；(b)有效值；(c) a_3 的值。

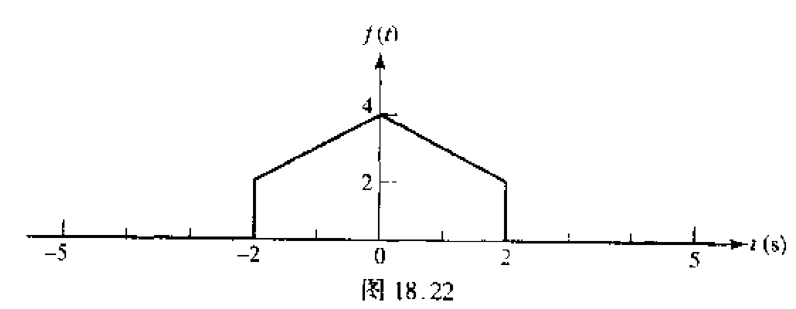


图 18.22

4. 对于图 18.23 所示的周期波形，求(a) T；(b) f_0；(c) ω_0；(d) a_0；(e) b_2。

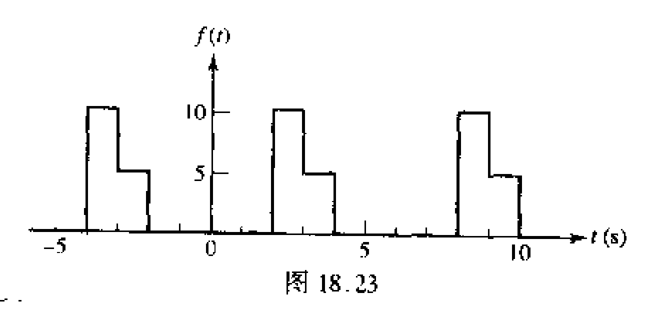


图 18.23

[1] 原文为只含常数项和正弦函数项，有误——译者注。

5. 对于图 18.23 的波形,求 a_3,b_3 和$\sqrt{a_3^2+b_3^2}$。

6. 对于下列周期时域函数,求傅里叶级数的三角形式,计算 T 的值,然后求平均值:(a) $3.8\cos^2 80\pi t$;(b)$3.8\cos^3 80\pi t$;(c)$3.8\cos 79\pi t-3.8\sin 80\pi t$。

7. 某周期时域函数的周期为 $T=2$ s,$f(t)=0$, $-1<t<0$;$f(t)=1$, $0<t<t_1$;$f(t)=0$, $t_1<t<1$。(a)t_1 为何值时,b_4 取最大值? (b)求 $b_{4,\max}$。

8. 某电信号可以表示为 $g(t)=-5+8\cos 10t-5\cos 15t+3\cos 20t-8\sin 10t-4\sin 15t+2\sin 20t$。求(a)$g(t)$的周期;(b)该信号的带宽(单位为 Hz);(c)$g(t)$的平均值;(d)$g(t)$的有效值;(e)该信号的离散幅度谱和相位谱。

9. 例题 18.1 的波形[图 18.2(a)]为半波整流器的输出。如果半个正弦波占据整个区间,例如 $-0.5<t<-0.3$, $-0.3<t<-0.1$, $-0.1<t<0.1$,以此类推,则输出为全波整流器。求这种情况下三角形式的傅里叶级数。

10. (a)指出图 18.24 所示波形具有那种对称性;(b)a_n、b_n 和 a_0 中那些等于 0? (c)求 a_1, b_1, a_2, b_2, a^3 和 b_3。

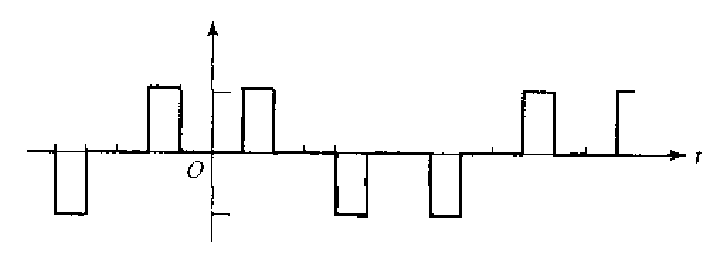


图 18.24

11. 已知周期函数 $y(t)$具有奇对称性,其幅度谱如图 18.25 所示。如果所有的 a_n 和 b_n 均为非负值:(a)求 $y(t)$的傅里叶级数;(b)求 $y(t)$的有效值;(c)计算 $y(0.2\text{ ms})$的值。

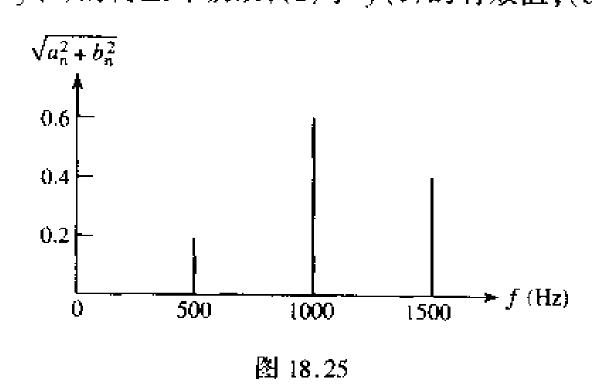


图 18.25

12. 根据图 18.26 所给出的 $f(t)$在区间 $0<t<3$ 上的波形画一个新的函数 $g(t)$,使得 $g(t)$在 $0<t<3$ 时等于 $f(t)$并且(a)$T=6$ 同时具有偶对称性;(b)$T=6$ 同时具有奇对称性;(c)$T=12$ 同时具有偶对称性和半波对称性;(d)$T=12$ 同时具有奇对称性和半波对称性;(e)求每种情况下 a_5 和 b_5 的值。

13. 图 18.27 所示的波形以 4 ms 周期重复。(a)求直流成分 a_0;(b)求 a_1 和 b_1 的值;(c)求函数 $f_x(t)$,使之在图中所示的 4 ms 区间与 $f(t)$相同,但周期为 8 ms 且具有偶对称性;(d)求 $f_x(t)$的 a_1 和 b_1。

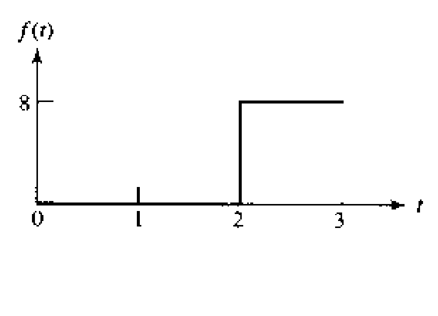


图 18.26

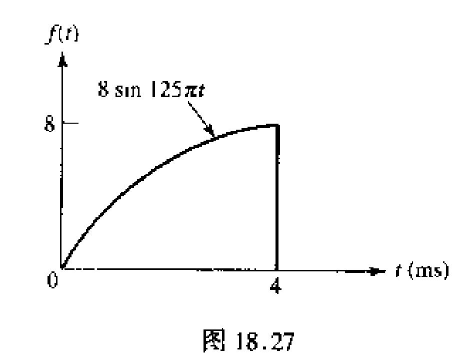


图 18.27

14. 尽可能使用对称性，求如图 18.28 所示波形的 a_0，a_n 和 b_n，$1\leqslant n\leqslant 10$。

15. 函数 $f(t)$ 同时具有奇对称性和半波对称性，周期为 8 ms。已知 $f(t)=10^3t$，$0<t<1$ ms，且 $f(t)=0$，$1<t<2$ ms。求 b_n，$1\leqslant n\leqslant 5$。

16. 图 18.29 画出了函数 $f(t)$ 的一部分。画出 $f(t)$ 在区间 $0<t<8$ s 上的图像，如果 $f(t)$，(a) 具有奇对称性且 $T=4$ s；(b) 具有偶对称性且 $T=4$ s；(c) 具有奇对称性和半波对称性且 $T=8$ s；(d) 具有偶对称性和半波对称性且 $T=8$ s。

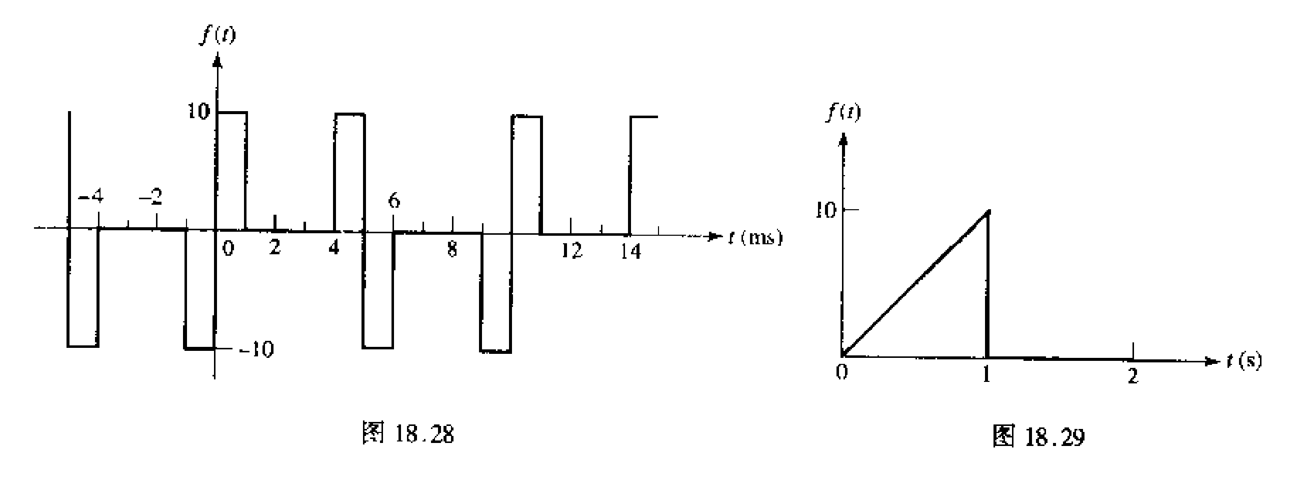


图 18.28　　图 18.29

17. 用图 18.30 所示的波形替换图 18.7(a) 的波形，然后重做例题 18.2，求出此时 (a) $i_f(t)$ 和 (b) $i(t)$ 的表达式。

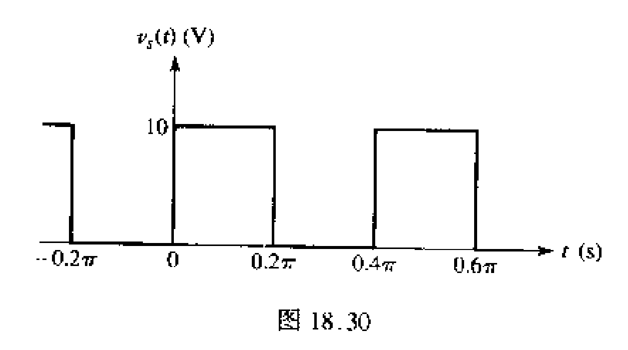


图 18.30

18. 将图 18.30 所示的波形 $v_s(t)$ 作用于图 18.7(b) 所示电路中。采用瞬态分析方法求当 t 等于下列值时 $i(t)$ 的值：(a) 0.2π s；(b) 0.4π s；(c) 0.6π s。

19. 理想电压源 v_s 与一个打开的开关、一个 2 Ω 电阻和一个 2 F 的电容串联在一起。电压源的波形如图 18.30 所示。在 $t=0$ 时闭合开关，求电压两端的电压响应。(a) 在频域

中进行计算,并将受迫响应表示为三角傅里叶级数的形式;(b)指出受迫响应的函数形式;(c)求完全响应。

20. 设图 18.31 所示的周期波形的周期为 $T=6$ ms 求 $\mathbf{c}_3,\mathbf{c}_{-3},|\mathbf{c}_3|,a_3,b_3$ 和$\sqrt{a_3^2+b_3^2}$。

21. (a)求图 18.32 所示周期波形的复数形式的傅里叶级数。(b)求当 $n=0,\pm1$ 和 ±2 时 $\mathbf{c}_n$ 的值。

22. 图 18.9(a)所示脉冲的幅度为 8 V,宽度为 0.2 μs,以每秒 6 000 个脉冲重复。(a)求在什么频率处频谱包络的幅度为 0;(b)求谱线之间的频率区间的宽度;(c)求距离 20 kHz 最近的频谱成分的$|\mathbf{c}_n|$;(d)求距离 2 MHz 最近的频谱成分的$|\mathbf{c}_n|$;(e)将该脉冲串通过一个放大器,为了能在合理的失真范围内进行传输,求放大器的标称带宽为多少;(f)指出频率范围 $2<\omega<2.2$ Mrad/s 内的频率成分;(g)求 $\mathbf{c}_{227}$的幅度及其对应的频率。

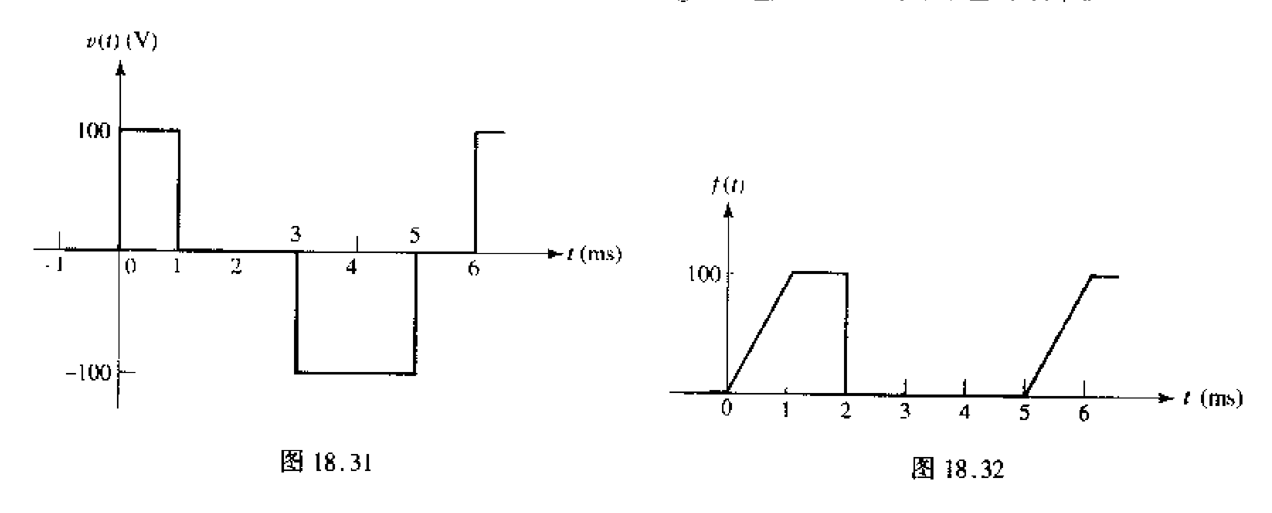


图 18.31　　　　图 18.32

23. 某电压波形的周期为 $T=5$ ms,其复系数值为:$\mathbf{c}_0=1,\mathbf{c}_1=0.2-j0.2,\mathbf{c}_2=0.5+j0.25$,$\mathbf{c}_3=-1-j2$,当$|n|\geq4$ 时 $\mathbf{c}_n=0$。(a)求 $v(t)$;(b)求 $v(1\text{ ms})$。

24. 某脉冲系列的周期为 5 μs,当 $-0.6<t<-0.4$ μs 和 $0.4<t<0.6$ μs 时幅度为 1,在一个周期区间内的其余时刻为 0。这个脉冲系列可以表示数字计算机中用二进制形式传输的十进制数字 3。(a)求 $\mathbf{c}_n$;(b)求 $\mathbf{c}_4$;(c)求 $\mathbf{c}_0$;(d)求$|\mathbf{c}_n|_{max}$;(e)求 N,使得当 $n>N$ 时$|\mathbf{c}_n|\leq0.1|\mathbf{c}_n|_{max}$;(f)传输这部分频谱需要多少带宽?

25. 某周期电压 $v_s(t)$在 $0<t<\frac{1}{96}$ s 时等于 40 V,在$\frac{1}{96}<t<\frac{1}{16}$ s 时为 0。设 $T=\frac{1}{16}$ s,求(a)$\mathbf{c}_3$;(b)传递给图 18.33 所示电路中负载的功率。

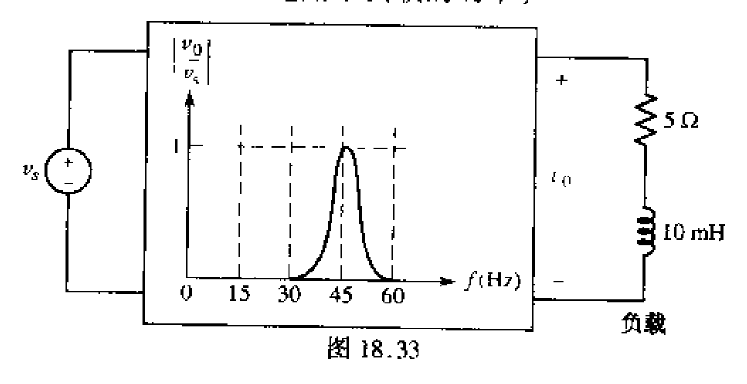


图 18.33

26. 给定时域函数 $f(t)=5[u(t+3)+u(t+2)-u(t-2)-u(t-3)]$；(a)画出 $f(t)$；(b)根据傅里叶变换的定义求 $\mathbf{F}(j\omega)$。

27. 根据傅里叶变换的定义式求 $\mathbf{F}(j\omega)$，其中 $f(t)$ 分别等于(a) $e^{-at}u(t)$, $a>0$；(b) $e^{-a(t-t_0)}u(t-t_0)$, $a>0$；(c) $te^{-at}u(t)$, $a>0$

28. 求图 18.34 所示三角脉冲的傅里叶变换。

29. 求图 18.35 所示正弦脉冲的傅里叶变换。

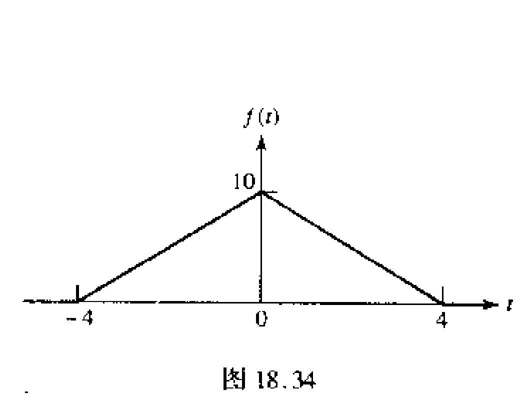


图 18.34

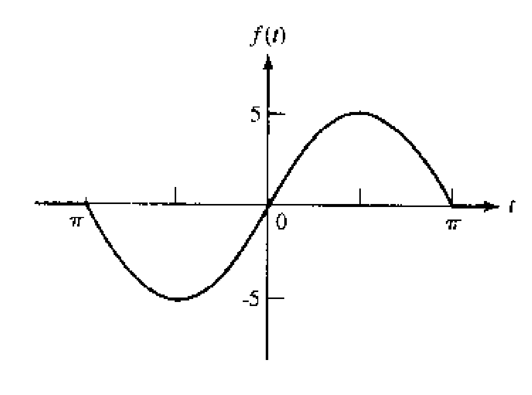


图 18.35

30. 设 $f(t)=(8\cos t)[u(t+0.5\pi)-u(t-0.5\pi)]$。求 $\mathbf{F}(j\omega)$，其中 ω 等于(a)0；(b)0.8；(c)3.1。

31. 根据傅里叶逆变换的定义式求 $f(t)$，并求 $t=0.8$ 时 $f(t)$ 的值，其中 $\mathbf{F}(j\omega)$ 等于(a) $4[u(\omega+2)-u(\omega-2)]$；(b) $4e^{-2|\omega|}$；(c) $(4\cos\pi\omega)[u(\omega+0.5)-u(\omega-0.5)]$。

32. 电压 $v(t)=20e^{1.5t}u(-t-2)$ V，求(a) $\mathbf{F}_v(j0)$；(b) $A_v(2)$；(c) $B_v(2)$；(d) $|\mathbf{F}_v(j2)|$；(e) $\phi_v(2)$。

33. 设 $i(t)$ 为流过一个 4 Ω 电阻的时变电压。如果 $i(t)$ 的傅里叶变换的幅度为 $|\mathbf{I}(j\omega)|=(3\cos 10\omega)[u(\omega+0.05\pi)-u(\omega-0.05\pi)]$ A/(rad/s)，求(a)信号的总能量；(b)频率 ω_x，使得总能量的一半在频率区间 $|\omega|<\omega_x$ 内。

34. 设 $f(t)=10te^{-4t}u(t)$，求(a)该信号的单位电阻能量；(b) $|\mathbf{F}(j\omega)|$；(c) $\omega=0$ 和 $\omega=4$ rad/s 处的能量密度。

35. 设 $v(t)=8e^{-2|t|}$ V，求(a)信号的单位电阻能量；(b) $|\mathbf{F}_v(j\omega)|$；(c)频率范围 $|\omega|<\omega_1$，使得 90% 的单位电阻能量在此范围内。

36. 根据傅里叶变换的定义证明下列关系，其中 $\mathcal{F}\{f(t)\}=\mathbf{F}(j\omega)$：(a) $\mathcal{F}\{f(t-t_0)\}=e^{-j\omega t_0}\mathcal{F}\{f(t)\}$；(b) $\mathcal{F}\{df(t)/dt\}=j\omega\,\mathcal{F}\{f(t)\}$；(c) $\mathcal{F}\{f(kt)\}=(1/|k|)\mathbf{F}(j\omega/k)$；(d) $\mathcal{F}\{f(-t)\}=\mathbf{F}(-j\omega)$；(e) $\mathcal{F}\{tf(t)\}=jd[\mathbf{F}(j\omega)]/d\omega$。

37. 求 $\mathcal{F}\{f(t)\}$，其中 $f(t)$ 为(a) $4[\mathrm{sgn}(t)]\delta(t-1)$；(b) $4[\mathrm{sgn}(t-1)]\delta(t)$；(c) $4[\sin(10t-30°)]$。

38. 求 $\mathbf{F}(j\omega)$，其中 $f(t)$ 为(a) $A\cos(\omega_0 t+\phi)$；(b) $3\,\mathrm{sgn}(t-2)-2\delta(t)-u(t-1)$；(c) $(\sinh kt)u(t)$。

39. 求 $t=5$ 时 $f(t)$ 的值，其中 $\mathbf{F}(j\omega)$ 等于(a) $3u(\omega+3)-3u(\omega-1)$；(b) $3u(-3-\omega)+3u(\omega-1)$；(c) $2\delta(\omega)+3u(-3-\omega)+3u(\omega-1)$。

40. 求 $f(t)$，其中 $\mathbf{F}(j\omega)$ 等于(a) $3/(1+j\omega)+3/j\omega+3+3\delta(\omega-1)$；(b) $(5\sin 4\omega)/\omega$；(c)6

$(3+j\omega)/[(3+j\omega)^2+4]$。

41.求图 18.36 所示的周期时域函数的傅里叶变换。

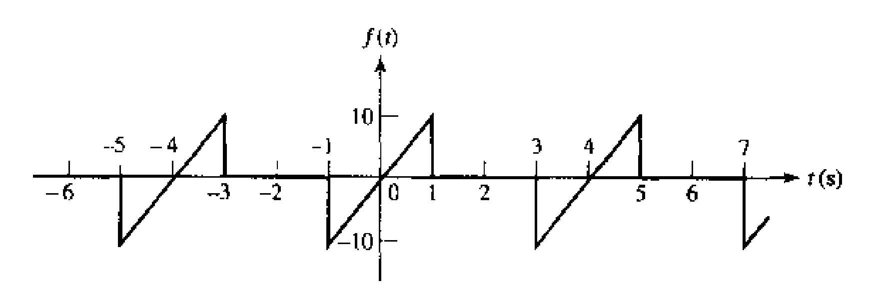


图 18.36

42.周期函数 $f(t)$ 在一个周期区间 $0<t<4$ 上可以用 $f_1(t)=10u(t)-6u(t-0.001)-4u(t-0.003)$ 表示。求 $\mathbf{F}(j\omega)$。

43.设 $\mathbf{F}(j\omega)=20\sum_{n=1}^{\infty}[1/(|n|!+1)]\delta(\omega-20n)$，求 $f(0.05)$ 的值。

44.给定输入 $x(t)=5[u(t)-u(t-1)]$，利用卷积求输出 $y(t)$，其中 $h(t)$ 等于(a)$2u(t)$；(b)$2u(t-1)$；(c)$2u(t-2)$。

45.设 $x(t)=5[u(t)-u(t-2)]$，$h(t)=2[u(t-1)-u(t-2)]$。利用卷积求当 $t=-0.4,0.4,1.4,2.4,3.4$ 和 4.4 时 $y(t)$ 的值。

46.某线性系统的冲激响应为 $h(t)=3(e^{-t}-e^{-2t})$。设输入为 $x(t)=u(t)$，求 $t>0$ 时的输出。

47.图 18.37 画出了某线性系统的单位冲激响应和系统的输入曲线。(a)求在区间 $4<t<6$ 内输出的积分表达式，不能包含任何奇异函数；(b)求 $t=5$ 时的输出。

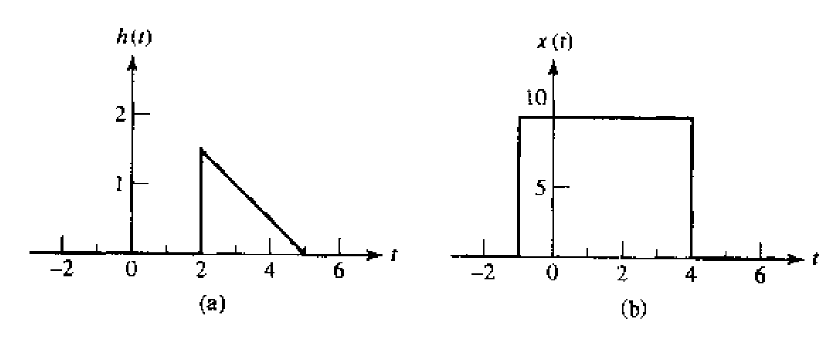


图 18.37

48.给定输入信号 $x(t)=5e^{-(t-2)}u(t-2)$ 和冲激响应 $h(t)=(4t-16)[u(t-4)-u(t-7)]$，求 t 等于下列时刻输出信号的值：(a)$t=5$；(b)$t=8$；(c)$t=10$。

49.将 $\delta(t)$ 作用于某线性系统，当 $0<t<\pi$ 时输出为 $\sin t$，其余时刻为 0。如果输入为 $e^{-t}u(t)$，求 t 等于下列时刻输出信号的值：(a)1；(b)2.5；(c)4。

50.设 $x(t)=0.8(t-1)[u(t-1)-u(t-3)]$，$h(t)=0.2(t-2)[u(t-2)-u(t-3)]$。求下列时刻 $y(t)$ 的值：(a)$t=3.8$；(b)$t=4.8$。

51.将信号 $x(t)=10e^{-2t}u(t)$ 输入到一个线性系统中，已知系统的冲激响应为 $h(t)=10e^{-2t}u(t)$ 求输出 $y(t)$。

52.将冲激输入到某线性系统中，产生的输出为 $h(t)=5e^{-4t}u(t)$ V。求下列情况下响应所占的单位电阻能量的百分比：(a)在时间区间 $0.1<t<0.8$ s 内；(b)在频率区间 $-2<\omega<2$ rad/s。

53.如果 $\mathbf{F}(j\omega)=2/[(1+j\omega)(2+j\omega)]$，求(a)该信号的单位电阻能量，和(b) $f(t)$ 的最大值。

54.求 $\mathcal{F}^{-1}[\mathbf{F}(j\omega)]$，如果 $\mathbf{F}(j\omega)$ 等于(a) $1/[(j\omega)(2+j\omega)(3+j\omega)]$；(b) $(1+j\omega)/[(j\omega)(2+j\omega)(3+j\omega)]$；(c) $(1+j\omega)^2/[(j\omega)(2+j\omega)(3+j\omega)]$；(d) $(1+j\omega)^3/[(j\omega)(2+j\omega)(3+j\omega)]$。

55.构造一个网络并使其冲激响应为 $h(t)=2e^{-t}u(t)$。(a)求 $\mathbf{H}(j\omega)=\mathbf{V}_o(j\omega)/\mathbf{V}_i(j\omega)$；(b)通过考察 $h(t)$ 或者 $\mathbf{H}(j\omega)$ 可以发现该网络存在一个存储能量的元件，任意选取一个 RC 网络来产生所需的时间常数，比如取 $R=1\ \Omega$，$C=1\ F$，为了产生响应 $\frac{1}{2}h(t)$ 或 $\frac{1}{2}\mathbf{H}(j\omega)$，确定电路的形式；(c)用一个理想电压放大器与该网络级联以产生合适的放大因子，则放大器的增益为多少？

56.求图 18.38 所示电路的 $v_o(t)$。

57.求图 18.39 所示电路的 $v_C(t)$。

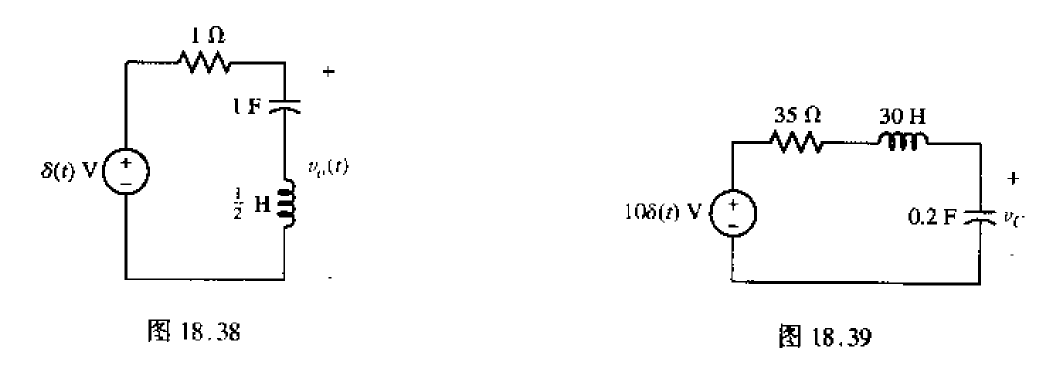


图 18.38　　图 18.39

58.设 $f(t)=5e^{-2t}u(t)$，$g(t)=4e^{-3t}u(t)$。(a)在时域中求卷积 $f(t)*g(t)$；(b)用频域相乘的方法求 $f(t)*g(t)$。

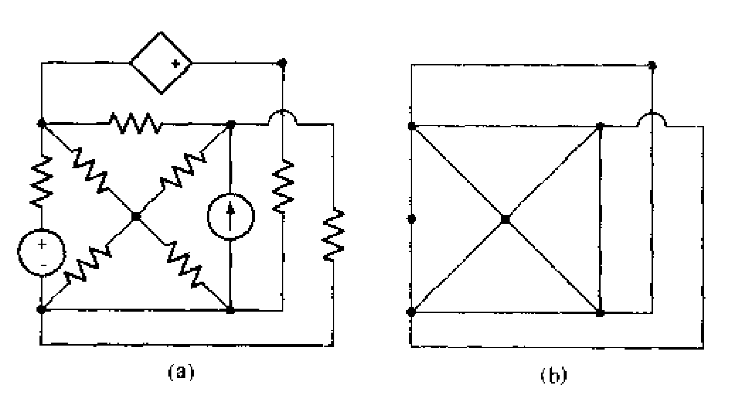
附录A 网络拓扑简介

在研究了许多电路问题之后，逐渐明白，前面所见到的许多电路，至少在元件的安排上有很多共性。基于这一事实，可以对电路得出更为抽象的看法，即网络拓扑。本附录提供了网络拓扑中几个基本概念的介绍，它们的具体应用则留给读者自己去做。

A.1 树和通用节点分析

现在对前面学过并经常使用的节点分析法做一归纳。因为节点分析法适用于任何网络，即使不能解决更大的一类电路问题，但可以期望找到适用于任何特殊问题的一个通用节点分析法，这样可以少用几个方程，少花一点功夫。

必须扩展与网络有关的定义。首先定义拓扑为几何的一个分支，它研究几何图形的性质，当图形受到扭曲、弯折、折叠、伸展、挤压或打结时，只要图形的任何部位没有被割断或连接起来，该性质保持不变。一个球体和一个四面体在拓扑结构上是等效的，同理正方形和圆形也是等效的。关于电路，现在不关心电路中出现的是哪种类型的元件，只关心支路和节点之间是怎样连接的。实际上常常是有意识地抑制元件的性质，简单地将元件用一条线表示。这样的图形称为线图或简称图。图A.1是一个电路和它相应的拓扑图。注意，所有节点都用加重点标出。



图A.1 (a)给定电路；(b)该电路的线图

由于电路或其线图变形时其拓扑性质并未改变，所以图A.2中的三个图与图A.1中的电路和图在拓扑结构上是等效的。

已学过并用过的拓扑术语有：

节点：两个或更多元件的公共接点。

路径：一系列元件的集合，使得通过这些元件时不会两次通过同一节点。

支路：只包含一个简单元件的路径，它将一个节点连接到其他节点。

回路：闭合的路径。

网孔：不含任何其他回路的一个回路。

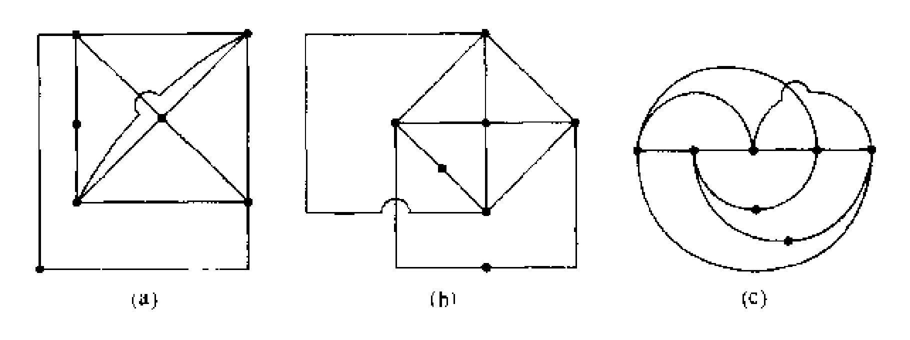


图 A.2 图 A.1 中电路的几个替代线图

平面电路:可以在平面上画出的电路,其中没有任何支路跨过或钻过其他支路。

非平面电路:任何不是平面的电路。

图 A.2 中的每个图形都含有 12 条支路和 7 个节点。

现在需要定义三个新的拓扑术语——树、余树和连枝。树定义为支路的集合,它不含任何回路但连接每个节点到其他节点,这里的连接不一定是直接的。一个网络通常有许多不同的树,随着网络复杂性增加,树的数目会迅速增加 图 A.3(a)中的简单图形有 8 个可能的树,在图 A.3(b), 图 A.3(c)、图 A.3(d)和图 A.3(e)中用粗线画出了其中 4 个。

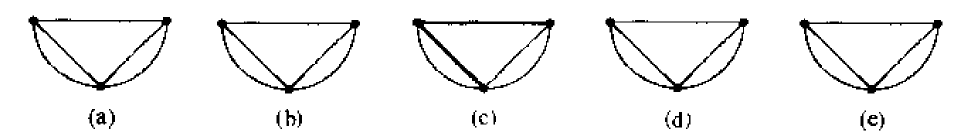


图 A.3 (a)3 节点网络的线图。(b), (c), (d), (e) (a)中图形的 8 个不同树之中的 4 个,用粗线画出

图 A.4(a)中画出了一个更复杂图形。图 A.4(b)是一个可能的树,图 A.4(c)和图 A.4(d)是支路的集合而不是树,因为它们都不符合树的定义。

一个树确定之后,那些不属于该树的支路就形成了余树。在图 A.3(b)至图 A.3(e)中用细线画出的支路表示余树,它们与用粗线画出的树相对应。

一旦理解了树及其余树的构造,连枝的概念就变得非常简单,连枝是属于余树的任何支路。显然,某一支路可以是,也可以不是连枝,取决于所选择的树。

很容易将连枝的数目与支路和节点数联系起来。如果图形有 N 个节点,一定需要($N-1$)条支路来构造一个树,因为第一条支路连接两个节点,其他每条支路连接一个新的节点。这样,给定 B 条支路,连枝数一定是:

$$L = B - (N - 1)$$

或

$$L = B - N + 1 \tag{A.1}$$

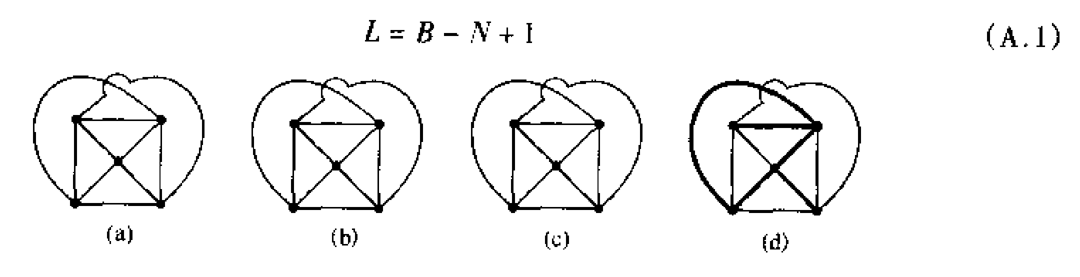


图 A.4

(a)线图;(b)一个可能的树;(c, d)不符合树定义的支路集合

余树含有 L 条支路，树含有$(N-1)$条支路。

对于图 A.3 中的每个图形都有 $5-3+1=3$，对于图 A.4(b)中每个图形都有 $10-5+1=6$。一个网络可以由几个不相连的部分组成，可以用 $+S$ 替代 $+1$ 使得式(A.1)更加通用，其中 S 为分离部分的数目。也可以用一根导线将两个分离部分连接起来，使两个节点变成一个节点，在这根导线上没有电流。这一过程可以用于连接任意多个分离的部分，这样，规定 $S=1$ 就不会影响式(A.1)的通用性。

现在来讨论如何写出数量足够且又互相独立的一组节点方程。这个方法可以从同一网络获得许多不同的方程组，所有方程组都有效。但是这种方法不能提供所有可能的方程组。下面通过三个例子来解释这种获取方程组的过程，并指出使得方程组数量足够且又互相独立的原因。

对于给定网络：

1. 画出图形并找出它的一个树。
2. 将所有电压源安置在树中。
3. 将所有电流源安置在余树中。
4. 尽可能将压控电源的控制电压支路安置在树中。
5. 尽可能将流控电源的控制电流支路安置在余树中。

后面的 4 个步骤将电压和树、电流和余树有效地联系在一起。

对树的$(N-1)$条支路每一条指定一个对应的电压变量，其电压跨接在支路的两端。含有(独立或受控)电压源的支路应该用其源电压指定，含有控制电压的支路应该用其控制电压来指定。这样引入的新变量数目应该等于树的支路数目$(N-1)$，减去树中的电压源数目，还要减去树中找到的控制电压的数目。在例题 A.3 中所要求的新变量数目为零。

有了一组变量，现在需要写出足够多的方程以确定这些变量。应用 KCL 就可以得到这些方程。对电压源的处理办法与前面介绍节点分析法时采用的办法相同，每个电压源及其两个节点组成一个超节点或超节点的一部分。然后对参考节点以外的所有节点和超节点应用基尔霍夫电流定律。将所有连接到节点的支路上离开节点的电流之和置为零。用前面指定的电压变量将电流表示出来。就像前面参考节点的情况一样，可以忽略一个节点。当存在电流控制受控源时，最后还要写出控制电流的方程，将它与电压变量联系起来。这与节点分析法中的过程完全一样。

下面对图 A.5(a)所示的电路应用这个过程。它含有 4 个节点和 5 个支路，见图 A.5(b)。

例题 A.1 求图 A.5(a)电路中的 v_x

按照树的作图步骤 2 和步骤 3，将电压源放在树中，将电流源放在余树中。按照步骤 4，v_x 支路也可以放在树中，因为它并不形成违反树定义的回路。如图 A.5(c)所示，现在得到含有两个支路和一个连枝的图。从图可见，并没有树存在，因为右节点没有通过树枝与其他节点相连。得到一个树的惟一可能办法示于图 A.5(d)。100 V 电压源、控制电压 v_x 和一个新电压变量 v_1 被分别指定给三个树枝。

这样，有两个未知量 v_x 和 v_1，需要用这两个变量写出两个方程。一共有 4 个节点，不过由于电压源的存在使其中两个节点变成一个超节点。可以对余下的 3 个节点或超节点中的任意两个应用基尔霍夫电流定律。假定首先取右节点。离开右节点指向左节点的电

流为 $-v_1/15$,而指向下面的是 $-v_x/14$,那么第一个方程为:

$$-\frac{v_1}{15}+\frac{-v_x}{14}=0$$

位于上面的中心节点看起来比超节点容易一些,所以设定流向左边的电流($-v_x/8$)、流向右边的电流($v_1/15$)和向下流过 4 Ω 电阻的电流这三个电流之和为零。后一个电流为电阻上的端电压除以电阻 4 Ω,可是连枝上没有标出电压。当按照定义构造出树的时候,从任一节点到任何其他节点都应该存在一条路径。由于树中的每个支路都赋予了一个电压,所以可以将任何连枝上的电压用支路电压表示。因此这个向下的电流为$(-v_x+100)/4$,这样就得到第二个方程:

$$-\frac{v_x}{8}+\frac{v_1}{15}+\frac{-v_x+100}{4}=0$$

两个方程的联立解为:

$$v_1=-60\text{ V}\quad v_x=56\text{ V}$$

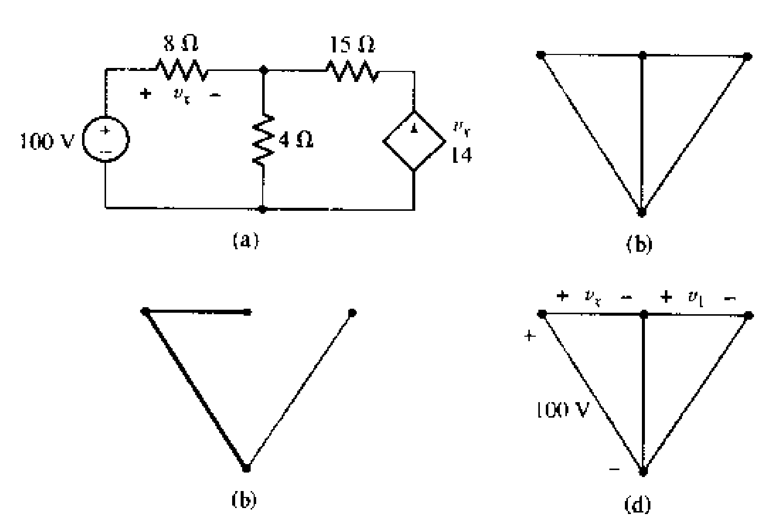


图 A.5 (a)通用节点分析法使用的电路例子;(b)给定电路的图形;(c)电压源和控制电压放在树中,而电流源放在余树中;(d)将树图标记完整,对每个支路指定一个电压变量

例题 A.2 求图 A.6(a)电路中的 v_x 和 v_y

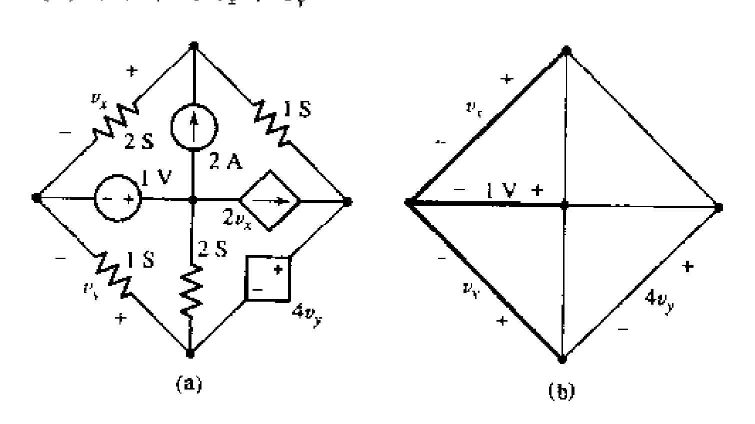


图 A.6 (a)含有 5 个节点的电路;(b)选出一个树,使得两个电压源和两个控制电压都成为树枝

画出树图，使得两个电压源和两个控制电压都以树枝电压出现，并被指定为电压变量。如图 A.6(b)所示，4 个支路构成了一个树，其中选出树枝电压 v_x，1，v_y 和 $4v_y$。

两个电压源都定义为超节点，两次应用 KCL，一次对上面的节点有：

$$2v_x + 1(v_x - v_y - 4v_y) = 2$$

对包含右节点和下面节点和受控电压源的超节点有：

$$1v_y + 2(v_y - 1) + 1(4v_y + v_y - v_x) = 2v_x$$

不像采用原来方法所预期的四个方程，而是现在的两个方程，容易求出：

$$v_x = \frac{26}{9}\ \text{V} \qquad v_y = \frac{4}{3}\ \text{V}$$

例题 A.3 求图 A.7(a)电路中的 v_x

两个电压源和控制电压建立起三个支路的树，见图 A.7(b)。因为两个上面的节点和右下节点联合构成一个超节点，只需写一个 KCL 方程。选择左下节点有：

$$-1 - \frac{v_x}{4} + 3 + \frac{-v_x + 30 + 6v_x}{5} = 0$$

它给出 $v_x = -\frac{32}{3}$ V。尽管这个电路看起来很复杂，利用通用节点分析法，很容易求得答案。如果采用网孔分析法或对参考点的节点电压分析法将要写出更多的方程，花费更多力气。

下面将讨论，如何找到解决问题最好的分析方法。

在前面的例题中，如果还需要知道其他电压、电流或功率，则要还要做一步。例如，3 A 电流源提供的电流为：

$$3\left(-30 - \frac{32}{3}\right) = -122\ \text{W}$$

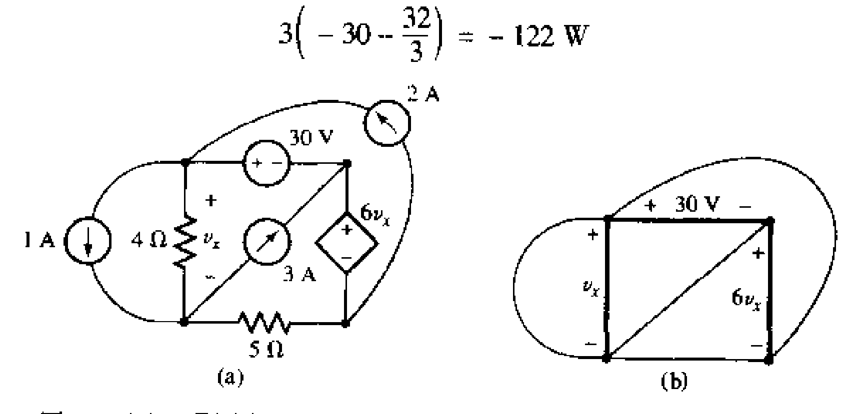


图 A.7 (a)只需写出一个通用节点方程的电路；(b)所使用的树和树枝

现在来讨论假定的树枝电压与独立节点方程是否足够多。如果树枝电压数目足够，那么每个树枝，无论是树的还是余树的，一定能从所有树枝电压的知识中得到。对于处于树枝中的电压肯定是正确的。对于连枝，已知每个连枝连接两个节点，并且按照定义，树也必须连接这两个节点。所以每个连枝电压也可以用树枝电压建立。

只要知道电路中每个支路的电压，所有电流都可以得到，如果支路含有电流源，则是给定电流源的值，如果支路含有电阻，则是支路电压除以电阻，如果支路恰好含有电压源，则可用 KCL 求出。这样，所有电压和电流就确定了，节点方程的充分性得以证实。

为证明方程的独立性，首先假定网络中只存在独立电流源。如前所述，独立电压源的存在

减少了方程数目，而受控源一般会带来很多方程。在只有独立电流源的情况下，可以用$(N-1)$个树枝电压恰好写出$(N-1)$个节点方程。为了证明这$(N-1)$个方程是独立的，设想将 KCL 应用于这$(N-1)$个不同的节点。每当写出 KCL 方程都涉及一个连接该节点与其他节点的新树枝。由于这个电路元件没有出现在这之前的任何方程中，这肯定是一个独立方程。以次类推到$(N-1)$个节点中的其他节点，所以最后得到$(N-1)$个独立方程。

练习

A.1 (a)按照前面给出的5条构造树的建议，找出图 A.8 中有几个树？(b)画出一个适当的树，用两个未知量写出两个方程，求 i_3；(c)受控源提供的功率是多少？

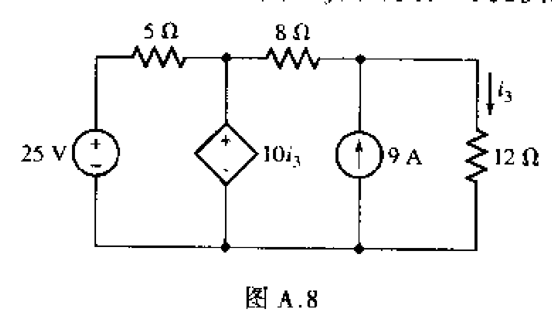


图 A.8

答案：1； 7.2 A； 547 W

A.2 连枝和回路分析

现在考虑用树来得到一组适当的回路方程。在某些方面，这类似于写节点方程的方法。而且需要指出，尽管可以保证这样得到的任何一组方程既是足够的也是独立的，但不能肯定这种方法可以得到任何可能的方程组。

首先利用通用节点分析的规则，构造一个树。节点和回路分析的目标是将电压源放在树中，将电流源放在余树中，对于电源这是必须遵守的规则，而对于控制量则是推荐的规则。

但现在，不是给每个树枝分配一个电压，而是给余树中每个元件或每个连枝分配一个电流（当然包含参考方向）。如果有 10 个连枝，将恰好分配 10 个连枝电流。任何含有电流源的连枝将分配该电流源的电流作为连枝电流。注意，每个连枝电流也可以想像为回路电流，因为连枝必须伸展到两个特定的节点上，而且在这两个节点之间必定还存在一条路径通向树。这样，每个连枝都与一个惟一的特定回路相联系，该回路包含一个连枝和一个惟一的路径通向树。显然可以将分配的电流想像为一个回路电流或连枝电流。连枝的概念在定义电流时最有用，因为必须为每个连枝建立一个电流。在写电路方程时，回路的概念更为方便，因为需要对每个回路应用 KVL。

下面对图 A.9(a)所示的电路尝试定义连枝电流的步骤。按照电压源放在树枝，而电流源放在连枝的方法，从几个可能的树中选出一个树。首先考虑含有电流源的连枝，与其联系的回路是左边的网孔，连枝电流围绕该网孔的周边流动[图 A.9(b)]。显然可以选择“7 A”作为这个连枝电流的标记。记住，没有其他电流会流过这个特定的连枝，所以连枝电流的大小恰好是电流源的大小。

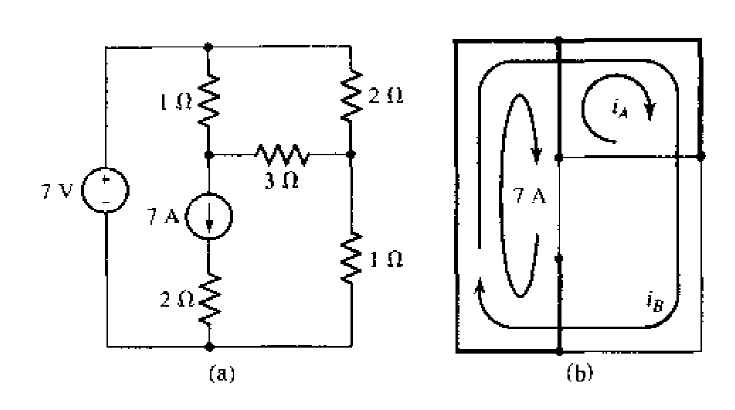


图 A.9 (a)简单电路;(b)选定的一个树,使得电流源在连枝,电压源在树枝

下一步将注意力转移到含有 3 Ω 电阻的连枝,与它相联系的回路是右上角的网孔,这个回路(或网孔)电流定义为 i_A,如图 A.9(b)所示。最后一个连枝是下方的 1 Ω 电阻,它两个端点之间的惟一路径是围绕整个电路的周界。这个连枝电流称为 i_B,图 A.9(b)中 i_B 的箭头表明电流的路径和参考方向。这不是一个网孔电流。

注意,每个连枝只有一个电流,但每个树枝可以有从 1 到连枝电流总数的任何多个电流通过。使用很长的、几乎闭合的箭头来标记回路,有助于表明哪个回路电流流经哪个树枝以及它们的参考方向。

对每个回路写出一个 KVL 方程。使用的变量就是分配的连枝电流。因为不可能用源电流的大小表示电流源上的电压,并且已经使用源电流的值作为连枝电流,应该放弃任何包含电流源的回路。

例题 A.4 对于图 A.9 的例题,求 i_A 和 i_B 的值

首先进入 i_A 回路,从它的左下角开始顺时针方向进行。1 Ω 电阻上的电流是(i_A-7),在 2 Ω元件上的电流是(i_A+i_B),在连枝上为 i_B。这样:

$$1(i_A-7)+2(i_A+i_B)+3i_A=0$$

对 i_B 连枝,从左下角开始顺时针方向前进,得到:

$$-7+2(i_A+i_B)+1i_B=0$$

对于 7 A 连枝所属的回路不要求列出方程。解之,再次得到 $i_A=0.5$ A,$i_B=2$ A。这次比原来少用了一个方程就得到了答案。

例题 A.5 求图 A.10(a)的电路中 i_1 的值

电路含有 6 个节点,因此有 5 个支路。由于网络中有 8 个元件,所以余树中有 3 个连枝。如果将 3 个电压源放在树中,2 个电流源以及控制电流放在余树中,就得到图 A.10(b)所示的树。4 A 电流源定义了一个回路,如图 A.10(c)所示。受控源建立了围绕右边网孔的 $1.5\,i_1$ 电流回路,控制电流 i_1 给出围绕电路周边的余下的回路电流。注意,所有 3 个电流都通过 4 Ω 电阻。

只有一个未知量 i_1,抛开由两个电流源定义的回路之后,环绕电路外边界应用 KVL:

$$-30+5(-i_1)+19+2(-i_1-4)+4(-i_1-4+1.5i_1)-25=0$$

除了 3 个电压源之外,在这个回路中还有 3 个电阻。5 Ω 电阻有一个回路电流经过,因为

它也是连枝。2 Ω 电阻上流经两个回路电流。4 Ω 电阻上流经 3 个回路电流。为了避免遗漏或重复使用电流，避免错误引用电流的方向，仔细画出一组回路电流是必不可少的。前面的方程是得到保证的，由此得出 $i_1 = -12$ A。

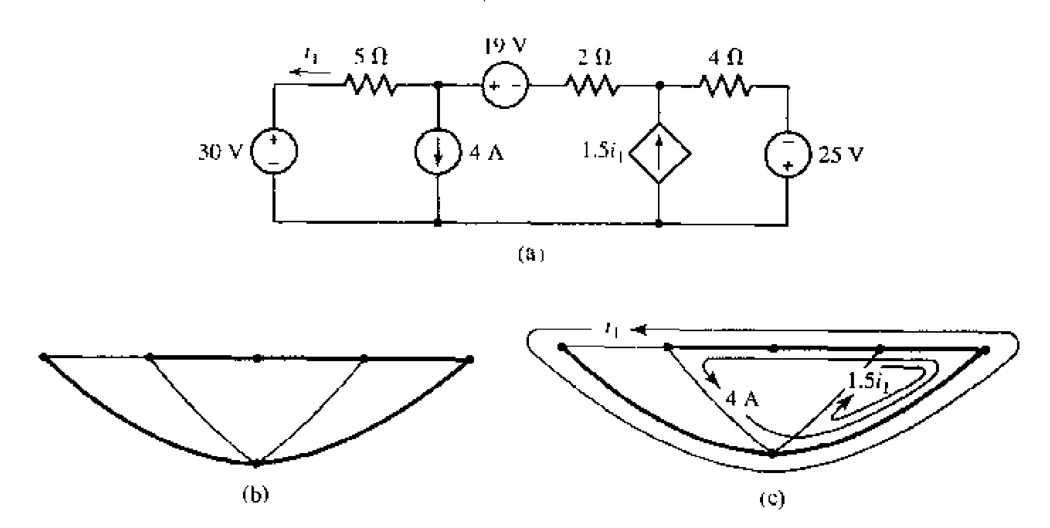


图 A.10 (a)利用通用回路分析法只要列出一个方程就能解出 i_1 的电路；(b) 惟一满足 A.1 一节给出规则的树；(c)用相应回路表示的三个连枝电流

如何确认方程数目是否足够？设想一个树，它不含回路，因此它至少含有两个节点，每个节点只有一个树枝与其相连。根据已知连枝电流，应用 KCL 很容易求出这两个支路上的电流。如果还有其他节点，只与一个树枝相连，这些树枝电流也可以立刻得到。在图 A.11 所示的树中，可以求得支路 a, b, c 和 d 上的电流。现在沿着树枝移动，求得树枝 e 和 f 上的电流。这一过程可以继续，直到所有支路电流被确定下来。因此有足够多的连枝电流用以确定所有的支路电流。考察一个含有回路的错误树所发生的情况是很有益的。即使所有连枝电流为零，仍然可以有电流环绕这个"树环"。因此，连枝电流不能确定这个电流，连枝电流数目不够。按照定义可能有这样的树是不可能的。

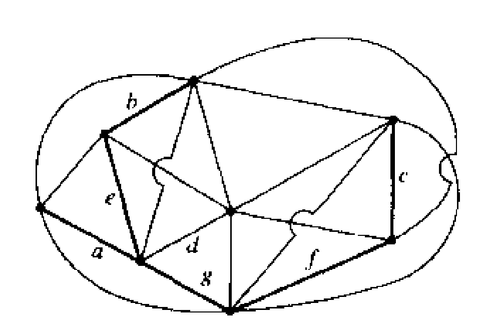


图 A.11 说明连枝电流数目充分性的有关树的例题

为证明独立性，假定网络中惟一的电源是独立电压源。如同前面注意到的一样，电路中的独立电流源导致较少的方程数目，而受控源通常会带来许多方程。如果只有独立电压源，那么用 $(B - N + 1)$ 个连枝电流就恰好写出 $(B - N + 1)$ 个回路方程。为了证明这 $(B - N + 1)$ 个方程的独立性，只需指出它们每个代表环绕一个回路的 KVL，每个回路含有一个不出现在其他方程中的连枝。可以设想不同的电阻 $R_1, R_2, \cdots, R_{B-N+1}$ 在各个连枝中，显然每个方程都不可能

从其他方程得到，因为每个方程都含有一个不出现在其他方程中的系数。

因此连枝电流的数目足够得到完整的解，而且用来求连枝电流的回路方程组是一组独立方程。

在考察了通用节点分析法和回路分析法之后，应该知道它们各自的优缺点，这样对给定问题的处理方法可以做出灵活的选择。

节点法一般要求$(N-1)$个方程，但是对于每个树枝中的独立或受控电压源可以减少一个方程，对于每个连枝电压或电流控制的受控源要增加一个方程。

回路法基本上涉及$(B-N+1)$个方程。可是每个连枝中的独立或受控电流源将减少一个方程，而每个树枝电流控制的受控源将增加一个方程。

作为讨论的结束，让我们查看图 A.12 中晶体管 T 形等效电路，正弦电源为 4 sin 1 000t mV，负载电阻为 10 kΩ。

例题 A.6　在图 A.12 所示的电路中求输入（发射极）电流 i_e 和负载电压 v_L，假定发射极电阻的典型值为 $r_e=50\,\Omega$，基极电阻 $r_b=500\,\Omega$，集电极电阻 $r_c=20\,\text{k}\Omega$，共基极正向电流传输系数$\alpha=0.99$。

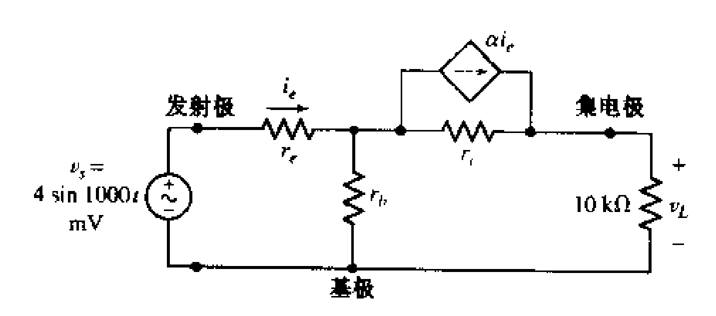


图 A.12　正弦电压源和 10 kΩ 负载电阻连接到晶体管 T 形等效电路，输入和输出的公共连接端是晶体管的基极，这种接法称为共基极接法

尽管在下面的练习中会遇到一些具体细节，可是容易看出这个电路的分析可以通过画出要求三个通用节点方程$(N-1-1+1)$或两个回路方程$(B-N+1-1)$的树完成。还需指出，三个方程是节点相对于参考电压的，它们是三个网孔方程。

无论选择什么解法，对这个特定电路都可以得到如下答案：

$$i_e = 18.42 \sin 1\,000t\ \mu\text{A}$$

$$v_L = 122.6 \sin 1\,000t\ \text{mV}$$

由此得知，这个晶体管电路的电压增益(v_L/v_s)为 30.6，电流增益$(v_L/10\,000i_e)$为 0.666，功率增益为 $30.6\times0.666=20.4$。让晶体管工作在共发射极接法下可以获得更高的增益。

练习

A.2　(a)对图 A.13(a)的电路画出适当的树，并用通用回路分析法，写出以 i_{10}为变量的单个方程，求 i_{10}；(b)对图 A.13(b)的电路画出适当的树，并用通用回路分析法，写出以 i_{10}和 i_3 为变量的两个方程，求 i_{10}。

A.3　对图 A.12 所示的晶体管放大器等效电路，取 $r_e=50\,\Omega$，$r_b=500\,\Omega$，$r_c=20\,\text{k}\Omega$，$\alpha=0.99$，画出适当的树并求 i_e 和 v_L，采用(a)两个回路方程；(b)三个节点方程，其中有

一个公共电压参考节点；(c)三个节点方程，没有公共参考节点。

A.4 确定图 A.12 中 10 kΩ 负载电阻所连接电路的戴维南和诺顿等效电路，采用(a)v_L 的开路电压；(b)(向下的)短路电流；(c)戴维南等效电阻。所有的电路参数已在练习 A.3 中给出。

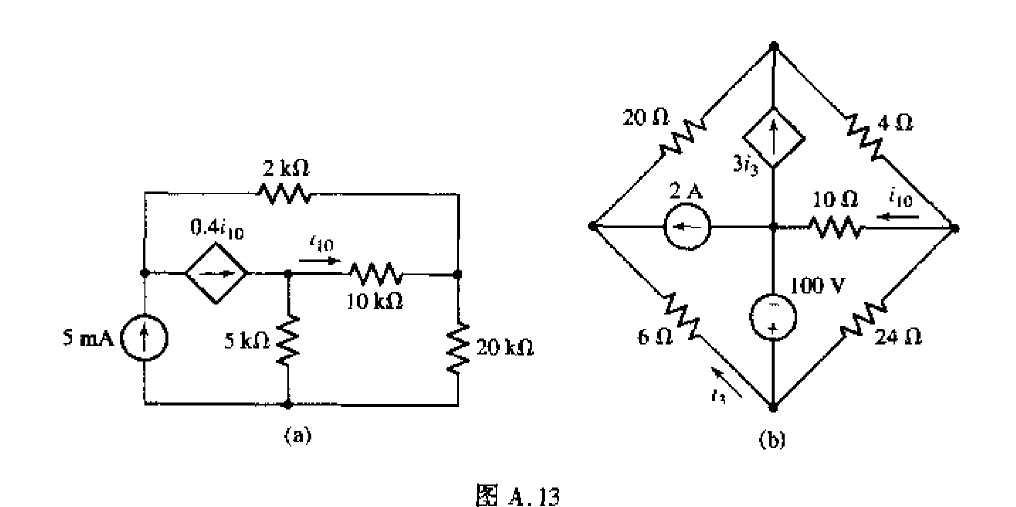


图 A.13

答案：A.2：−4.00 mA；4.69 A。A.3：18.42 sin 1 000t μA；122.6 sin 1 000tmV。A.4：147.6 sin 1 000t mV；72.2 sin 1 000t μA；2.05 kΩ

附录 B 联立方程求解

考虑下面方程表示的简单系统：

$$7v_1 - 3v_2 - 4v_3 = -11 \tag{B.1}$$

$$-3v_1 + 6v_2 - 2v_3 = 3 \tag{B.2}$$

$$-4v_1 - 2v_2 + 11v_3 = 25 \tag{B.3}$$

这组方程可以用系统消元法求解。这种方法尽管冗长，但对于方程数目很大的情况，如果不按系统的方法是不可能得到结果的。幸好有很多办法做这件事，下面就来研究其中的几种方法。

B.1 科学计算器

对于形如方程(B.1)到方程(B.3)那样的方程组，已知其各个系数，而只对未知量数值结果(而不是其代数关系)感兴趣，最直接的方法就是使用市面上出售的各种科学计算器。比如德州仪器公司的 TI-86 型计算器，只要键入[2nd] [SIMULT]，将显示：

SIMULT
Number =

再按键[3] [ENTER]，计算器会显示：

a1,1x1…a1,3x3 = b1
a1,1 =
a1,2 =
a1,3 =
b1 =

先输入方程(B.1)的数据。注意，为防止把数据弄错，应该先花一点时间将这些方程整齐地列好。按下列次序输入[7] [ENTER] [(−)] [3] [ENTER] [(−)] [4] [ENTER] [(−)] [11] [ENTER]。接着输入第二个方程。

输入完三个方程之后，按[F5]键，让 TI-86 解未知量 x1, x2, x3(它们代表 v_1, v_2, v_3)。计算器显示：

x1 = 1.000
x2 = 2.000
x3 = 3.000

应该指出，每一种能够解联立方程的计算器都有自己的步骤以输入要求的信息，因此，在做这件事的时候，无论如何都不应该将“用户手册”或“用户指南”这样的东西扔在一边。

B.2 矩阵

另一个解方程组的强有力工具是矩阵。考虑方程(B.1)，方程(B.2)和方程(B.3)，由方程

系数组成的阵列

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

称为矩阵。选择符号 **G** 是因为矩阵每个元素都是一个电导值。矩阵本身没有值,它只是许多元素的排列。一般用黑体字母表示矩阵、用方括号将元素阵列括起来。

含有 m 行 n 列的矩阵称为$(m \times n)$矩阵。比如:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

是一个(2×3)矩阵。上例中的 **G** 是一个(3×3)的矩阵。$(n \times n)$矩阵又称 n 阶方阵。

一个$(m\times 1)$矩阵称为列矩阵,或列矢量。比如:

$$\mathbf{V}=\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

是一个(2×1)电压相量的列矩阵。

$$\mathbf{I}=\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

则是一个(2×1)电流相量的矢量。一个$(1\times n)$矩阵称为行矢量。两个$(m \times n)$矩阵相等是指它们对应的元素都相等。如果 a_{jk} 表示位于 **A** 中第 j 行和第 k 列的元素,b_{jk} 表示位于 **B** 中第 j 行和第 k 列的元素,当且仅当对于所有 $1\leqslant j\leqslant m$ 和 $1\leqslant k\leqslant n$,$a_{jk}=b_{jk}$ 时,$\mathbf{A}=\mathbf{B}$。如果:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1+\mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2 \\ \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1+\mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

则 $\mathbf{V}_1=\mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1+\mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2$ 和 $\mathbf{V}_2=\mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1+\mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2$

两个$(m\times n)$矩阵的相加是将它们的对应元素相加:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

下面考虑矩阵乘积 **AB**,这里 **A** 是$(m\times n)$矩阵,**B** 是$(p\times q)$矩阵。如果 $n=p$,这两个矩阵称为保角(conformal),它们的乘积存在。即仅当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时,它们的乘积才有意义。

矩阵相乘的正式定义指出,$(m\times n)$矩阵 **A** 和$(n\times q)$矩阵 **B** 的乘积是一个$(m\times q)$矩阵,矩阵元素为 c_{jk},$1\leqslant j\leqslant m$ 和 $1\leqslant k\leqslant q$,其中:

$$c_{jk}=a_{j1}b_{1k}+a_{j2}b_{2k}+\cdots+a_{jn}b_{nk}$$

换句话说,乘积的第 2 行第 3 列元素等于 **A** 中第 2 行所有元素与 **B** 中第 3 列对应元素的乘积之和。例如给定(2×3)矩阵 **A** 和(3×2)矩阵 **B**,则:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}) & (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}) \\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}) & (a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}) \end{bmatrix}$$

结果是一个(2×2)矩阵。

下面看一个矩阵相乘的数值例子,取:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 16 & -16 \end{bmatrix}$$

其中 $6=3\times2+2\times(-2)+1\times4$, $4=3\times3+2\times(-1)+1\times(-3)$ 等等。

矩阵相乘是非互换的。例如,给定(3×2)矩阵 **C** 和(2×1)矩阵 **D**,显然可以求出乘积 **CD**,但乘积 **DC** 却是无定义的。

作为最后一个例子,取:

$$\mathbf{t}_A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

和

$$\mathbf{t}_B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $\mathbf{t}_A\mathbf{t}_B$ 和 $\mathbf{t}_B\mathbf{t}_A$ 都是有定义的。可是:

$$\mathbf{t}_A\mathbf{t}_B=\begin{bmatrix} 21 & 2 \\ 17 & -1 \end{bmatrix}$$

而

$$\mathbf{t}_B\mathbf{t}_A=\begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$$

练习

B.1 给定 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 50 \\ 30 \end{bmatrix}$, 和 $\mathbf{V}=\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$, 求(a) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$;(b) $\mathbf{AB}$;(c) $\mathbf{BA}$;(d) $\mathbf{AV}+\mathbf{BC}$;(e) $\mathbf{A}^2=\mathbf{AA}$。

答案: $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & -17 \\ 7 & 21 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} V_1-3V_2+170 \\ 3V_1+5V_2-10 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -8 & -18 \\ 18 & 16 \end{bmatrix}$

B.3 逆矩阵

用矩阵形式写出方程组:

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix} \tag{B.4}$$

为了求出电压矢量,可以用矩阵 **G** 的逆乘以式(B.4)的两边:

$$\mathbf{G}^{-1}\begin{bmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}=\mathbf{G}^{-1}\begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix} \tag{B.5}$$

这一过程用到恒等式 $\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}=\mathbf{I}$,其中 $\mathbf{I}$ 是单位矩阵,它是与 $\mathbf{G}$ 同体积的方阵,除了对角线上的元素,其余元素均为 0。单位矩阵的对角线上每个元素均为 1。这样式(B.5)成为:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\mathbf{G}^{-1}\begin{bmatrix}-11\\3\\25\end{bmatrix}$$

因为单位矩阵乘以任何矢量就是该矢量本身(证明留给读者作为练习),上式可以简化为:

$$\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\mathbf{G}^{-1}\begin{bmatrix}-11\\3\\25\end{bmatrix}$$

因此解方程组问题转化为求 $\mathbf{G}$ 的逆矩阵问题。许多科学计算器提供了矩阵运算功能。

再次利用 TI-86 计算器,连续输入[2nd] [MATRX],计算器显示如图 B.1 所示。

NAMES	EDIT	MATH	OPS	CPLX
F1	F2	F3	F4	F5

图 B.1 TI-86 矩阵操作显示、每个函数键在菜单项之下

为产生新矩阵 $\mathbf{G}$,按[F_2],显示出:

MATRX
Name =

再按[G] [ENTER],又显示:

MATRX:G 1 x1
[0]

按[3] [ENTER]两次,将 $\mathbf{G}$ 定义为 3×3 矩阵,显示变为:

MATRX:G 3 x3
[0 0 0]
[0 0 0]
[0 0 0]
1, 1 = 0

键入:

[7][ENTER][(−)][3][ENTER][(−)][4][ENTER]

直到将每个系数输入完,然后按[EXIT]。

接着再次引用矩阵菜单,产生 3×1 维电流矢量 $\mathbf{I}$,输入 −11,3,和 25。可以键入[ALPHA] [G] [ENTER]或[ALPHA] [I] [ENTER]来检查刚才输入的值。

现在计算器已经准备好进行矩阵运算求解方程组了。只需输入:

[ALPHA][G][x^{-1}][I][ENTER]

再次提醒读者注意参阅计算器用户手册以了解详细情况。

B.4 行列式

尽管矩阵本身没有"值",但是一个方阵的行列式是有值的。确切地说,行列式是一个值,但一般把行列式阵列和它的值都称为行列式。行列式用符号 Δ 表示,再用一个适当的下标表示它所指的矩阵,如:

$$\Delta_G = \begin{vmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{vmatrix}$$

注意,使用了两条垂线将行列式框起。

任何行列式的值可用它的子行列式展开。为此,选出任意行 j 或任意列 k,将该行或该列的元素乘以它的子行列式,再乘以$(-1)^{j+k}$,然后将这些乘积相加。出现在第 j 行第 k 列的元素的子行列式是除去 j 行 k 列后形成的行列式,用 Δ_{jk} 表示。

例如,沿第 3 列将行列式 Δ_G 展开。首先用(-4)乘以$(-1)^{1+3}=1$,接着乘以它的子行列式:

$$(-4)\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}$$

对第 3 列的其余两个元素重复这一过程,将结果求和:

$$-4\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}+11\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$$

这些子行列式只包含两行两列。它们是 2 阶行列式,它们的值很容易通过再次用子行列式展开来得到,这里给出它的详细过程。对于第一个行列式,沿第一列展开,(-3)乘以$(-1)^{1+1}$,再乘以其子行列式,现在子行列式就是-2。接着(-4)乘以$(-1)^{2+1}$,乘以 6。这样:

$$\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}=(-3)\times(-2)-4\times(-6)=30$$

一个容易记住的方法是"左上乘以右下减去右上乘以左下"。最后:

$$\begin{aligned}\Delta_G &= -4[(-3)\times(-2)-6\times(-4)] \\ &\quad +2[(7)\times(-2)-(-3)\times(-4)] \\ &\quad +11[(7)\times(6)-(-3)\times(-3)] \\ &= -4\times(30)+2\times(-26)+11\times(33) \\ &= 191\end{aligned}$$

作为练习,让我们将同一个行列式沿第一行展开:

$$\begin{aligned}\Delta_G &= 7\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 11 \end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -4 & 11 \end{vmatrix}+(-4)\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 7\times(62)+3\times(-41)-4\times(30) \\ &= 191\end{aligned}$$

对任何阶行列式都可按子行列式展开。

下面重复以上规则,用更一般的形式确定给定行列式 **a** 的值:

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix}$$

沿任意行 j 以子行列式展开的形式可以得到 Δ_a：

$$\begin{aligned}\Delta_a &= a_{j1}(-1)^{j+1}\Delta_{j1} + a_{j2}(-1)^{j+2}\Delta_{j2} + \cdots + a_{jN}(-1)^{j+N}\Delta_{jN} \\ &= \sum_{n=1}^{N} a_{jn}(-1)^{j+n}\Delta_{jn}\end{aligned}$$

或沿任意列 k 展开：

$$\begin{aligned}\Delta_a &= a_{1k}(-1)^{1+k}\Delta_{1k} + a_{2k}(-1)^{2+k}\Delta_{2k} + \cdots + a_{Nk}(-1)^{N+k}\Delta_{Nk} \\ &= \sum_{n=1}^{N} a_{nk}(-1)^{n+k}\Delta_{nk}\end{aligned}$$

出现在 j 行和 k 列的系数 C_{jk} 就是 $(-1)^{j+k}$ 乘以子行列式 Δ_{jk}。所以 $C_{11}=\Delta_{11}$，而 $C_{12}=-\Delta_{12}$。

可以写成：

$$\Delta_a = \sum_{n=1}^{N} a_{jn}C_{jn} = \sum_{n=1}^{N} a_{nk}C_{nk}$$

例如考虑一个 4 阶行列式：

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

可得：

$$\Delta_{11}=\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}=4\times(10+3)+1\times(4+9)-3\times(-2+15)=26$$

$$\Delta_{12}=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}=-1\times(10+3)+2\times(4+9)+0=13$$

$C_{11}=26$，$C_{12}=-13$，求得 Δ 的值为：

$$\begin{aligned}\Delta &= 2C_{11}+(-1)C_{12}+(-2)C_{13}+0 \\ &= 2\times(26)+(-1)\times(-13)+(-2)\times(3)+0=59\end{aligned}$$

B.5　克莱姆法则

现在来考虑克莱姆法则，它可以帮助我们求得未知量的值。在解方程组时，如果数值系数没有给定，计算器就无能为力了，这时克莱姆法则是很有用的。再次考虑方程(B.1)、方程(B.2)和方程(B.3)。定义行列式 Δ_1 为用方程组右边的三个常数代替 Δ_C 后的行列式，所以：

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -11 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 \\ 25 & -2 & 11 \end{vmatrix}$$

沿第一列展开：

$$\Delta_1 = -11\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} + 25\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 682 + 123 + 750 = 191$$

根据克莱姆法则：

$$v_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_G} = \frac{191}{191} = 1\ \text{V}$$

及

$$v_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_G} = \begin{vmatrix} 7 & -11 & -4 \\ -3 & 3 & -2 \\ -4 & 25 & 11 \end{vmatrix} = \frac{581 - 63 - 136}{191} = 2\ \text{V}$$

最后：

$$v_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_G} = \begin{vmatrix} 7 & -3 & -11 \\ -3 & 6 & 3 \\ -4 & -2 & 25 \end{vmatrix} = \frac{1\,092 - 291 - 228}{191} = 3\ \text{V}$$

克莱姆法则适用于包含 N 个未知量的 N 个联立线性方程，其中第 i 个变量 v_i 为：

$$v_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_G}$$

练习

B.2 求下列行列式的值：

(a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$；(b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$；(c) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -3 \\ 6 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$；(d) 如果 $5i_1 - 2i_2 - i_3 = 100$, $-2i_1 + 6i_2 - 3i_3 - i_4 = 0$, $-i_1 - 3i_2 + 4i_3 - i_4 = 0$, $-i_2 - i_3 = 0$，求 i_2 的值。

答案：4；33；−411；1.266

附录 C 戴维南定理的证明

为便于参考，将第 5 章 5.4 节给出的戴维南定理重写于此：

给定任何线性电路，将它重新划分为两个网络 A 和网络 B，它们只用两根导线相连，当 B 断开时，定义出现在 A 端口的电压为开路电压 v_{oc}。如果将 A 中的所有独立电流源和独立电压源"置零"，用独立电压源 v_{oc} 以适当的极性与被置零的无源电路相串联，则 B 中的所有电流和电压将保持不变。

下面证明原始的网络 A 与它的等效电路将产生同样大小的电流流入网络 B 的端点。如果电流相同，那么电压也应该相同。换句话说，如果给网络 B 施加一定的电流，可以设想为一个电流源，那么这个电流源和网络 B 组成的电路具有一定的输入电压作为响应。这样，电流决定电压。另一方面，如果愿意，可以证明网络 B 的端电压没有改变，因为电压也惟一地确定电流。如果网络 B 的输入电压和电流都未改变，就可以得出遍布于网络 B 中的电流和电压都未改变。

首先对一个简单情况来证明定理，假定网络 B 无源（不含独立源）。完成证明之后，可以利用叠加原理将定理扩展到包含独立源的情况。每个网络都可以包含受控源，只要受控源的控制变量也在同一个网络中。

在图 C.1(a) 中从网络 A 通过上边导体流向网络 B 的电流 i，完全由网络 A 中的独立源所产生。假定现在在流过电流 i 的导线中插入一个额外的电压源 v_x，称为戴维南电源，如图 C.1(b) 所示，然后调节 v_x 的幅度和时间变化，直到电流减小到零。按照 v_{oc} 的定义，端口 A 上的电压一定等于 v_{oc}（因为 $i=0$）。网络 B 不含独立源，没有电流流入其端点。因此网络 B 端点上没有电压。按照基尔霍夫电压定律，戴维南电源的电压是 v_{oc}，$v_x=v_{oc}$。而且戴维南电源和网络 A 联合在一起并未向 B 提供电流，但因为网络 A 本身提供了电流 i，叠加原理要求戴维南电源向 B 提供 $-i$ 电流。将戴维南电源颠倒，并让它单独作用，将会在上边的导线中产生电流 i，如图 C.1(c) 所示。这种情况恰好与戴维南定理的结论相同：戴维南电源 v_{oc} 与无源网络 A 串联的结果与给定网络 A 等效。

现在考虑网络 B 为有源网络的情况。设想经过上边导线由网络 A 流向网络 B 的电流 i，它由两部分组成 i_A 和 i_B，其中 i_A 是网络 A 单独作用产生的电流，i_B 是网络 B 单独作用产生的电流。对这两个线性网络应用叠加原理，就可以将电流分成两个部分。图 C.2 中表示出完全响应和两个部分响应。

已经考虑过部分响应 i_A 的情况，如果网络 B 是无源的，可以用戴维南电源和无源网络 A 替换原网络 A。换句话说，必须记住，在 A，B 中的电源和戴维南电源这三个电源中，当 A 和 B 中电源被置零且戴维南电源起作用时，将出现部分响应 i_A。为了利用叠加原理，现在让 A 保持无源，但是让 B 为有源，让戴维南电源置零，按照定义，就得到部分响应 i_B。将这些结果叠加，当 A 无源，让戴维南电源和 B 的电源都作用，响应为 i_{A+B}。它们的和就是原来的电流 i。戴维南电源和 B 的电源都起作用，而 A 中电源置零的情况是戴维南等效电路所要求的。这

样，无论网络 B 的状态如何，它可以是有源或无源，都可以将有源网络 A 用它的戴维南电源(即网络 A 的开路电压)与无源网络 A 的串联组合所代替。

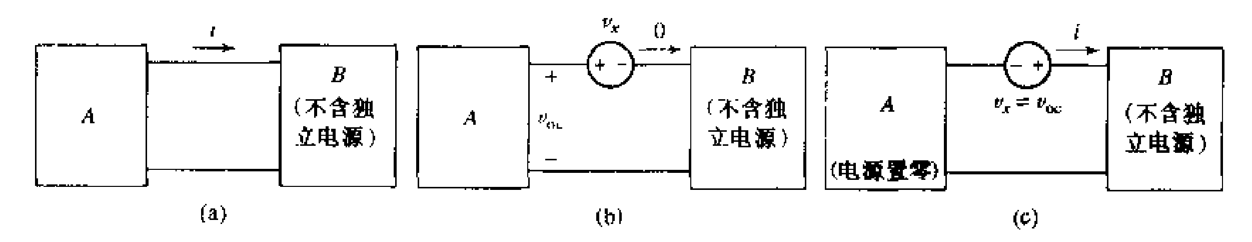


图 C.1 (a)一个一般的线性网络 A 以及一个不含独立源的网络 B，受控源的控制量必须与受控源同在一个网络中；(b)在电路中插入戴维南电源并进行调节直到 $i = 0$，网络 B 上没有电压，$v_x = v_{oc}$，所以戴维南电源提供的电流为 $-i$，而网络 A 提供的电流为 i；(c)将戴维南电源倒置，网络 A 中的电源置零，因此电流为 i[①]

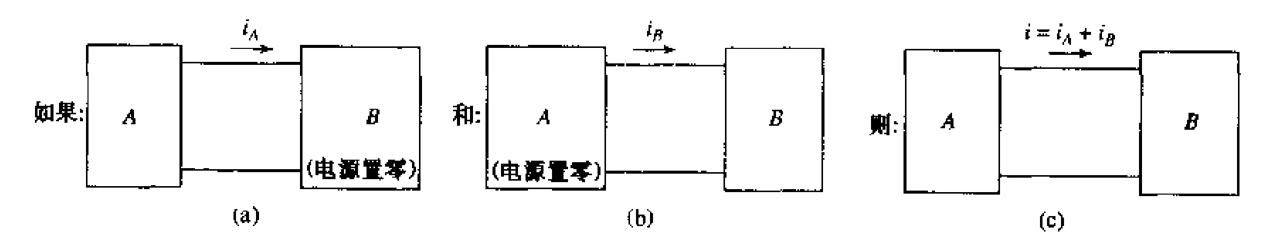


图 C.2 应用叠加原理可以将电流 i 理解为两个部分的响应之和

① 这时的戴维南电源才是平时所指的戴维南电源。(b)中所说的戴维南电源的方向与后者相反——译者注。

附录 D　PSpice 指南

SPICE 是 Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis(侧重集成电路的仿真程序)的缩写。它是一个功能非常强大的程序,可以完成许多不同的过程,不过我们只用它做基本直流、交流和瞬态分析。最早由加州大学伯克利分校在 20 世纪 70 年代早期开发,现在 SPICE 已经成为工业标准。1984 年 MicroSim 公司引入了 SPICE 的 PC 版本,称为 PSpice,它在 SPICE 程序核的基础上建立了直观的图形界面。根据所考虑的电路应用类型,现在有几家公司提供不同的基本 SPICE 程序包。

本附录只介绍 PSpice 的基础,更多的信息可参考本附录末尾给出的参考文献。例如,这些参考文献描述了怎样确定输出值对于某个元件值变化的敏感程度;怎样得到输出对于源变量的变化曲线;怎样求得作为电源频率函数的交流输出;怎样进行电路的噪声和失真分析;怎样使用电子器件的精确非线性模型;怎样显示电子线路的温度效应。在本教材网页上提供了简短的传统 SPICE 分析方法指南。

有两个主要 PSpice 版本:一个是专业版本,在写本书的时候售价约 4 000 美元;另一个是供下载的免费版本——PSpice 学生版 9.1(www.orcad.com)。

PSpice 学生版 9.1 的文本文件可在下列位置下载:http://www.orcad.com/Product/Simulation/PSpice/eval.asp。

D.1　PSpice A/D

2000 年 2 月发表的 PSpice 学生版 9.1 列出了下面的强制性限制:

进行模拟的电路限制在:

64 个节点

10 个晶体管

65 个基本数字器件

一共 10 个传输线(理想或非理想)

4 对耦合传输线

额外限制:

样品库包含 39 个模拟和 134 个数字元件。

PSpice 模型编辑器中的器件特性仅限于二极管。

PSpice 激励源编辑器中的激励源仅限于正弦波(模拟)和时钟(数字)。

利用 PSpice 优化器所做的电路优化,限制为一个目标、一个参数和一个约束。

不能产生 CSDF 形式的数据文件。

只能显示由学生版本模拟程序运行产生的模拟数据。

D.2 Schematics

在电原理图中最多只能放 50 个元件。
只能用尺寸 A 的纸画图。

D.3 Capture

只包含 PSpice 库，标准 Capture 库未包含。输入工具、网络列表及与 PSpice 无关的附件未包含。
不能保存含有多于 60 个部件的设计(可以产生并看到较大的设计，但不能保存)。
不能保存包含多于 15 个部件的库。

D.4 最低硬件要求

Intel 奔腾 90 MHz 或同等处理器
Windows 95，Windows 98 或 Windows NT
16 MB RAM (建议 32 MB)
90 MB 可用硬盘空间
CD-ROM 驱动器
鼠标或类似装置

尽管 Orcad 在 PSpice 学生版 9.1 中提供了分离的原理图工具(Capture)，本附录只使用 MicroSim 的版本。

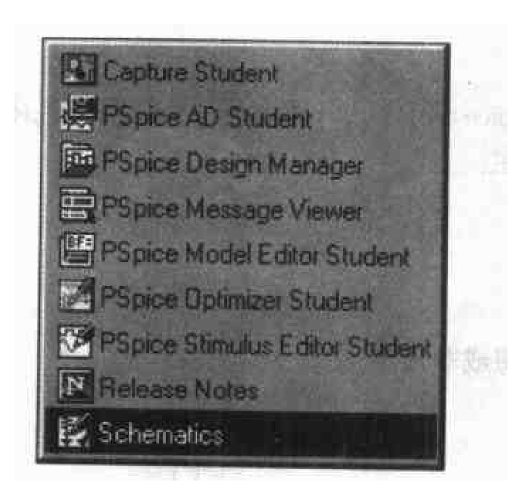


图 D.1 PSpice 程序菜单

D.5 开始

任何 PSpice 模拟程序都有三个组成部分：(1)画原理图；(2)电路模拟；(3)从模拟输出的结果获得需要的信息。如图 D.1 所示，选择 ▇ ◊ Program ◊ PSpice Student 将弹出电原理图画图程序的菜单，从中选择 Schematics 将出现图 D.2 所示的窗口。

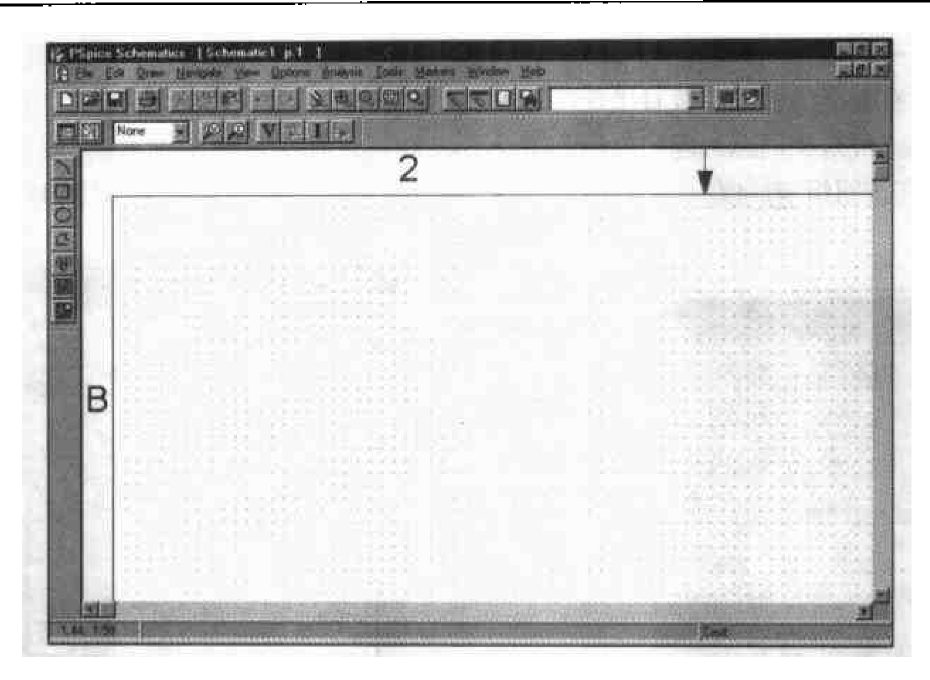


图 D.2 Schematic capture 程序窗口

这里我们尝试对电压分压电路做简单模拟。先把所需的元件放到网格上，再用导线将它们连接起来。下拉 Draw 菜单，可以看到如图 D.3 所示的选择菜单。选择 Get New Part 就会看到图 D.4 所示的零件菜单(注意使用组合键 Ctrl + G 键可以免去移动鼠标)。如果记不清某个零件的名称可以在列表中搜索，为使搜索容易些，可以点击 Libraries 按钮按照不同的目录进行搜索。这里将光标置于顶部的选择框中，除去“ * ”号，键入 VDC。点击 Place & Close 按钮，就返回到原理图网格上，这时一个电池符号随着鼠标箭头来回移动。为电源选一个适当的位置，按一下鼠标左键，再按一下鼠标右键。如果忘记按鼠标右键将会发现，电池符号仍然跟随鼠标移动，这样可以在多个位置放置同一个零件而不用每次都回到 Get New Part 菜单。电池符号是亮红色的，按一下鼠标左键可以使它退出选中状态。再次返回零件菜单并键入 R，现在可以放置一个电阻，如图 D.5 所示。将光标移动到右边，发现电阻符号的方向不对。只要按下 Ctrl + R 键就可旋转符号，也可以用鼠标左键点击零件之后这样做、或在零件处于亮红色状态的任何其他时候这样做。

还有一项工作要做，PSpice 要求一定要指定一个参考节点，可以在原理图中放置一个接地符号(零件名称 EGND)。现在的电路如图 D.6 所示。准备连接电路，从 Draw 菜单选择 Wire，或直接按下 Ctrl + W 键。现在光标成为一只小铅笔。将光标移到电池符号的“ + ”端，按一下鼠标左键开始画线。移动光标直到电阻 R_1 的左端，再次按下鼠标左键以结束这根导线。完全连接好的电路如图 D.7 所示。

下一步是选择元件值(注意电阻的默认值是 1 kΩ)。首先模拟一个 9 V 电池的分压器，$R_1 = 47\ \Omega$，$R_2 = 75\ \Omega$。经验告诉我们，R_1 上的电压为 3.467 V，R_2 上的电压为 5.533 V。用鼠标左键在电池符号旁边的 0 V 上双击，可以见到图 D.8 的对话框，键入 9 V，点击 OK 按钮。现在这个零件的属性已经设置为 9 V。使用同样方法，可以将 R_1，R_2 的值由 1 kΩ 分别改为 47 Ω 和 75 Ω。

下面在菜单栏上 Edit 下点击软驱图标以保存原理图，将文件取名为 voltage divider circuit。现在可以点击在 File 下左上角的图标 进行电路模拟。接着 PSpice 产生一个网络表类型

的文件，检查一下，确信电路已经连接好可以进行模拟。因为 PSpice 不知道你想模拟哪种电路，它并不检查所有类型的错误。接着出现图 D.9 所示的窗口，可见我们的设置没有出现错误，模拟过程已经完成。可是我们感兴趣的电压却看不到。获得这种信息有两种方法，最容易的是回到原理图窗口，在按钮组 中点击字母 V。电压立刻出现在原理图中，见图 D.10 所示。

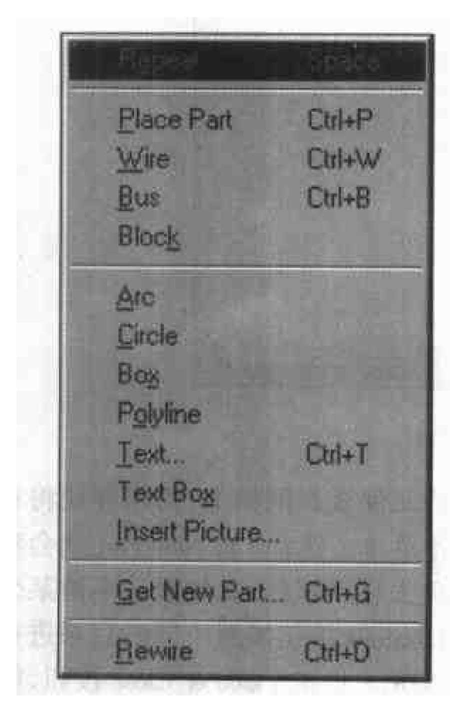


图 D.3 Draw 菜单

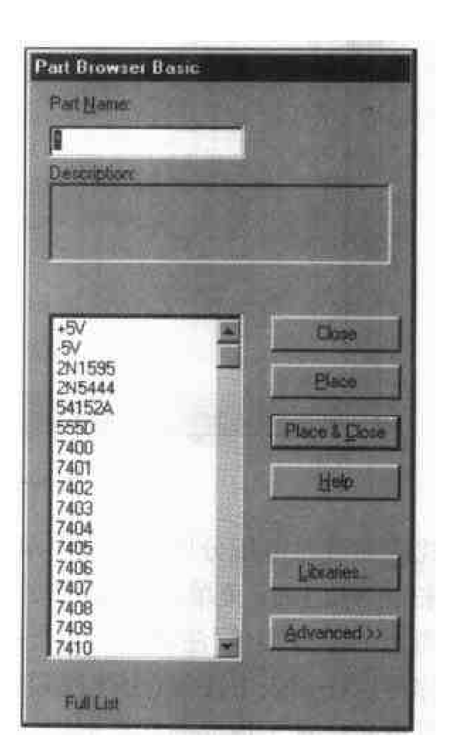


图 D.4 零件库菜单

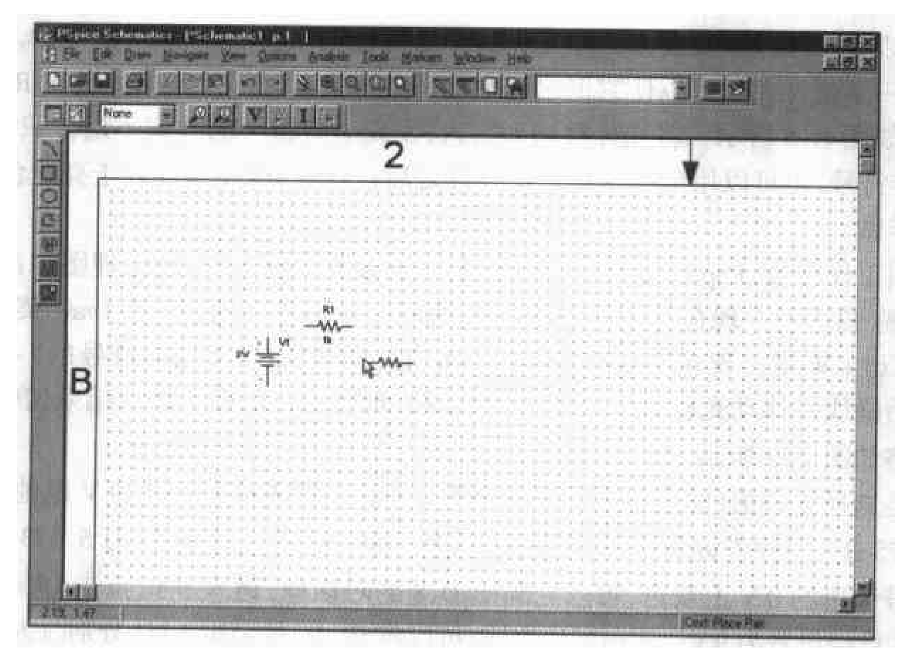


图 D.5 开始在原理图上放置零件

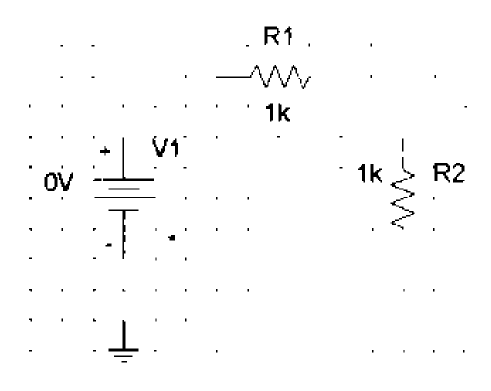


图 D.6　准备连接前的电路

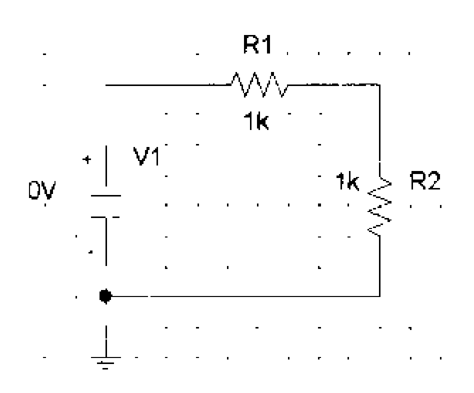


图 D.7　完全连接好的电路

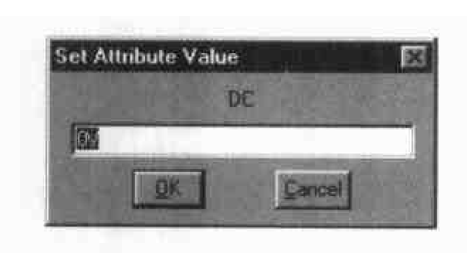


图 D.8　元件属性对话框

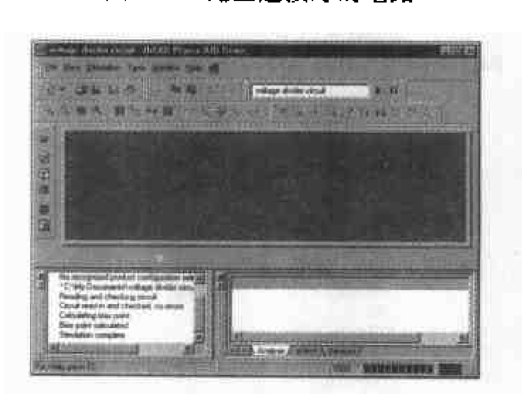


图 D.9　模拟状态窗口

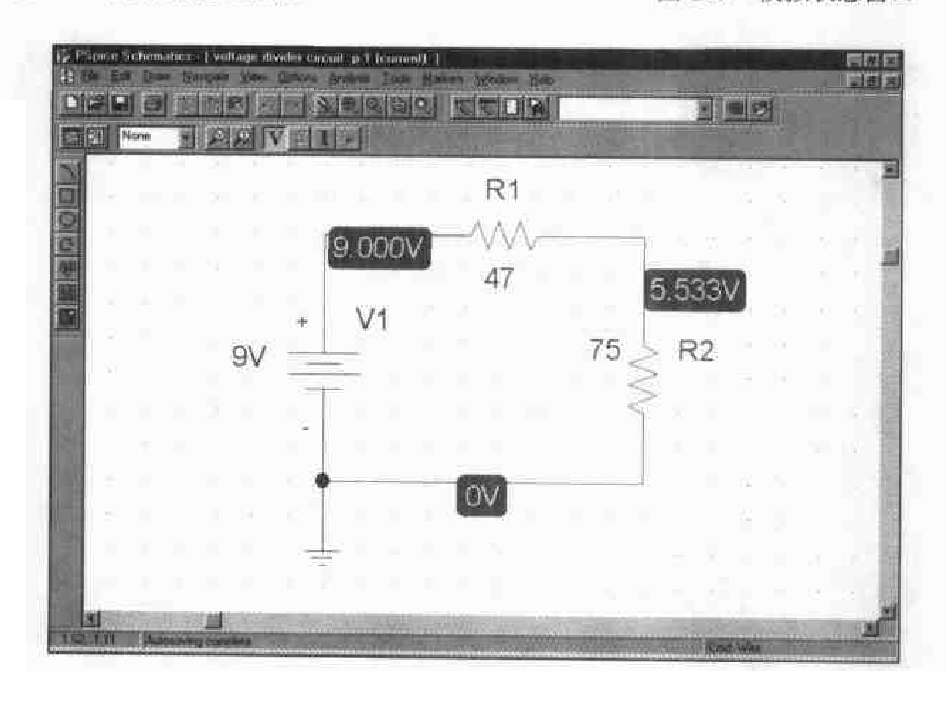


图 D.10　原理图上显示出节点电压

可见，电路模拟已经正确完成，如同预测的一样，R_2 上的电压清楚地显示为 5.533 V，R_1 上的电压为 9.000 − 5.533 = 3.467 V。

如果从图 D.9 所示的状态窗口 View 菜单中选择 OUutput File，在文件末尾可以看到：

NODE VOLTAGE NODE VOLTAGE
($N _ 0001) 9.0000 ($N _ 0002) 5.5328

不过还需要查阅文件的开始部分,以弄清 $N _ 0001 和 $N _ 0002 是指哪个电路节点。

参考文献

Paul W. Tuinenga, *SPICE: A Guide to Circuit Simulation and Andlysis Using PSpice*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.(这本非常普及的平装书是一本易读的 PSpice 导论和手册。它包含了很多电路例子)

Roy W. Goody, *OrCAD PSpice for Windows Volume I: DC and AC Circuits*, 3d ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2001.(是一本带有很多插图和有趣例题的非常有用的书)

附录E 复　　数

本附录包含复数的定义，复数的基本算术运算，欧拉恒等式，复数的指数形式和极坐标形式。首先介绍复数的概念。

E.1 复数

在数学学习的开始阶段只涉及到实数，如4、$-\frac{2}{7}$和π。可是不久便会遇到形如$x^2=-3$这样的代数方程，任何实数都不满足这样的方程。只有通过引入虚数单位，或称虚数算符才能解这样的方程，这里虚数单位用j表示。按定义$j^2=-1$，所以$j=\sqrt{-1}$，$j^3=-j$，$j^4=1$等等。实数与虚数算符的乘积称为虚数，实数与虚数之和称为复数。因此形如$a+jb$的数(其中a和b为实数)就是复数。

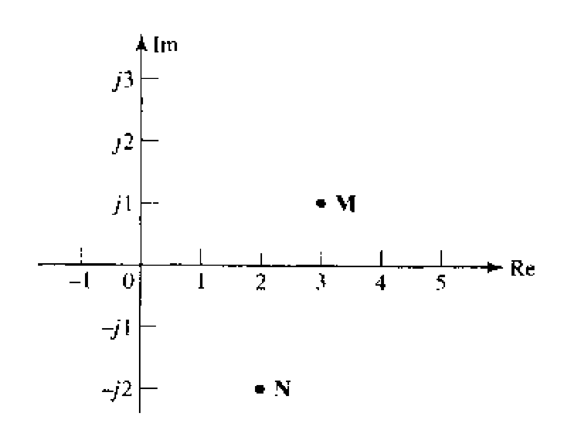
下面用某个单个字母表示复数，如$\mathbf{A}=a+jb$。它的复数性质由黑体字母表示。在手写稿中习惯于在字母上加一横杠。前面的复数$\mathbf{A}$可以用一个实数成分或实部a和一个虚数成分或虚部b来描述。可以表达为：

$$\text{Re}\{\mathbf{A}\}=a\quad \text{Im}\{\mathbf{A}\}=b$$

在数学上用符号i表示虚数算符，但在电气工程领域为避免与电流符号混淆，习惯上用j表示虚数算符。

选择"虚"和"复"这两个词是一个误解。在这里和在数学文献中它们只是作为技术上的术语用来表示一类数。将"虚"字解释为"不属于这个现实世界的"，或将"复"解释为"复杂的"是既不公正也不合乎本意的。

$\mathbf{A}$的虚数成分不是jb。按照定义，虚数成分是一个实数。



图E.1　在这个复平面上标出了复数$\mathbf{M}=3+j1$和$\mathbf{N}=2-j2$

应该指出，所有实数都可以被认为是虚部为零的复数。因此实数包含于复数系统之中，可以认为实数是复数的特例。在定义复数基本算术运算时会想到，如果将每个复数的虚部置零，

那么复数运算应该还原为相应的实数运算。因为,任何复数完全由一对实数表征,如前面提到的 a 和 b,可以用直角坐标图示获得感观上的帮助。如图 E.1 所示,用一个实轴和一个虚轴可以形成一个复平面,或称 Argand 图,在这个图上任何一个复数都可用一个点表示。图中标出复数 $\mathbf{M}=3+j1$ 和 $\mathbf{N}=2-j2$。应该意识到复平面只是一个感观上的工具,它对后面的数学命题完全不是必须的。

定义:两个复数相等是指,当且仅当它们的实部相等并且虚部也相等。参见复平面图,对复平面中的每个点只有一个复数与之对应,反过来,对每个复数,复平面中只有一个点与之对应。这样,给定两个复数:

$$\mathbf{A}=a+jb \quad \text{和} \quad \mathbf{B}=c+jd$$

如果:

$$\mathbf{A}=\mathbf{B}$$

则必定有:

$$a=c \quad \text{和} \quad b=d$$

用一个实数和一个虚数的和来表示复数,如 $\mathbf{A}=a+jb$,称为复数的直角形式。很快将会看到复数的其他形式。

现在定义复数的基本运算:加、减、乘、除。两个复数的和定义为另一个复数,它的实部是两个复数实部之和,它的虚部是两个复数的虚部之和。即:

$$(a+jb)+(c+jd)=(a+c)+j(b+d)$$

例如:

$$(3+j4)+(4-j2)=7+j2$$

类似地可定义两个复数的差,例如:

$$(3+j4)-(4-j2)=-1+j6$$

复数的加减也可以在复平面用作图法完成。每个复数用一个矢量,或有向线段表示。像图 E.2(a)那样作一个平行四边形,或者像图 E.2(b)那样将两个矢量头尾相连,就能得到两个矢量的和。作图法经常用于对更为准确的数值解的一种验证。

两个复数相乘定义为:

$$(a+jb)(c+jd)=(ac-bd)+j(bc+ad)$$

上面的结果很容易用两个二项式相乘直接得到,其中用到实数的代数规则,并用 $j^2=-1$ 化简结果。例如:

$$\begin{aligned}(3+j4)(4-j2)&=12-j6+j16-8j^2\\&=12+j10+8\\&=20+j10\end{aligned}$$

这种方法比采用通用的乘法定义公式更容易,特别是如果直接用 -1 取代 j^2。

在定义复数除法运算之前,应该先定义复数的共轭。复数 $\mathbf{A}=a+jb$ 的共轭为 $a-jb$,用 $\mathbf{A}^*$ 表示。由此,任何复数的共轭只要改变该复数虚部的符号就可得到。如果:

$$\mathbf{A}=5+j3$$

那么:

$$\mathbf{A}^*=5-j3$$

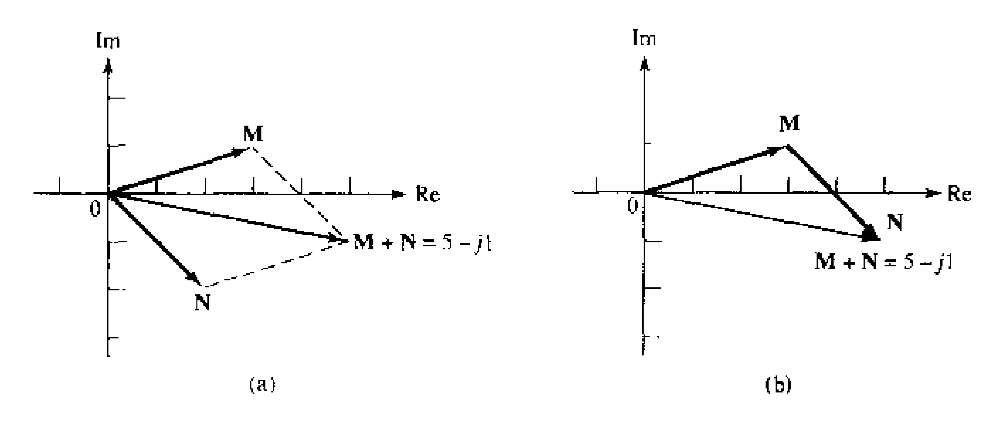


图 E.2 (a)通过构造一个平行四边形得到复数 $\mathbf{M} = 3 + j1$ 与 $\mathbf{N} = 2 - j2$ 之和；(b)将两个矢量头尾相连也可以得到它们的和

显然，对于任何复杂的复数表达式，将其中每个复数项替换为它的共轭，即将每个 j 替换为 $-j$，就可得到该复数表达式的共轭。

加、减、乘运算的定义表明：复数与其共轭之和是一个实数；复数与其共轭之差是一个虚数；复数与其共轭之积是一个实数。同样显然的是，如果 $\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 的共轭，则 $\mathbf{A}$ 是 $\mathbf{A}^*$ 的共轭，换句话说 $\mathbf{A} = (\mathbf{A}^*)^*$。一个复数与其共轭称为一对共轭复数。

在实际问题中，一个复数，不知何故，总是伴随着它的共轭。

现在定义两个复数的商：

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{(\mathbf{A})(\mathbf{B}^*)}{(\mathbf{B})(\mathbf{B}^*)}$$

因此：

$$\frac{a + jb}{c + jd} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

为使分母成为一个实数，用分母的共轭同乘以分子分母，这个过程称为分母有理化。下面看一个数值例子：

$$\frac{3 + j4}{4 - j2} = \frac{(3 + j4)(4 + j2)}{(4 - j2)(4 + j2)}$$
$$= \frac{4 + j22}{16 + 4} = 0.2 + j1.1$$

两个直角形式的复数相加减是相当简单的运算。可是两个直角形式的复数相乘或相除却是相当冗长的过程。我们将会发现，指数或极坐标形式的复数乘除运算是非常简单的，这两种复数形式将在 E.3 和 E.4 节中介绍。

练习

E.1 取 $\mathbf{A} = -4 + j5$，$\mathbf{B} = 3 - j2$ 和 $\mathbf{C} = -6 - j5$，求(a) $\mathbf{C} - \mathbf{B}$；(b) $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B} + 5\mathbf{C}$；(c) $j^5\mathbf{C}^2(\mathbf{A} + \mathbf{B})$；(d) $\mathbf{B}\,\mathrm{Re}[\mathbf{A}] + \mathbf{A}\,\mathrm{Re}[\mathbf{B}]$。

E.2 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{C}$ 的值与前题相同，求(a) $[(\mathbf{A} - \mathbf{A}^*)(\mathbf{B} + \mathbf{B}^*)^*]^*$；(b) $(1/\mathbf{C}) - (1/\mathbf{B})^*$；(c) $(\mathbf{B} + \mathbf{C})/(2\mathbf{BC})$。

E.2 欧拉恒等式

在第9章中曾经遇到含虚数的时间函数,这里所关心的是这些函数关于实数 t 的微分和积分。对复函数进行微积分与实函数关于 t 的微积分过程完全一样。也就是说,在微积分运算中像对待实常数那样对待复常数。如果 $\mathbf{f}(t)$是一个复时间函数:

$$\mathbf{f}(t) = a \cos ct + jb \sin ct$$

那么:

$$\frac{d\mathbf{f}(t)}{dt} = -ac \sin ct + jbc \cos ct$$

及

$$\int \mathbf{f}(t)\,dt = \frac{a}{c}\sin ct - j\frac{b}{c}\cos ct + \mathbf{C}$$

其中积分常数 $\mathbf{C}$ 一般是一个复数。

有时必须对复变量函数做关于该复变量的微分或积分。一般来说,进行微分或积分运算的函数需要满足一定条件才能顺利完成运算。这里所遇到的所有函数都满足这些条件,采用与实变量相同的方法,可以求得关于复变量的微分和积分。

至此,必须利用一个非常重要的基本关系式,称为欧拉恒等式。因为它在非直角形式的复数表示上极其有用,这里给出它的证明。

这个证明由大学微积分学的教材给出,它基于 $\cos\theta$、$\sin\theta$、和 e^z 的幂级数展开:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots$$

或

$$\cos\theta + j\sin\theta = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + j\frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

及

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$$

所以:

$$e^{j\theta} = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots$$

结论是:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \tag{E.1}$$

如果取 $z = -j\theta$,则:

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta \tag{E.2}$$

将式(E.1)和式(E.2)相加或相减,就得到了在研究并联和串联 *RLC* 电路的欠阻尼自由响应时未加证明就用过的两个表达式:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \tag{E.3}$$

$$\sin\theta = -j\frac{1}{2}(e^{j\theta} - e^{-j\theta}) \tag{E.4}$$

练习

E.3　利用式(E.1)至式(E.4)求(a)e^{-j1};(b)e^{1-j1}(c) $\cos(-j1)$;(d) $\sin(-j1)$。

E.4　当 $t=0.5$ 时,求(a) $(d/dt)(3\cos 2t - j2\sin 2t)$;(b) $\int_0^t (3\cos 2t - j2\sin 2t)\,dt$, 当 $\mathbf{s}=1+j2$ 时,求(c) $\int_{\mathbf{s}}^{\infty} \mathbf{s}^{-3}\,d\mathbf{s}$;(d)$(d/d\mathbf{s})[3/(\mathbf{s}+2)]$。

答案: E.3: $0.540-j0.841$; $1.469-j2.29$; 1.543; $-j1.175$。E.4: $-5.05-j2.16$; $1.262-j0.640$; $-0.06-j0.08$; $-0.0888+j0.213$

E.3　指数形式

给定欧拉恒等式:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

用正实数 C 乘以两边:

$$Ce^{j\theta} = C\cos\theta + jC\sin\theta \tag{E.5}$$

式(E.5)右边由一个实数与一个虚数之和组成,因此它是一个直角形式的复数,称它为复数 $\mathbf{A}$,其中 $\mathbf{A}=a+jb$。让两个复数的实部相等:

$$a = C\cos\theta \tag{E.6}$$

虚部也相等:

$$b = C\sin\theta \tag{E.7}$$

然后取式(E.6)和式(E.7)的平方并相加:

$$a^2 + b^2 = C^2$$

即

$$C = +\sqrt{a^2 + b^2} \tag{E.8}$$

用式(E.6)除以式(E.7),得:

$$\frac{b}{a}\tan\theta$$

即:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} \tag{E.9}$$

得到关系式(E.8)和式(E.9)之后,就能根据已知的 a 和 b 确定 C 和 θ。例如,$\mathbf{A}=4+j2$,令 $a=4$, $b=2$,求得 C 和 θ 为:

$$C = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4.47$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{2}{4} = 26.6^\circ$$

可以用以上结果将 **A** 写成如下形式：

$$\mathbf{A} = 4.47\cos 26.6^\circ + j4.47\sin 26.6^\circ$$

但是式(E.5)左边的形式更有用：

$$\mathbf{A} = Ce^{j\theta} = 4.47e^{j26.6^\circ}$$

这种形式的表达式称为复数的指数形式。其中正实因子 C 称为幅度，出现在指数部分的实数 θ 称为幅角。数学上总是以弧度表示 θ，将它写成：

$$\mathbf{A} = 4.47e^{j0.464}$$

但工程上习惯以度(degree)表示。在指数中使用度的符号(°)可以避免混淆。

概括来说，给定一个直角形式的复数：

$$\mathbf{A} = a + jb$$

若希望将它表示成指数形式：

$$\mathbf{A} = Ce^{j\theta}$$

可以利用式(E.8)和式(E.9)求得 C 和 θ。如果给定指数形式的复数，则可以利用式(E.6)和式(E.7)求得 a 和 b。

当 **A** 是一个数值表达式，指数(或极坐标)形式与直角形式之间的转换可以借助于大多数科学计算器内建的运算实现。

使用式(E.9)的反正切函数确定角度 θ 时会出现疑问。这个函数是多值的，必须从许多可能性中选出一个适当的角度。可以选一个角度使正弦和余弦的符号与按照式(E.6)、式(E.7)得到的 a 和 b 的值相符。例如将：

$$\mathbf{V} = 4 - j3$$

转换为指数形式。幅度为：

$$C = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

角度为：

$$\theta = \tan^{-1}\frac{-3}{4} \qquad \text{(E.10)}$$

需要选择一个 θ 值，使得 $\cos\theta$ 为正值，因为 $4 = 5\cos\theta$。而且使得 $\sin\theta$ 为负值，因为 $-3 = 5\sin\theta$。因此得到 $\theta = -36.9^\circ, 323.1^\circ, -396.9^\circ$ 等等。这些值都是正确的，一般选择最简单的一个，这里是 -36.9°。需要指出，式(E.10)的另一个答案 $\theta = 143.1^\circ$ 是不对的，因为那样 $\cos\theta$ 为负，而 $\sin\theta$ 为正。

正确选择角度的一个简单方法是在复平面中用图示法表示复数。首先给定直角形式的一个复数，$\mathbf{A} = a + jb$，它位于复平面的第一象限，如图 E.3 所示。从原点画一条线到表示复数的那一点，就形成了一个直角三角形，其斜边显然就是该复数的指数形式的幅度。换句话说，$C = \sqrt{a^2 + b^2}$。而且，可见斜线与正实轴形成的逆时针角就是指数形式的幅角 θ，因为 $a = C\cos\theta, b = C\sin\theta$。如果现在给定位于另一个象限内的直角形式的复数，比如 $\mathbf{V} = 4 - j3$，如图 E.4 所示，图中显然正确的角应该是 -36.9° 或 323.1°。在实际中往往只需想像一下这个草图，往往不用画出。

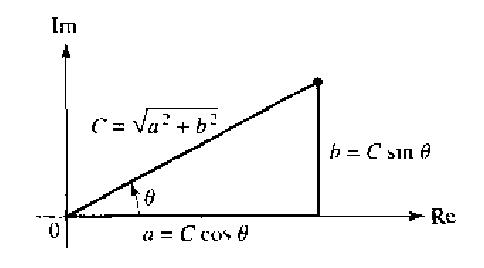


图 E.3 通过正确选择复数直角形式的实部和虚部，或者选择指数形式的幅度和幅角，可以在复平面中用一个点表示一个复数

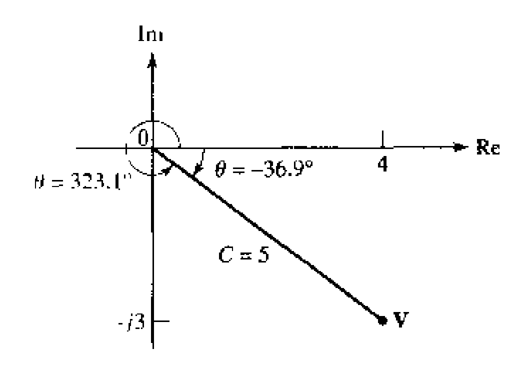


图 E.4 在复平面中表示复数 $\mathbf{V}=4-j3=5e^{-j36.9°}$

如果复数直角形式的实部为负，往往处理负复数更容易些，这样避免了出现幅角超过 90°的情况。例如，给定：

$$\mathbf{I}=-5+j2$$

写成：

$$\mathbf{I}=-(5+j2)$$

将(5 - j2)转换成指数形式：

$$\mathbf{I}=-Ce^{j\theta}$$

其中：

$$C=\sqrt{29}=5.39 \quad 和 \quad \theta=\tan^{-1}\frac{-2}{5}=-21.8°$$

或因此得到：

$$\mathbf{I}=-5.39e^{-j21.8°}$$

前面的负号可以取消，只要将幅角增加或减小 180°，参见复平面中的草图。结果可用指数形式表示为：

$$\mathbf{I}=5.39e^{j158.2°} \quad 或 \quad \mathbf{I}=5.39e^{-j201.8°}$$

注意从电子计算器反正切模式得到的角度总是小于 90°。所以无论是 $\tan^{-1}[(-3)/4]$ 还是 $\tan^{-1}[3/(-4)]$ 结果都是 -36.9°。可是具有直角-极坐标转换功能的计算器在任何情况下都会给出正确的角。

最后，关于复数的指数形式表示还应该指出一点，当且仅当两个指数形式复数的幅度相等，幅角等效，则称它们相等。角度相差 360°倍数的角称为等效角。例如，如果 $\mathbf{A}=Ce^{j\theta}$，$\mathbf{B}=De^{j\phi}$，而且 $\mathbf{A}=\mathbf{B}$，则一定有 $C=D$，$\theta=\phi\pm(360°)n$，其中 $n=0,1,2,3,\cdots$

练习

E.5 用 $-180°<\theta\leqslant180°$ 范围内的角度，指数形式表示下列复数 (a) $-18.5-j26.1$；(b) $17.9-j12.2$；(c) $-21.6+j31.2$。

E.6 以直角形式表示下列复数 (a) $61.2e^{-j111.1°}$；(b) $-36.2e^{j108°}$；(c) $5e^{-j2.5}$。

答案： E.5：$32.0e^{-j125.3°}$；$21.7e^{-j34.3°}$；$37.9e^{j124.7°}$。E.6：$-22.0-j57.1$；$11.19-j34.4$；$-4.01-j2.99$

E.4 极坐标形式

要介绍的第三种(也是最后一种)复数表示形式,除了符号上的些微差别外,本质上与指数形式相同。用角符号(∠)代替 e^{j}。这样,指数形式的复数 **A** 为:

$$\mathbf{A} = Ce^{j\theta}$$

可以写成更简洁的形式:

$$\mathbf{A} = C\angle\theta$$

称这种形式为复数的极坐标形式,它暗示用极坐标表示(复)平面中的一个点。

很显然,从直角到极坐标形式的转换,或从极坐标到直角形式的转换基本上与直角和指数形式之间的转换相同。对 C,θ,a,b 存在同样的关系式。

于是复数:

$$\mathbf{A} = -2 + j5$$

写成指数形式为:

$$\mathbf{A} = 5.39e^{j111.8^\circ}$$

写成极坐标形式为:

$$\mathbf{A} = 5.39\angle 111.8^\circ$$

为看出指数和极坐标形式的优越性,考虑两个指数或极坐标形式的复数相乘和相除。给定:

$$\mathbf{A} = 5\angle 53.1^\circ \quad 和 \quad \mathbf{B} = 15\angle -36.9^\circ$$

它们的指数形式为:

$$\mathbf{A} = 5e^{j53.1^\circ} \quad 和 \quad \mathbf{B} = 15e^{-j36.9^\circ}$$

可以写出两个复数的乘积,其幅度为它们的幅度乘积,其幅角为它们幅角之代数和,这个规则与普通指数乘法相同:

$$(\mathbf{A})(\mathbf{B}) = (5) \times (15)e^{j(53.1^\circ - 36.9^\circ)}$$

或

$$\mathbf{AB} = 75e^{j16.2^\circ} = 75\angle 16.2^\circ$$

根据极坐标形式的定义,显然:

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = 0.333\angle 90^\circ$$

复数的加减以直角形式操作最为简单。指数或极坐标形式的复数加减运算应该先将它们转化为直角形式。反之,直角形式的乘除运算应该先将它们转化为指数或极坐标形式,除非两个数恰好是很小的整数。例如,若要求$(1 - j3)$乘以$(2 + j1)$,直接相乘更容易些,得到$(5 - j5)$。如果数字大小适合心算,将它们转换为极坐标形式就浪费时间了。

应该努力熟悉复数的三种不同表示形式并能够迅速从一种形式转换为另一种形式。下面一长串的公式总结了它们的相互关系:

$$\mathbf{A} = a + jb = \mathrm{Re}[\mathbf{A}] + j\mathrm{Im}[\mathbf{A}] = Ce^{j\theta} = \sqrt{a^2 + b^2}\, e^{j\tan^{-1}(b/a)}$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2}\angle \tan^{-1}(b/a)$$

大多数从一种形式到另一种形式的转换使用计算器就可以很快完成,很多计算器都具有解复数线性方程的能力。

将会发现复数是一种方便的数学技巧，它方便了对实际物理状况的分析。

练习

E.7 出于纯粹的计算乐趣，请用6位有效数将下列复数运算的结果表示为极坐标形式：(a) $[2-(1\angle -41^\circ)]/(0.3\angle 41^\circ)$；(b) $50/(2.87\angle 83.6^\circ + 5.16\angle 63.2^\circ)$；(c) $4\angle 18^\circ - 6\angle -75^\circ + 5\angle 28^\circ$。

E.8 求 $\mathbf{Z}$ 的直角形式，假定(a) $\mathbf{Z} + j2 = 3/\mathbf{Z}$；(b) $\mathbf{Z} = 2\ln(2-j3)$；(c) $\sin\mathbf{Z} = 3$。

答案：E.7：$4.691\,79\angle -13.218\,3^\circ$；$6.318\,33\angle -70.462\,6^\circ$；$11.506\,6\angle -54.596\,9^\circ$。
E.8：$\pm 1.414 - j1$；$2.56 - j1.966$；$1.571 \pm j1.763$

附录 F　MATLAB 简介

MATLAB 是一个功能极其强大的软件包,在这里将对使用 MATLAB 所要求的几个基本概念提供一个非常简要的介绍。MATLAB 的使用对本书完全是任选的,但随着它越来越成为各种电气工程领域中的常用工具,有必要给学生提供机会熟悉这个软件的某些特点,特别是二维和三维函数作图,矩阵运算,解联立方程和处理代数表达式。许多学校为学生提供 MATLAB 的完全版,但是在本书写作的时候,MathWorks 公司(http://www.mathworks.com/products/studentversion)已经以非常低的价格推出了一个学生版。本书给出的 MATLAB 例题均使用学生版 5.0。建议感兴趣的读者去当地书店查找更详细的 MATLAB 手册,有很多这样的书籍。

F.1　开始

一般通过点击程序的图标进入 MATLAB,接着打开一个如图 F.1 所示的窗口。可以从 File 菜单或直接在窗口中输入命令以执行程序。MATLAB 有详细的在线帮助,这对于初学者和高级用户都是很有帮助的。典型的 MATLAB 程序很像 C 程序,但并不要求读者熟悉 C 程序。

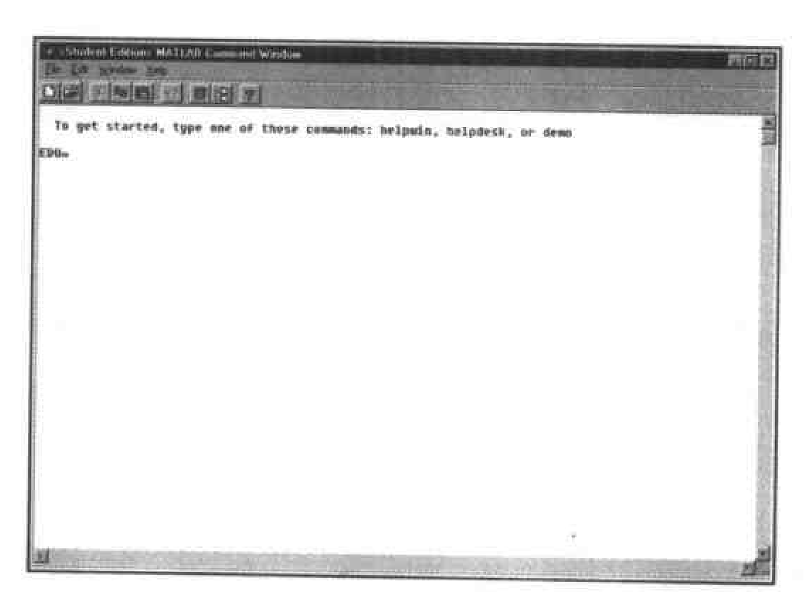


图 F.1　MATLAB 窗口

F.2　变量和数学运算

用户应该意识到所有变量都是矩阵,有时不过是简单的 1 × 1 矩阵,这样才能深刻理解 MATLAB。变量名最多可以有 19 个字符长,这对于书写具有良好可读性的程序非常有益。变量名首字符必须是字母,但后面的字符可以是任何字母或数字,也可以用下划线(_)。MAT-

LAB 中的变量是大小写敏感的。

MATLAB 中包括一些预先定义的变量。本书用到的有关预定义变量是:

eps	机器精度
realmin	计算机处理的最小浮点(正)数
realmax	计算机处理的最大浮点数
inf	无穷大(定义为 1/0)
NaN	字面意义为"不是一个数(Not a Number)",包括像 0/0 这样的情况
pi	圆周率 π(3.141 59…)
i, j	均为虚数单位的定义 $\sqrt{-1}$,用户可以给 i, j 赋以其他值

利用命令 who 可以得到当前已定义变量的完整列表。用等号(=)给变量赋值。如果语句以分号(;)结束,那么将出现另一个提示符。如果简单地用回车键结束(即按 Enter 键),则变量会重显一次。例如:

```
EDU >> input  voltage = 5;
EDU >> input _ current = 1 e - 3
input _ current =
1.0000e - 003
EDU >>
```

在 MATLAB 中很容易定义复变量,例如:

```
EDU >> s = 9 + j * 5;
```

将产生一个值为 $9+j5$ 的复变量 **s**。

除了 1×1 矩阵,所有其他矩阵都用方括号定义。例如矩阵 $\mathbf{t}=\begin{bmatrix}2 & -1\\3 & 0\end{bmatrix}$ 在 MATLAB 中表示为:

```
EDU >> t = [2  - 1; 3  0];
```

注意,矩阵元素按行输入,行元素之间用空格隔开,行之间用分号(;)隔开。矩阵的算术运算与普通变量相同,例如,$t+t$ 表示为:

```
EDU >> t + t
ans =
  4  - 2
  6    0
```

算术运算包括:

^乘方	\ 左除
* 乘	+ 加
/右(普通)除	- 减

在运算中运算次序很重要。优先次序依次是乘方、乘除、加减。

```
EDU >> x = 1 + 5 * 3

x =

    16
```

起初会对左除的概念感到奇怪，但它在矩阵代数中很有用。例如：

```
EDU >> 1/5

ans =

    0.2000

EDU >> 1 \ 5

ans =

    5

EDU >> 5 \ 1

ans =

    0.2000
```

在可能产生疑问的地方，可以使用括号来帮助理解。

F.3 一些有用的函数

由于篇幅的限制，不能将 MATLAB 中所有函数都列出。一些比较基本的函数包括：

abs(x)	$\lvert x \rvert$	log 10(x)	$\log_{10} x$		
exp(x)	e^x	sin(x)	$\sin x$	asin(x)	$\sin^{-1} x$
sqrt(x)	$\sqrt{x}$	cos(x)	$\cos x$	acos(x)	$\cos^{-1} x$
log(x)	$\ln x$	tan(x)	$\tan x$	atan(x)	$\tan^{-1} x$

有关复变量运算的函数包括：

real(s)	Re{s}
imag(s)	Im{s}
abs(s)	$\sqrt{a^2 + b^2}$，其中 $s = a + jb$
angle(s)	$\tan^{-1}(b/a)$，其中 $s = a + jb$
conj(s)	s 的复共轭

另一个非常有用而又常常被忘记的命令是 help。

偶尔会用到矢量，比如在作图时。这时 linspace(最小，最大，点数)命令的价值是很有用的：

```
EDU >> frequency = linspace(0,10,5)

frequency =

    0   2.5000   5.0000   7.5000   10.0000
```

与 linspace()相应的命令是 logspace()。

F.4 作图

用 MATLAB 作图是非常容易的。例如,执行下列 MATLAB 程序就能得到如图 F.2 所示的结果:

```
EDU >> x = linspace(0,2 * pi,100);
EDU >> y = sin(x);
EDU >> plot(x,y);
EDU >> xlabel(Angle('radians)');
EDU >> ylabel('Sine');
```

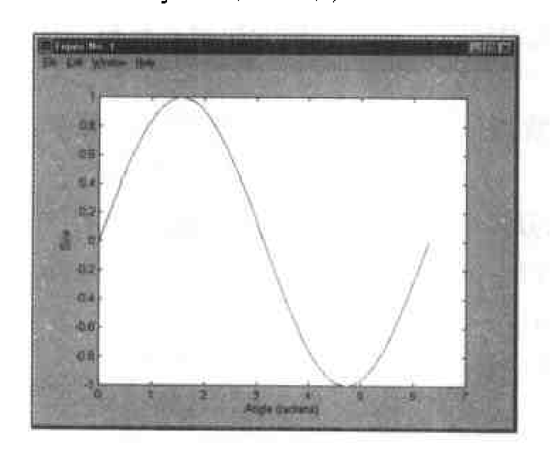


图 F.2　用 MATALB 作图的例子。变量 x 定义为 100 个元素的矢量,变量 y 是自动产生的同样长度的矢量

推荐阅读

D.C. Hanselman and B. Littlefield, *Mastering MATLAB 5: A Comprehensive Tutorial and Reference*, Prentice Hall, 1998. ISBN: 0-13-858366-8.

W. Palm, *MATLAB for Engineering Applications*, McGraw-Hill, 1999. ISBN: 0-07-047330-7.

附录 G　拉普拉斯变换的补充定理

在第 14 章内容的基础上，本附录将给出拉普拉斯变换的几个补充定理，它们一般用于更为复杂的问题。

G.1　周期时间函数的变换

在估计周期时间函数的变换中时移定理非常有用。假定对于 $t>0$，$f(t)$的周期为 T。我们知道，$t<0$ 时 $f(t)$的情况对(单边)拉普拉斯变换没有影响。这样，$f(t)$可以写成：

$$f(t)=f(t-nT),\quad n=0,1,2,\cdots$$

如果定义一个新的时间函数，它只在 $f(t)$的第一个周期不为零：

$$f_1(t)=[u(t)-u(t-T)]f(t)$$

原来的 $f(t)$可以表示为无穷多个这样函数的和，它们之间具有 T 的整数倍时延。即：

$$\begin{aligned}f(t)&=[u(t)-u(t-T)]f(t)+[u(t-T)-u(t-2T)]f(t)\\&\quad+[u(t-2T)-u(t-3T)]f(t)+\cdots\\&=f_1(t)+f_1(t-T)+f_1(t-2T)+\cdots\end{aligned}$$

或

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f_1(t-nT)$$

这个求和的拉氏变换正是变换的求和：

$$\mathbf{F(s)}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}\{f_1(t-nT)\}$$

所以由时移定理得出：

$$\mathbf{F(s)}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nTs}\mathbf{F}_1(\mathbf{s})$$

其中：

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{s})=\mathcal{L}\{f_1(t)\}=\int_{0-}^{T}e^{-st}f(t)\,dt$$

由于 $\mathbf{F(s)}$不是 n 的函数，$\mathbf{F(s)}$可以从求和式中提出，成为：

$$\mathbf{F(s)}=\mathbf{F}_1(\mathbf{s})[1+e^{-Ts}+e^{-2Ts}+\cdots]$$

对方括号中的表达式应用二项式定理，它可简化为 $1/(1-e^{-Ts})$。所以得出结论，周期为 T 的时间函数$f(t)$的拉氏变换为：

$$\mathbf{F(s)}=\frac{\mathbf{F}_1(\mathbf{s})}{1-e^{-Ts}}\tag{G.1}$$

其中：

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{s})=\mathcal{L}\{[u(t)-u(t-T)]f(t)\}\tag{G.2}$$

是这个时间函数第一个周期的变换。

为了演示这个周期函数变换定理的应用，将它用于熟悉的矩形脉冲串，见图 G.1。可以将这个周期函数写成解析式：

$$v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_0[u(t-nT) - u(t-nT-\tau)], t > 0$$

容易算出函数 $\mathbf{V}_1(\mathbf{s})$ 为：

$$\mathbf{V}_1(\mathbf{s}) = V_0\int_{0^-}^{\tau} e^{-st}dt = \frac{V_0}{\mathbf{s}}(1 - e^{-s\tau})$$

为了获得要求的变换，只要除以 $(1 - e^{-sT})$：

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{V_0(1 - e^{-s\tau})}{\mathbf{s}(1 - e^{-sT})} \tag{G.3}$$

应该注意到几个不同定理是怎样出现在式(G.3)中的。分母中的系数 $(1 - e^{-sT})$ 说明函数的周期性，分子上的 $e^{-s\tau}$ 源于负方波的时延，它关断了脉冲。系数 $V_0/\mathbf{s}$ 当然是 $v(t)$ 所涉及的阶跃函数的变换。

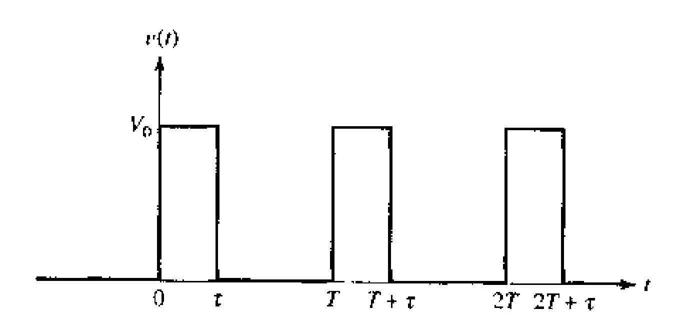


图 G.1 周期性矩形脉冲串，其变换为 $\mathbf{F}(\mathbf{s}) = (V_0/\mathbf{s})(1 - e^{-s\tau})/(1 - e^{-sT})$

例题 G.1 确定图 G.2 所示周期函数的拉普拉斯变换

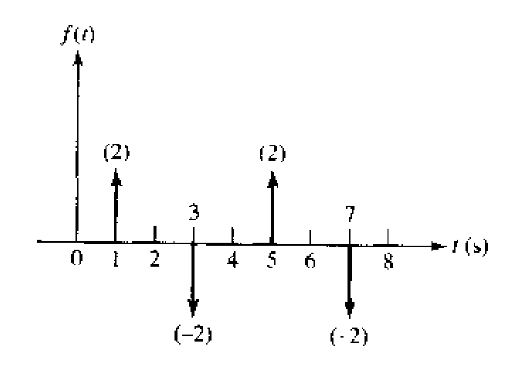


图 G.2 基于单位冲激函数的周期函数

首先写出描写 $f(t)$ 的方程，它是由交替出现的正负冲激函数组成：

$$f(t) = 2\delta(t-1) - 2\delta(t-3) + 2\delta(t-5) - 2\delta(t-7) + \cdots$$

定义一个新的函数 f_1，注意周期 $T = 4$ s：

$$f_1(t) = 2[\delta(t-1) - \delta(t-3)]$$

可以利用表 14.2 中给出的有关时间周期性的运算，求出 $\mathbf{F}(\mathbf{s})$：

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \frac{1}{1 - e^{-T\mathbf{s}}}\mathbf{F}_1(\mathbf{s}) \tag{G.4}$$

其中：

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{s}) = \int_0^T f(t)e^{-\mathbf{s}t}dt = \int_0^4 f_1(t)e^{-\mathbf{s}t}dt$$

有几种方法求出这个积分。最容易的方法是认识到如果积分上限增加到∞，它的值保持不变，这样就可以利用时移定理。所以：

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{s}) = 2[e^{-\mathbf{s}} - e^{-3\mathbf{s}}] \tag{G.5}$$

用式(G.4)中的系数乘以式(G.5)就可以完成本例题：

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \frac{2}{1 - e^{-4\mathbf{s}}}(e^{-\mathbf{s}} - e^{-3\mathbf{s}}) = \frac{2e^{-\mathbf{s}}}{1 + e^{-2\mathbf{s}}}$$

练习

G.1 确定图 G.3 所示周期函数的拉普拉斯变换。

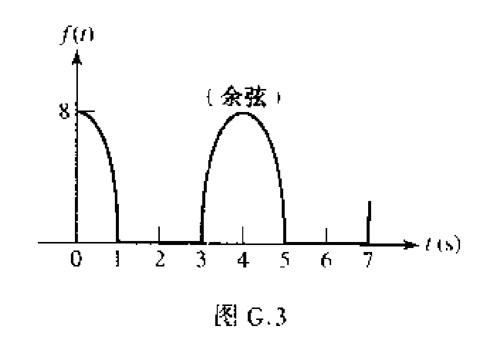


图 G.3

答案：$\left(\frac{8}{\mathbf{s}^2 + \pi^2/4}\right)\frac{\mathbf{s} + (\pi/2)e^{-\mathbf{s}} + (\pi/2)e^{-3\mathbf{s}} - \mathbf{s}e^{-4\mathbf{s}}}{1 - e^{-4\mathbf{s}}}$

G.2 频移

下一个定理建立起 $\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ 和 $\mathbf{F}(\mathbf{s}+a)$ 之间的关系。考虑 $e^{-at}f(t)$ 的拉普拉斯变换：

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t}e^{-at}f(t)\,dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-(\mathbf{s}+a)t}f(t)\,dt$$

仔细观察上面的结果，发现等式右边的积分即为 $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ 的定义，只是用 $(\mathbf{s}+a)$ 取代了 $\mathbf{s}$。由此：

$$e^{-at}f(t) \Leftrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{s} + a) \tag{G.6}$$

可以得出结论，在频域用 $(\mathbf{s}+a)$ 取代 $\mathbf{s}$ 对应于在时域乘以系数 e^{-at}，这就是频移定理。利用它可以立刻求出前面多次用过的指数衰减余弦函数的变换。从已知的余弦函数的变换开始：

$$\mathcal{L}\{\cos \omega_0 t\} = \mathbf{F}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2 + \omega_0^2}$$

$e^{-at}\cos \omega_0 t$ 的变换一定是 $\mathbf{F}(\mathbf{s}+a)$：

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\cos \omega_0 t\} = \mathbf{F}(\mathbf{s} + a) = \frac{\mathbf{s} + a}{(\mathbf{s} + a)^2 + \omega_0^2} \tag{G.7}$$

练习

G.2 求 $\mathcal{L}\{e^{-2t}\sin(5t+0.2\pi)u(t)\}$。

答案:$(0.588\mathbf{s}+4.05)/(\mathbf{s}^2+4\mathbf{s}+29)$

G.3 频域微分

接下来看看 $\mathbf{F(s)}$关于 $\mathbf{s}$ 的导数。结果为:

$$\frac{d}{d\mathbf{s}}\mathbf{F(s)} = \frac{d}{d\mathbf{s}}\int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t}f(t)\,dt = \int_{0^-}^{\infty} -te^{-\mathbf{s}t}f(t)\,dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t}[-tf(t)]\,dt$$

它不过是$[-tf(t)]$的拉普拉斯变换。因此得出结论,在频域中对 $\mathbf{s}$ 求导,结果为在时域中乘以 $-t$,即:

$$-tf(t) \Leftrightarrow \frac{d}{d\mathbf{s}}\mathbf{F(s)} \tag{G.8}$$

假定 $f(t)$是单位斜坡函数 $tu(t)$,其变换已知为 $1/\mathbf{s}^2$。可以利用刚刚得到的频域微分定理来确定 $1/\mathbf{s}^3$ 的反变换为:

$$\frac{d}{d\mathbf{s}}\left(\frac{1}{\mathbf{s}^2}\right) = -\frac{2}{\mathbf{s}^3} \Leftrightarrow -t\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\mathbf{s}^2}\right\} = -t^2u(t)$$

且

$$\frac{t^2u(t)}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\mathbf{s}^3} \tag{G.9}$$

继续同样的过程,求得:

$$\frac{t^3}{3!}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{\mathbf{s}^4} \tag{G.10}$$

一般地,有:

$$\frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{\mathbf{s}^n} \tag{G.11}$$

练习

G.3 求$\mathcal{L}\{t\sin(5t+0.2\pi)u(t)\}$。

答案:$(0.588\mathbf{s}^2+8.09\mathbf{s}-14.69)/(\mathbf{s}^2+25)^2$

G.4 频域积分

$\mathbf{F(s)}$对 $\mathbf{s}$ 积分所产生的对 $f(t)$的影响,可以再次从定义看出:

$$\mathbf{F(s)} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t}f(t)\,dt$$

从 $\mathbf{s}$ 到 ∞ 进行频域积分:

$$\int_{s}^{\infty} \mathbf{F}(\mathbf{s})\,d\mathbf{s} = \int_{s}^{\infty}\left[\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}f(t)\,dt\right]d\mathbf{s}$$

交换积分次序：

$$\int_{s}^{\infty} \mathbf{F}(\mathbf{s})\,d\mathbf{s} = \int_{0^-}^{\infty}\left[\int_{s}^{\infty} e^{-st}d\mathbf{s}\right]f(t)\,dt$$

求出内部的积分：

$$\int_{s}^{\infty} \mathbf{F}(\mathbf{s})\,d\mathbf{s} = \int_{0^-}^{\infty}\left[-\frac{1}{t}e^{-st}\right]_{s}^{\infty}f(t)\,dt = \int_{0^-}^{\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-st}dt$$

因此：

$$\frac{f(t)}{t} \Leftrightarrow \int_{s}^{\infty}\mathbf{F}(\mathbf{s})\,d\mathbf{s} \tag{G.12}$$

例如，已经建立了变换对：

$$\sin \omega_0 t u(t) \Leftrightarrow \frac{\omega_0}{\mathbf{s}^2+\omega_0^2}$$

那么：

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin \omega_0 t u(t)}{t}\right\} = \int_{s}^{\infty}\frac{\omega_0\,d\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2+\omega_0^2} = \tan^{-1}\frac{\mathbf{s}}{\omega_0}\Bigg|_{s}^{\infty}$$

求得：

$$\frac{\sin \omega_0 t u(t)}{t} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{\mathbf{s}}{\omega_0} \tag{G.13}$$

练习

G.4 求$\mathcal{L}\{\sin^2 5tu(t)/t\}$。

答案：$\frac{1}{4}\ln[\mathbf{s}^2+100/\mathbf{s}^2]$

G.5 时间伸缩定理

下面通过求 $f(at)$的值来推导拉普拉斯变换理论中的时间伸缩定理，假定已知$\mathcal{L}\{f(t)\}$。推导过程非常简单：

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}f(at)\,dt = \frac{1}{a}\int_{0^-}^{\infty} e^{-(s/a)\lambda}f(\lambda)\,d\lambda$$

其中使用了变量代换 $at=\lambda$。可以认出最后那个积分就是 $1/a$ 乘以$f(t)$的拉普拉斯变换，只是在变换中 **s** 已经用 $\mathbf{s}/a$ 取代。由此得出：

$$f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{a}\mathbf{F}\left(\frac{\mathbf{s}}{a}\right) \tag{G.14}$$

作为应用时间伸缩定理的一个简单例子，考虑求 1 kHz 余弦波形的变换。假定已经知道 1 rad/s 余弦波的变换为：

$$\cos tu(t) \Leftrightarrow \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2+1}$$

则：

$$\mathcal{L}\{\cos 2\,000\pi t u(t)\} = \frac{1}{2\,000\pi}\frac{s/2\,000\pi}{(s/2\,000\pi)^2+1} = \frac{1}{s^2+(2\,000\pi)^2}$$

练习

G.5 求$\mathcal{L}\{\sin^2 5t u(t)\}$。

答案:$50/[s(s^2+100)]$。

附录 H　题号为单数的习题答案

第 2 章

1. (a) 12 μs;(b) 750 mJ;(c) 1.130 kΩ (d) 3.50 Gbit;(e) 6.5 mm; (f) 13.56 MHz;(g) 39 pA;(h) 49 kΩ; (i) 11.73 pA
3. (a) 131 kW;(b) 1.41 GJ;(c) 1 个电池
5. 假定脉冲具有方波形状,(a) 13.3 GW;(b) 100 mW
7. (a) 40 C;(b) 40.5 C,2.12 s;(c) 24.7 A;(d)见图 P2.7

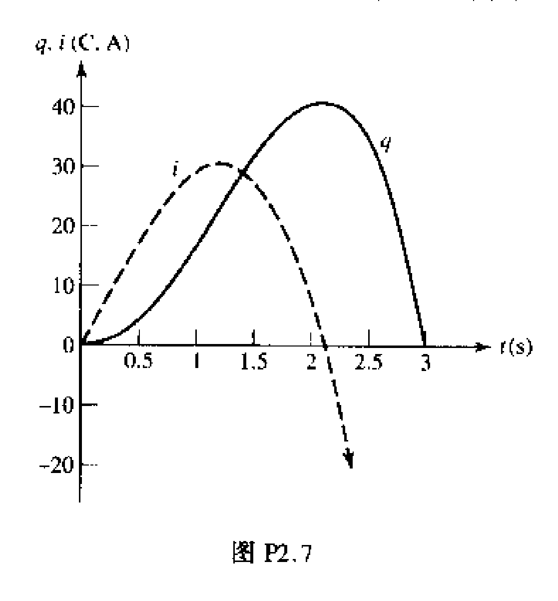


图 P2.7

t(s)	q(C)	i(A)
0	0	0
0.25	1.117	8.875
0.5	4.375	17.00
0.75	9.49	23.6
1	16.00	28.0
1.25	23.2	29.4
1.5	30.4	27.0
1.75	36.4	20.1
2	40.0	8.00
2.25	40.0	-10.125
2.5	34.4	-35.0
2.75	21.7	-67.4
3	0	-108.0

9. (a) 800 mA;(b) 0;(c)见图 P2.9

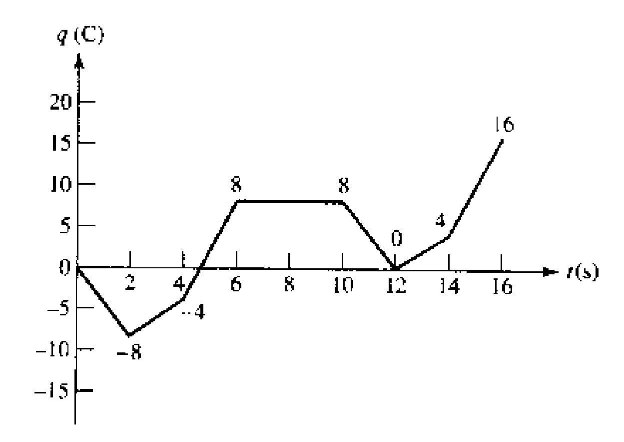


图 P2.9

11. (a) $P_{abs} = \{[6-600t]e^{-100t} \cdot 3te^{-100t}\}|_{t=5\,ms}\,\mu\omega = 16.6\mu\omega$; (b) $E = \int_0^\infty P_{abs}\,dt = 18[1/200^2] - 1\,800[2/200^3] = 0$
13. (a) 3 A; (b) 488 mV; (c) ≈940 mW
15. (a) 45 W; (b) V_s 提供 5 W，受控电流源提供 40 W；(c)是。按照能量守恒理应如此：提供的能量必须等于吸收的能量。因为电路中吸收功率的速率等于提供功率的速率，它的意思就是功率守恒
17. (a) 57.6 W; (b) 4.8 A
19. (a) 43.54 mW; (b) 230.9 mW; (c) 253.0 mW
21. (a) 319.1 mΩ; (b) 156.7 mΩ; (c) 1.411 W
23. (a)见图 P2.23(a); (b) 2.128 mS, 469.9 Ω (c)见图 P2.23 (b)

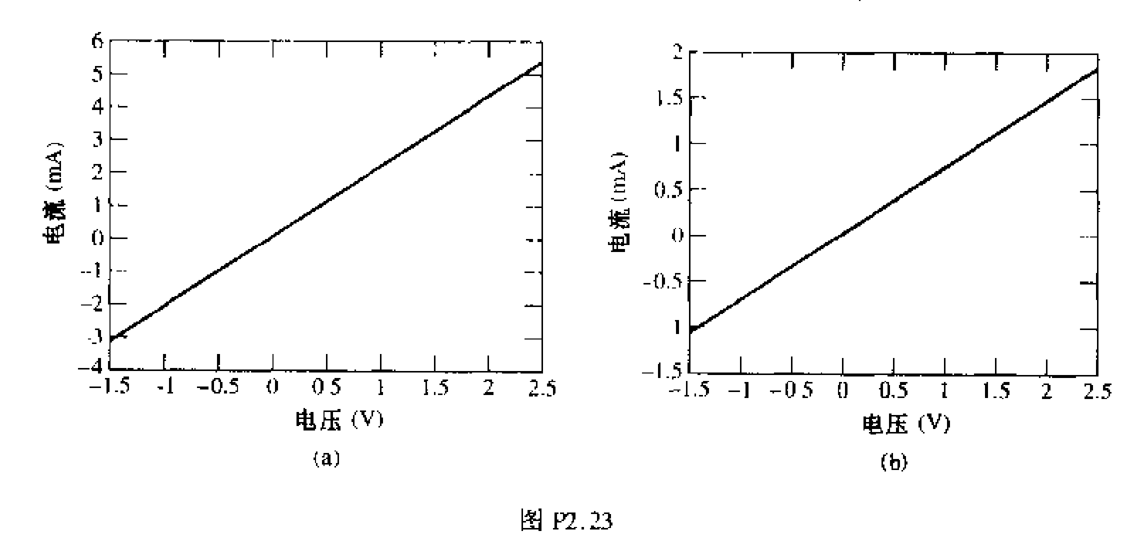


图 P2.23

25. $v_{out} = -0.01\cos 1\,000t$ V
27. 6 620 ft
29. 许多个可能的答案之一是：选择尽可能短的 #28 线；要求的长度是 153.1 ft

第 3 章

1. 6 个节点
3. (a)4 个节点；(b)5 条支路；(c)路径，是；环路，不是
5. (a) $i_x = 3$ A; (b) $i_x = -3$ A; (c) $i_x = 0$
7. $i_x = 1$ A; $i_y = 5$ A
9. (a) $i_y = 2.5$ A, $v_x = 25$ V; (b) $i_y = 600$ mA, $i_x = 300$ mA; (c)不可能存在这样的值
11. (a) 125 mA; (b) −1 A
13. (a) $v_1 = v_2 = 60$ V, $i_2 = 3$ A, $v_3 = 15$ V, $v_4 = 45$ V, $v_5 = 45$ V, $i_5 = 9$ A, $i_4 = 15$ A, $i_3 = 24$ A, $i_1 = 27$ A; (b) $p_1 = -1.62$ kW, $p_2 = 180$ W, $p_3 = 360$ W, $p_4 = 405$ W, $\sum p_{abs} = 0$
15. (a) $v_{13} = 8$ V, $v_{23} = -4$ V, $v_{24} = -12$ V; (b) $v_{13} = 14$ V, $v_{23} = 2$ V, $v_{24} = -6$ V; (c) $v_{13} = 2$ V, $v_{23} = -10$ V, $v_{24} = -18$ V

17. (a) 25 W;(b) 24 W;(c) 16 W;(d)18.37 W;(e) −600 W

19. ($a \sim d$)无解

21. 10.43 V

23. (a) 2.43 kΩ;(b) $R=0$;(c)见图 P3.23

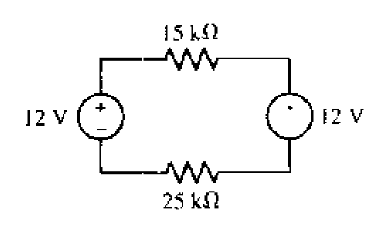


图 P3.33

25. $v_o(t) = -248.5 \cos 5t$ mV

27. (a) $p_{5A} = -1.389$ kW, $p_{10mS} = 771.6$ W; $p_{40mS} = 3.086$ kW, $p_{dependent} = -2.469$ kW;(b) $P_{5A} = -775.9$ W, $P_{10mS} = 240.8$ W, $P_{40mS} = 963.1$ W, $P_{dependent} = -428.1$ W

29. $p_{6\Omega} = 150$ W, $p_{12\Omega} = 75$ W, $p_{4\Omega} = 225$ W, $p_{7A} = -210$ W, $p_{6A} = -240$ W, $\sum = 0$

31. (a) −50 mA; (b) 50 V

33. 638 mW

35. 1.45×10^{-3} mile

37. (a) 1 A; (b)右边的电流源标注错误,应为 3.5 A,此时得到答案为 9 A

39. (a) 10 mA;(b) 3.8 A

41. (a) 571.4 mA; (b) 0 A;(c) 71.43 mA

43. −515 V

45. 1 kΩ

47. (a)两个并联的 10 kΩ 电阻;(b)见图 P3.47(a);(c)见图 P3.47(b)

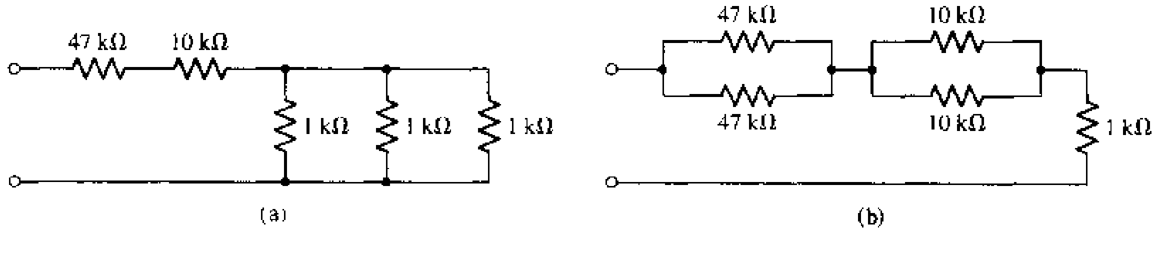


图 P3.47

49. 5.5 kΩ

51. (a) 60 Ω;(b) 213.3 Ω;(c) 51.79 Ω

53. $p_{2.5} = 250$ W; $p_{30} = 187.5$ W; $p_6 = 337.5$ W, $p_5 = 180$ W, $p_{20} = 45$ W

55. (a) 850 μs;(b) 135.9 mS

57. 一个可能的解:用一根比例题 2.3 中更细的线,比如 # 28。以适当的形状绕制一个合适长度的线圈与 1 Ω 电阻串联。65.3 Ω/1 000 ft,9 Ω 对应 137.8 ft。应当从结构的顶部刮去绝缘层,增加一根线,一端接到线圈上,另一端固定,这样导线可以从线圈的一

端旋转到另一端

59. 1.1 mA, $R_1 = R_2 = 10\ \text{k}\Omega$

61. $i_x = 139\ \mu\text{A}$, $p_{15} = 868\ \mu\text{W}$

63. 18.12 μW

65. (a) $V_sR_2(R_3+R_4)/[R_1(R_2+R_3+R_4)+R_2(R_3+R_4)]$;(b) $V_sR_1(R_2+R_3+R_4)/$[den.];(c) $V_sR_2/$[den.]

67. (a) 42 A; (b) 11.90 V; (c)两者都是 0.238

69. $V_sR_3R_5/[R_2(R_3+R_4+R_5)+R_3(R_4+R_5)]$

71. $56.02\cos(10t+90°)$V

第4章

1. (a) −8.39 V;(b) 32

3. 171.6 V

5. (a) v_1 = 58.5 V, v_2 = 64.4 V;(b) 543 W

7. −28 V

9. −8.086 V

11. 63.1 V

13. 148.1 V,178.3 W

15. −1.636 A

17. −1.909 V,4.333 V,4.091 V,5 V

19. 133.2 W

21. 2.79 A

23. 提供 −384.1 W(实际为吸收功率)

25. 1.077 mA, −1.197 mA, −478.8 μA,239.3 μA

27. (a) −5.69 kΩ;(b)R 的值是惟一的,没有其他值可以满足所要求的一组自恰方程

29. (a) 333 μA;(b) 333 μA;(c)为一个电阻值。可以想像为 1 V 电源所看到的电阻

31. 2 mA;5 mW;4 V: −6 mV; 1 000i_3;4.5 mW; 6 V:9 mW;0.5 i_2: −5.62 mW

33. −3.654 W

35. 1.035 V,右边为正

37. 4.5 Ω

39. $v_x = 0$; $v_x = 96$ V; $v_x = -38.46$ V

41. $i_1 = 3.550$ A, $i_2 = 1.687$ A

43. $i_3 = 120.6$ mA, $i_{10} = 4.694$ A

45. 定义支路电流为向右流动或向下流动:677.4 mA, −322.6 mA,1 A,242 mA,181.7 mA, 1.424 A

47. 350 mA

49. 2.653 mA,3.204 mA, −3.796 mA, −1 mA.2 V 电源"+"端向下,7 mA 电源箭头向下

51. −4 mA

53. －15.85 V

55. 5.5 V，3 V，3.5 V，1.5 V，1.25 A，－250 mA，－2.25 A，750 mA

57. 一个可能的解，见图 P4.57。可以用 8 个并联的 1 Ω 电阻为 1 组，5 个这样的组串联构成 625 mΩ 电阻

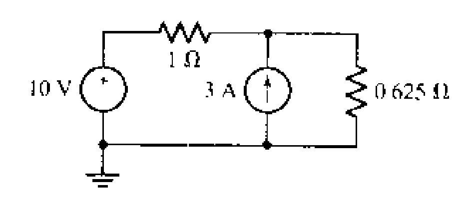
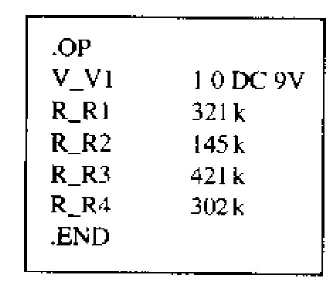


图 P4.57

59. 一个可能的解见图 P4.59。用来仿真电路的网络表为：



```
.OP
V_V1    1 0 DC 9V
R_R1    321 k
R_R2    145 k
R_R3    421 k
R_R4    302 k
.END
```

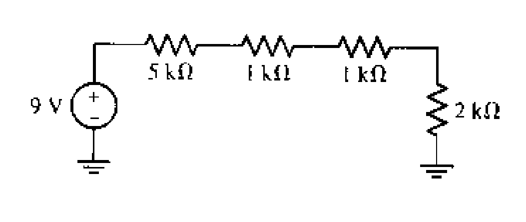


图 P4.59

第 5 章

1. $f(x)=1+x$ 定义误差为$[e^x-f(x)]/e^x$。从下表可见当 $x=0.1$ 时，误差大约为 0.5%，之后则快速增加

x	e^x	$f(x)$	误差
0.001	1.001 00	1.001	5×10^{-7}
0.005	1.005 01	1.005	1×10^{-5}
0.01	1.010 05	1.01	5×10^{-5}
0.05	1.051 27	1.05	1×10^{-3}
0.1	1.105 17	1.1	5×10^{-3}
0.5	1.648 72	1.5	9×10^{-2}
1.0	2.718 28	2.0	2×10^{-1}
5.0	148.4 13	6.0	1

3. 10.33 V

5. (a) 1.3 A；(b) 1 A；60 W；200 Ω；18 W；100 V；－130 W；50 Ω；32 W；0.5 A；20 W

7. (a) 200 V；(b) －142.9 V

9. 956.6 μW

11. 不可能分别确定每个源对消耗功率的贡献，因为叠加原理仅适用于线性量。2 Ω 电阻消耗的总功率为 76.15 mW

13. 17.65 V

15. $V_x=2.455$ V，$V_x'=546$ mV，$V_x''=1.909$ V；$V_x'+V_x''=2.455\text{ V}=V_x$

17. 10.46 mV
19. 33.07 μW
21. 12.77 mW
23. 764 nA
25. 7.25 A,箭头向下;2 Ω
27. 参见表 5.1,求得 1.584 V,1.67 Ω(提示:试着先用实验点数据画出曲线)
29. 为明确起见,应给出参考端:从左边开始,8.515 V 和 2.01 MΩ;从右边开始,5.99 V 和 2.253 MΩ
31. (a)75 V 电源与 12.5 Ω 电阻串联;(b) 72 W; (c) 112.5 W
33. (a)69.3 V 电源与 7.32 Ω 电阻串联;(b) 59.5 V 电源与 16.59 Ω 电阻串联
35. 0 A 电源与 10.64 Ω 电阻并联
37. 83.49 V,8.523 kΩ
39. (a) ~ ∞ A ‖ ~0 Ω,使得 IR = 12 V;(b) ~ ∞ V 电源与 ~ ∞ Ω 电阻串联,使得 V/R = 2 A。由于电阻值的原因,两个转换过程都不切合实际
41. 23.73 V,100 mA,237.3 Ω
43. 47.62 Ω
45. $667(1+0.021\,5r_\pi) \parallel 2\times10^6$ Ω
47. 6.329 W
49. (a) 15 Ω,65 V;(b) 282 W
51. (a) 200 V;(b) 125 W;(c) 80 Ω
53. 在使用最大功率传输定理时必须记住,是传输功率"到"某处。因此,将电池两端短路,$R_{load}=0$,尽管这时产生最大电流流出电池,但是 $i^2R_{load}=0$。随着 R_{load} 的增大,i^2R_{load} 也从零开始增大。可是在另一个极端($R_{load}=\infty$),没有电流流出,传输到负载的功率同样为零。当 $R_{load}=R_{TH}$,传输功率最大。
55. 8 kΩ
57. 1.225 Ω, 540 mΩ,4.9 Ω
59. 9.90 Ω.
61. 5.45 V,1.046 Ω
63. 3.25 V,15.83 Ω

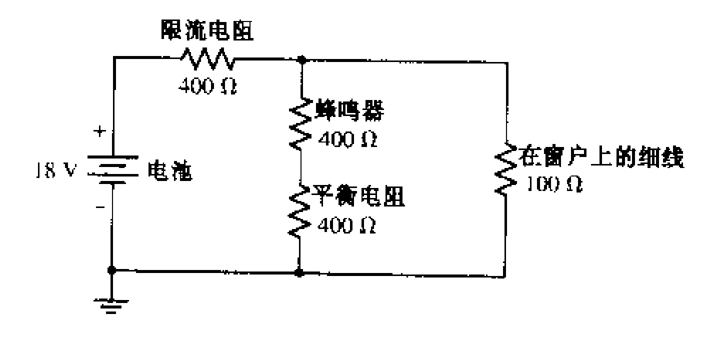


图 P5.71

65. 这个网络可以化简,但不能化简为一个电阻

67. 223.9 mA

69. 1.429 Ω

71. 一个可能的解:见图 P5.71

73. 一个可能的解:一个 9 V 电池串联两个 100 Ω 电阻、一个 10 Ω 电阻和发光二极管

第 6 章

1. −2.2 V

3. 一个可能的解:$R_1 = 1\ \text{k}\Omega$, $R_f = 134\ \text{k}\Omega$ 的反相放大器

5. 21.1 V

7. $-2(2+2\sin 3t)$; −5.648 V

9. 一个可能的解:$R_1 = 100\ \Omega$, $R_f = 23.69\ \text{k}\Omega$

11. (a)两个都可;(b) $R_1 = \infty$, $R_A = 10\ \text{k}\Omega$, $R_B = 10\ \text{k}\Omega$, $R_2 = 10\ \text{k}\Omega$;(c) 两个都可

13. 929 mV

15. 4.209 V

17. $V_{out} = -R_f\left[\frac{V_1}{R_1}+\frac{V_2}{R_2}+\frac{V_3}{R_3}+\cdots\right]$

19. 一个可能的解:$V_s = 0.75$ V, $R_1 = 70\ \text{k}\Omega$

21. 一个可能的解见图 P6.21

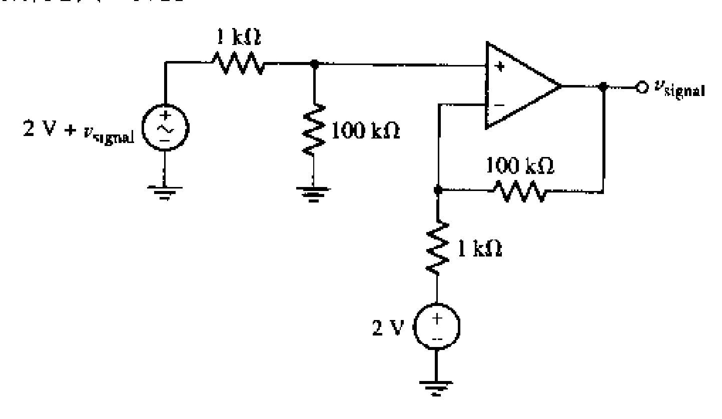


图 P6.21

23. $V_{out} = \left(\frac{R_3}{R_2+R_3}\right)\left(\frac{R_f}{R_1}+1\right)V_2 - V_1\frac{R_f}{R_1}$

25. 33.3 Ω

27. 忽略任何输入失调电压,(a) 0 W;(b) 46.45 pW;(c) 185.6 aW;(d) 135 mW

29. (a) $8\sin 2t$ nV;(b) $80\sin 2t$ nV

31. 忽略任何输入失调参量,(a) 0 W;(b) 46.45 pW;(c) 290.3 μW

33. 用光标测量斜率,PSpice 得到的增益是 −99.95;按理想模型得到的增益为 −100,两者符合得很好

35. (a) μA741: −92 μA,54 μV;(b) LM324:43 μV,333 μV;(c) LF411 : −35 μV,43 μV

37. μA741: $R_{TH} = 54.9\ \Omega$; LF411: $R_{TH} = 38.46\ \Omega$. 当供电电压在 ±2 到 ±15 之间时,没有观

察到实际改变

39.(a)理想上,输出电压的范围是 −15 V 到 +15 V,但是实际运算放大器的输出会稍小一些;(b)200,假定 ±15 V 之内运放不会饱和

41. 一个可能的解是将图 P6.21 的电路做少许修改

第 7 章

1.(a) 6.954 pF;(b) 17 kV;(c) 71.9

3.一个可能的解:像图 P7.3 那样制造一组梳状结构的可旋转平行半导体片。如果使用空气介质,盘片之间间隔为 100 μm,盘片半径为 1.5 cm,那么用 16 个盘片就能达到要求

5.(a) 33.42 mV;(b) 33.42 mV;(c) 50.13 mV

7.(a) $-0.12\sin 400t$ mA;(b) 6.4 μJ;(c) $400(1-e^{-100t})$ V;(d) $500-400e^{-100t}$ V

9.(a) 2 kΩ;(b)证明(略)

11.(a)见图 P7.11;(b) 40^- ms;(c) 20^+,40^+ ms;(d) 2.5 J

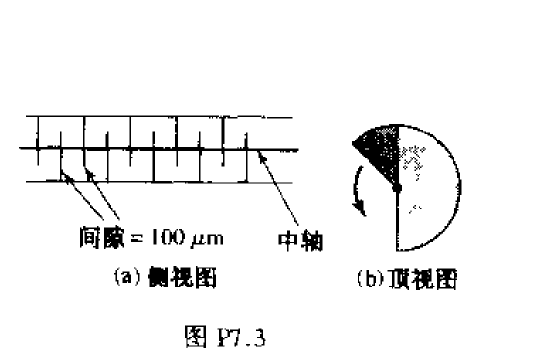


图 P7.3

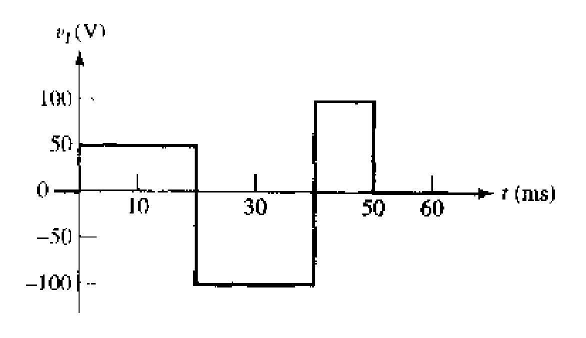


图 P7.11

13.(a)$4t^2+4t$ V;(b) $4t+4t^2+5$ A

15.(a) 2 A;(b) 5.63 J;(c) 1 A

17.(a) 100 V;(b) 60 V

19.(a) 20.5 mJ;(b) 9.16 J;(c) 3.28 J

21.(a) 4.286 μF

23.(a) 见图 P7.23; (b) 3.6 V

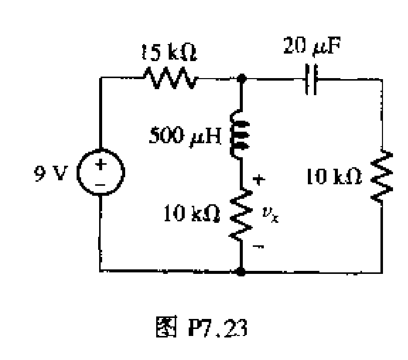


图 P7.23

25. 85.21 nF

27. 136 nF

29.(a) 3 H;(b) N 亨

31. 1.625 nH

33.(a) 11.38 Ω;(b)11.38 H;(c) 8.79 F

35.(a)(4 个 C 串联) ‖ C ‖ C;(b)1 个 C 与(3 个 C 并联)串联;(c) [(2 个 C 串联) ‖ $4C$] 与 $2C$ 串联

37.(a) $-6.4e^{-80t}$ mA;(b) $80e^{-80t}-60$ V;(c) $20e^{-80t}+60$ V

39. $v_L(t)=2.4\sin 10^3 t$ V, $v_C(t)=9.2$ V

41.(a) $v_0(t)=-RC\dfrac{dv_i}{dt}$;(b) $v_0'+\dfrac{1+A}{RC}v_0+Av_i'=0$

43.(a) $10.005\sin 10t+0.0005(1-\cos 10t)$ V;(b) $10\sin 10t$ V

45.(a) $v_{out}(t)=-\frac{R}{L}\int_0^t v_s dt'$;(b)实际上基于电容的运放更常见,一定的电容值更容易获得

47.见图 P7.47

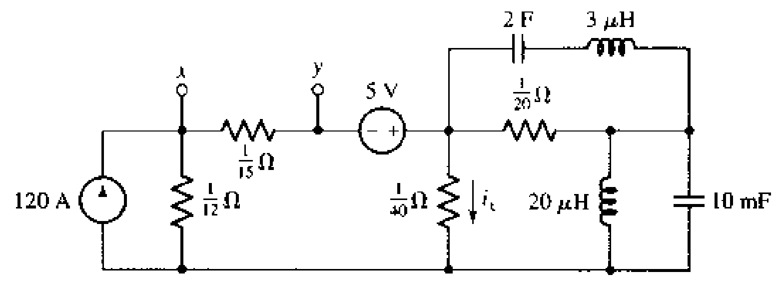


图 P7.47

49.(a)见图 P7.49

51. 221 μJ

53. 100 Ω,31.83 mH

55. 558.3 pJ

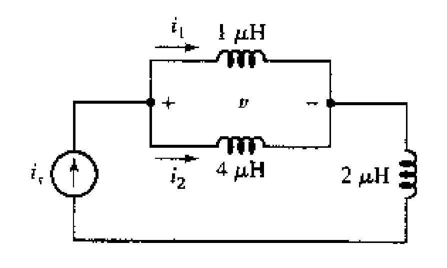


图 P7.49

第8章

1. (a)$2e^{-400t}$ A;(b) 36.6 mA;(c) 1.733 ms

3. (a) 1.289 mA;(b) 7.71 mA

5. (a) $i_L(0^-)=4$ A, $v(0^-)=0$;(b) $i_L(0^+)=4$ A, $v(0^+)=-48$ V

7. (a) 2.30,4.61, 6.91;(b) $t/\tau=2$

9. 见图 P8.9

11. 6.285 kΩ,这是满足条件的最小值

13.(a) $192e^{-125t}$ V;(b) 18.42 ms

15. $v_c(t<0)=6.667$ V; $v_c(t>0)=6.667e^{-25t}$ V; $i_c(t>0)=333e^{-25t}$ μA

17.(a) 2.68 A;(b) 1.889 A

19.(a) 85 V;(b) 28.94 V;(c) $t=34.61$ μs

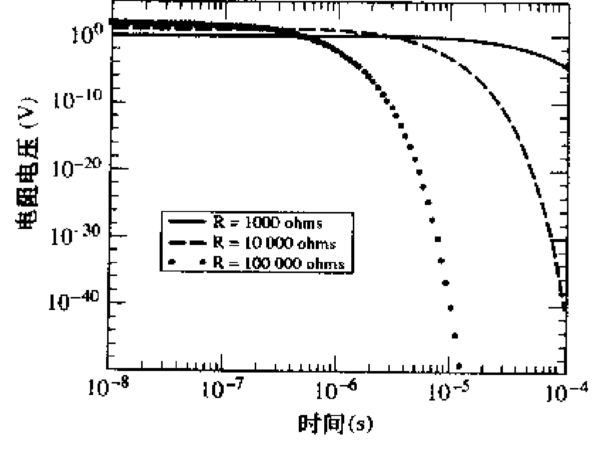


图 P8.9

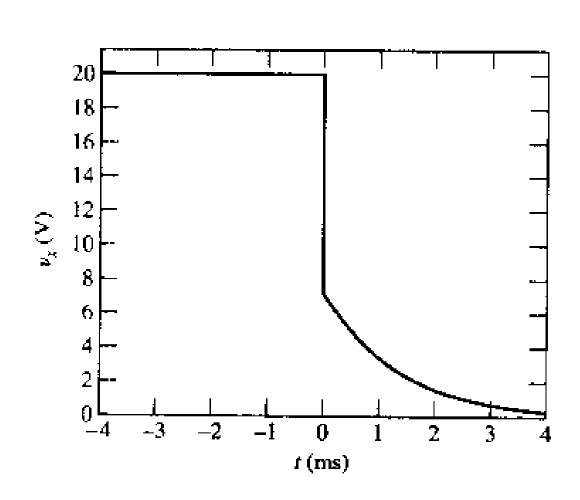


图 P8.21

21. (a) $400e^{-750t}$ mA, $t>0$; (b) 见图 P8.21

23. $i_1(-0.1)=5$ A; $i_1(0.03)=2.285$ A, $i_1(0.1)=1.852$ A; $i_1(t)=2.5e^{-3t}$ A, $t>0$

25. (a) 30 A; (b) 1.667 ms; (c) $30e^{-600t}$ A; (d) $-1.44e^{-600t}$ kV; (e) $i_1=24e^{-600t}-14$ A, $i_2=6e^{-600t}+14$A; (f) $49+36=85$, 得证

27. (a) 290 mA; (b) 200 mA; (c) 50 mA; (d) 277 mA; (e) 33.5 mA

29. (a) -60 mA; (b) $12e^{-100t}$ mA

31. (a) $20e^{-250\,000t}$ V; (b) 9.447 V

33. (a) 87.6 V; (b) $87.6e^{-2\,540t}$ V

35. (a) 100, 0, 和 0 V; (b) 100, 0 和 100 V; (c) 80 ms; (d) $100e^{-12.5t}$ V; (e) $5e^{-12.5t}$ mA; (f) $-20e^{-12.5t}+80$ V 和 $-80e^{-12.5t}+80$ V; $(64+16)+20=100$ mJ

37. (a) 20 mA; (b) $20e^{-10^4t}-2e^{-5\times10^3t}$ mA

39. 1 A, 600 mA, -400 mA, 600 mA

41. (a) 1; (b) 12; (c) 1.472

43. 2.5, 3, 2.5, 2, -2, 单位均为安培

45. $v(1)=9.8$V; (b)2 Ω 电阻

47. (a)2 A; (b) 3.427 A; (c) 3.953 A

49. $4(1-e^{-1\,000t})u(t)$ A; (b) $(100-80e^{-1\,000t})u(t)$ V

51. (a) 10 A; (b) $8+2e^{-10t}$ A

53. (a) 80 mA; (b) $80(1-e^{-25t})$ mA; (c) $160-80e^{-25t}$ mA; (d) $16\cos 50t+32\sin 50t-16e^{-25t}$ mA

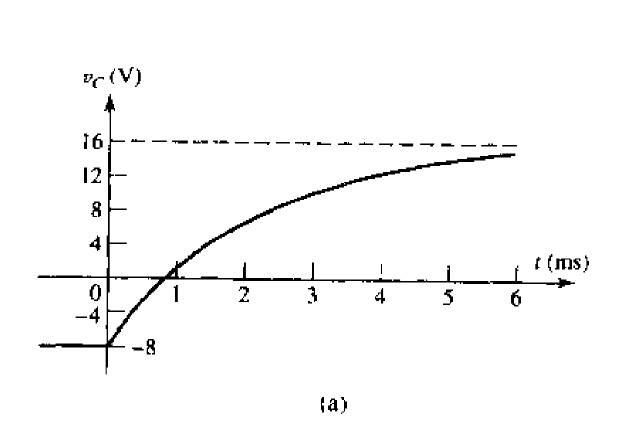
55. (a) -15 A; (b) -15 A; (c) 5 A; (d) $5-20e^{-40t}$ A

57. (a) 3 A; (b) 4 A; (c) 3.449 A

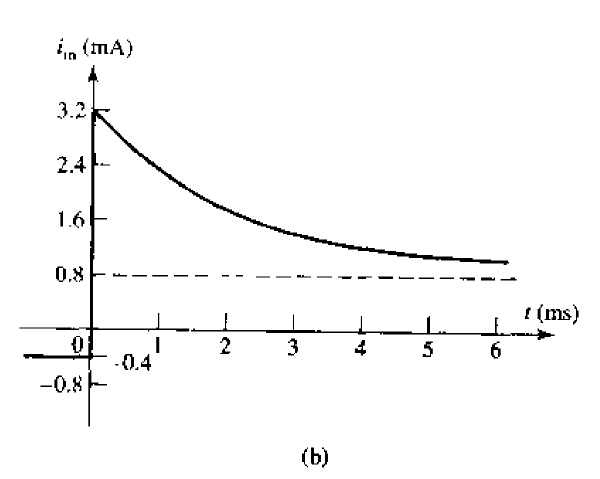
59. $4.615(1-e^{-260t})u(t)$

61. (a) 电压脉冲: DC = 0, T1 = 0, T2 = 2.5, V1 = 600, V2 = 2 100; (b) 电流脉冲: DC = 0, T1 = 1, T2 = 2.5, I1 = 0, I2 = 9

63. $2.5u(-t)+(10+7.5e^{-10^5t})u(t)$ mA



(a)



(b)

图 P8.65

65. (a) $-8u(-t)+(16-24e^{-500t})u(t)$ V,见图 P8.65;(b) $-0.4u(t)+(0.8+2.4e^{-500t})u(t)$ mA,见图 P8.65

67. 6.32 V 和 15.66 V

69. (a) 80 V;(b) $80+160e^{-10^5 t}$ V;(c) 80 V;(d) $80-32e^{-20\times10^3 t}$ V

71. 693 μs

73. (a) 241 mV;(b) 3.11 mW;(c) 15 μJ

75. $1.25\ e^{-10\,000t}u(t)$ V

77. (a) $-200(1+e^{-20\times10^5 t})u(t)$ mV

79.将运动传感器与一个常闭开关串联,然后与一个报警电路相串联。接着将一个 200 nF 电容与报警电路并联

第9章

1. 4.95 Ω,1.443 H,14.43 mF

3.(a) 100 aF;(b) 1 MΩ;(c) 5 Gs^{-1};(d) $-5\times10^9\pm j70.71\times10^{12}\ \text{s}^{-1}$;(e) 7.071×10^{-5}

5. (a) 127.3 Hz;(b) $9.54\times10^5\ \text{s}^{-1}$;(c)95 400

7. (a) $-20e^{-10t}+60e^{-40t}$ V, $t>0$;(b)见图 P9.7

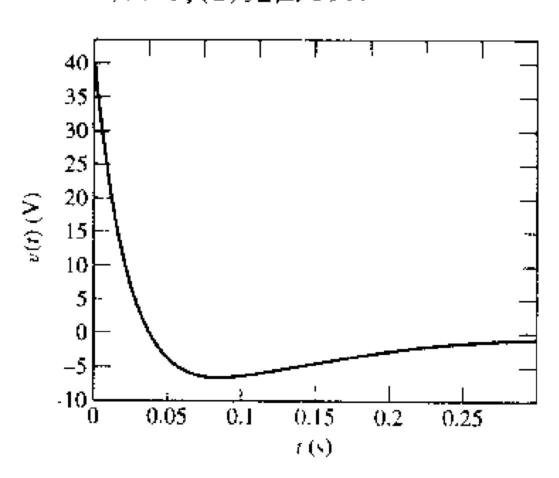


图 P9.7

9. $2.025e^{-50t}-0.025e^{-450t}$ A, $t>0$

11. $166.5e^{-8t}-41.63e^{-2t}$ V

13. (a) 50 V;(b) 2 A;(c) $75e^{-6\times10^3 t}-25e^{-2\times10^3 t}$ V;(d) 275 μs;(e) 2.3 ms

15. $R<498.8\ \Omega$

17. (a) 8 mH;(b) 931 mA;(c) 24.0 ms

19. 498.8 Ω

21. $e^{-4\,000t}(-2\cos 2\,000t+4\sin 2\,000t)$A

23. (a) $e^{-5\,000t}(200\cos 10^4 t+100\sin 10^4 t)$ V;(b) $10-e^{-5\,000t}(10\cos 10^4 t-7.5\sin 10^4 t)$ mA

25. $600\ e^{-100t}\sin 1\,000t$ μA

27. 10.38 Ω,2.145 s

29. (a) $v_C(0^-)=0$, $i_L(0^-)=4$ A;(b) $i_L(t)=e^{-t}(4\cos 5t+0.8\sin 5t)$, $t_s\approx4.5$ s

31. $e^{-4t}(10\cos 2t+20\sin 2t)$ A

33. $v_C(t)=[2.25e^{-200t}-0.25e^{-6\,000t}]u(t)+2u(-t)$ V，见图 P9.33

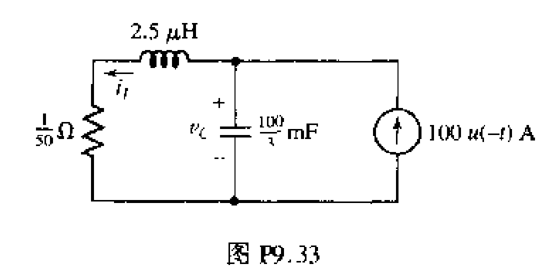


图 P9.33

35. (a) $500e^{-10t}$ mA；(b) $100e^{-10t}$ V

37. 4.7 kV

39. 1.5 Ω，28.1 J

41. $[10-e^{-4t}(20\sin 2t+10\cos 2t)]u(t)$ A

43. $e^{-4\,000t}(2\cos 2\,000t-4\sin 2\,000t)$A

45. $12-e^{-t}(t+2)$ V

47. (a) $2.5e^{-500t}-22.5e^{-1\,500t}$mA；(b) $-2.5e^{-5\,000t}+22.5e^{-1\,500t}$mA

49. (a) 30 V；(b) 51 V；(c) 44 V；(d) 44 V

51. (a) 0；(b) 0；(c) 923 mA；(d) −1.027 A

53. 943 Ω

55. −31.96 V

57. (a) $\frac{v_C}{R}+C\frac{dv_C}{dt}=0, v_C(0^-)=1.2$ V；(b) 一个可能的解：见图 P9.57

59. (a) $\frac{di}{dt}=-4i, i(0^-)=2$ A；(b) 见图 P9.59

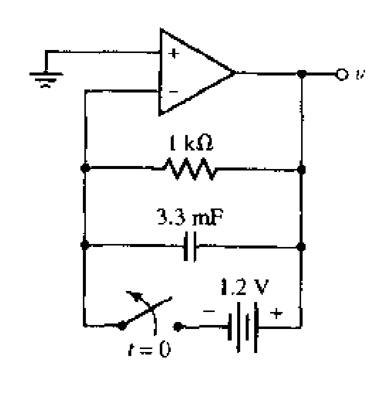


图 P9.57

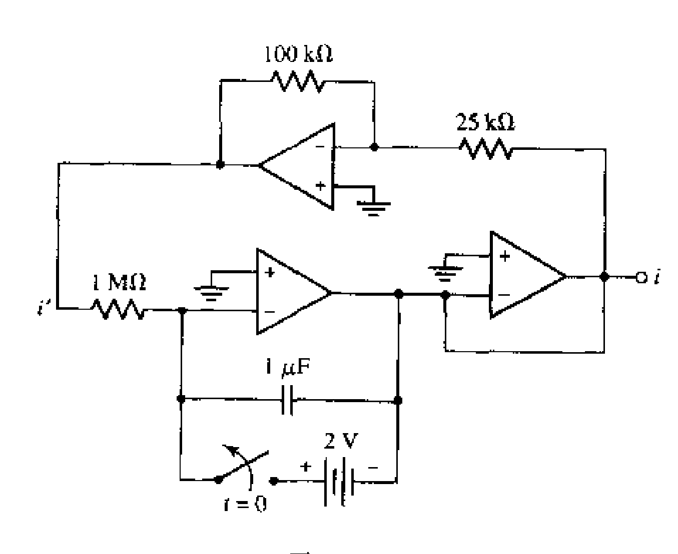


图 P9.59

第 10 章

1. (a) $8.5\sin(291t+325°)$;(b) $8.5\cos(291t-125°)$;(c) $-4.88\cos 291t+6.96\sin 291t$
3. (a)幅度 $f(t)=58.3$,幅度 $g(t)=57.0$;(b) 133.8°
5. 38.73 V,85.2 Mrad/s,171.2°
7. (a) $-6\cos(2\pi60t+9°)$比 $6\cos(2\pi60t-9°)$滞后 162°;(b)如果两个角都用正角表示,$-\cos(t-100°)$比 $\cos(t-100°)$滞后 180°;(c)如果两个角都用正角表示,$\sin t$ 比 $-\sin t$ 滞后 180°;(d) $7\,000\cos(t-\pi)$ 比 $9\cos(t-3.14°)$滞后 177°
9. (a) 800 mV;(b) 771 mV;(c) 814 mV;(d) 805 mV
11. $671\cos(500t-26.6°)$ mA
13. (a) 25.8 μs;(b) 10.12 和 25.8 μs;(c) 15.71 和 25.8 μs
15. $5.88\cos(500t-61.9°)$ mA
17. $1.414\cos(400t-45°)+1.342\cos(200t-26.6°)$ A
19. (a) $V_m\cos\omega t=Ri+\frac{1}{C}\int i\,dt$, $-\omega V_m\sin\omega t=R\frac{di}{dt}+i/C$; (b) $\left[\frac{\omega CV_m}{\sqrt{1+\omega^2C^2R^2}}\right]\cos\left[\omega t+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega CR}\right)\right]$
21. (a) $16.81-j5.861$;(b) $-j204$;(c) $0.310\,9+j1.712$
23. (a) $18.72\angle-16.41°$;(b) $3.205\angle 46.10°$
25. (a) $39.39\angle-76.20°$;(b) $4.050\angle-69.78°$;(c) $2.397+j8.945$;(d) $0.668\,7+j0.206\,9$
27. $65.12e^{j(10t+125.62°)}$ A
29. (a) $12\angle 20°$ A;(b) $7.616\angle 113.2°$ A;(c) $3.910\angle-108.4°$;(d) -64.95 V;(e) 53.75 V
31. 34.96 mV
33. (a) $18.33\cos(5\,000t-40.89°)$;(b) $75.88\cos(5\,000t+79.48°)$ V;(c) $57.70\cos(5\,000t+118.70°)$ V
35. $9.892\cos(400t+78.76°)$ V
37. (a) $478.0+j175.65$ Ω;(b) $587.6+j119.8$ Ω
39. $212.4\angle-45.82°$ mA
41. (a) $196.1\angle-11.31°$ Ω;(b) $C=72.45$ μF;(c) $\omega=11.25$ 和 444.3 rad/s
43. $R_1=3.221$ Ω, $R_2=4.335$ Ω
45. (a) *ab* 开路: $2.378-j1.730$ Ω;(b) *ab* 短路: $2.440-j1.636$ Ω
47. $500-j500$ mS, 2Ω ∥ 2H
49. (a) 100 krad/s;(b) 100 krad/s;(c) 102.1 krad/s;(d) 52.2 和 133.0 krad/s
51. (a) 8 Ω,250 μF;(b) 5 Ω,100 μF
53. $34.4\angle 23.6°$ V
55. $70.7\cos(10^3t-45°)$ V
57. $1.213\cos(100t-76.0°)$ A
59. (a) $-j\omega C_1R_f$;(b) $-j\omega C_1R_f/(1+j\omega C_fR_f)$
61. 2.235 kW

63. $C=2.18$ F

65. (a) $\theta=\tan^{-1}(g_m/\omega C_\mu)-$

$\tan^{-1}\left\{\frac{\omega R_B r_\pi C_\pi R_s R'_L+[r_\pi R_B-R_s(r_\pi+R_B)]/\omega C_\mu}{(g_m R'_L R_s+R_s+R'_L)r_\pi R_B+(r_\pi+R_B)R'_L R_s+\omega R_B r_\pi C_\pi R_s/\omega C_\mu}\right\}$，其中 $R'_L=R_C \parallel R_L$；(b) 见图 P10.65；(c) 10^5 Hz

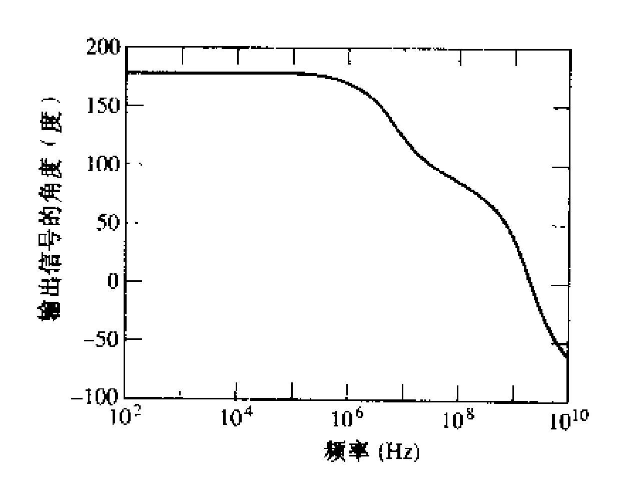


图 P10.65

67. $\mathbf{Y}_{in}=j\omega/(1-2\omega^2+j\omega)$ S，当 $\omega=1$ rad/s 时，$\mathbf{Y}_{in}=1/(1+j)$S，由 2 Ω ∥ 2 H 构成

69. $R_N=2.5\ \Omega$，$L_N=1.25$ H，$\mathbf{I}_N=894.4\angle -63.43$ mA

71. $\mathbf{V}_{TH}=158.1\angle 108.4°$ V，$\mathbf{Z}_{TH}=j150\ \Omega$

73. 定义左边为正参考端，$v_C(t)=88.23\cos(t-107.1°)$ mV

75. 一个解见图 P10.75

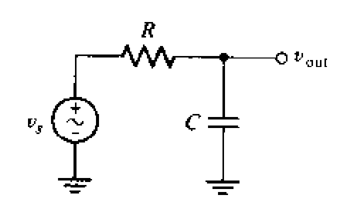


图 P10.75

77. (a)电压源 404 $\mathbf{V}_s$/505 与 80.2 Ω 电阻、电容串联；(b) $\left|\frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_s}\right|=\frac{405}{505}\frac{1}{\sqrt{1+2.532\times10^{-12}\omega^2}}$；见图 P10.77

79. $v_1(t)=3.227\cos(10^4t-83.62°)+2.006\times10^{-4}\cos(10^5t+127.1°)$V，$v_2(t)=31.13\cos(10^4t-179.3°)+115.7\cos(10^5t-92.91°)$ mV

81. (a) $57.3\angle -76.8°$ A，$25.6\angle -140.2°$ A，$51.2\angle -50.2°$ A，$143.1\angle 13.24°$V，$51.2\angle -140.2°$ V，$51.2\angle -140.2°$ V；(b) 见图 P10.81

83. $\mathbf{I}_1=5\angle -40.5°$ A，$\mathbf{I}_2=7\angle 27.7°$ A，见图 P10.83

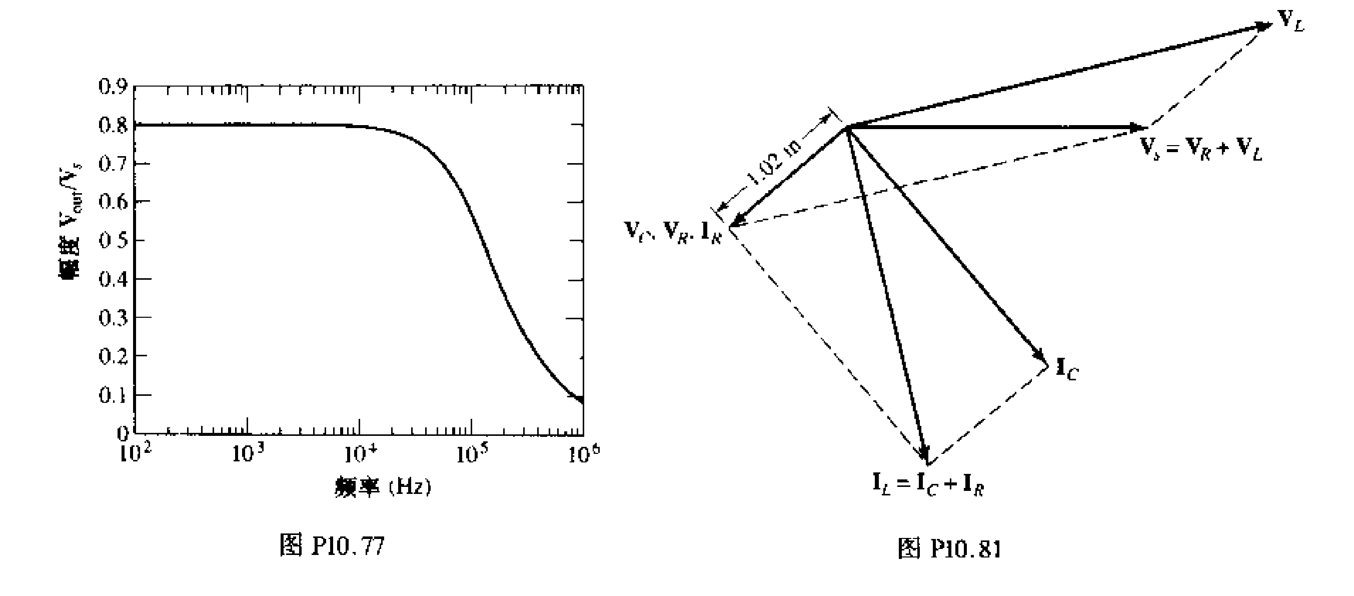


图 P10.77

图 P10.81

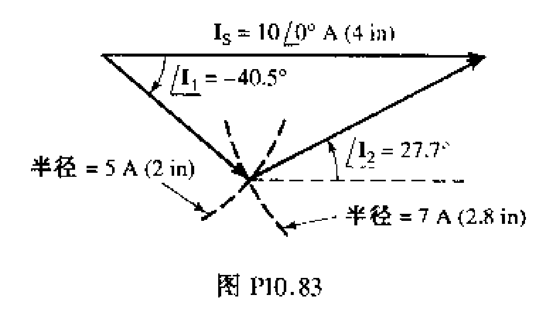


图 P10.83

第 11 章

1. $p_S = 116.9$ W, $p_R = 136.6$ W, $p_C = -19.69$ W

3. (a) -8 W; (b) -554 mW; (c) 422 mW

5. $p_S = -23.51$ W, $p_8 = 4.307$ W, $p_3 = 32.12$ W, $p_C = -12.91$ W

7. $P_{10,\text{gen}} = 93.20$ W, $P_{j10,\text{gen}} = 245.1$ W, $P_{8,\text{abs}} = 161.5$ W, $P_{5,\text{abs}} = 176.8$ W

9. $P_{j10} = P_{-j5} = 0$, $P_{10} = 312.5$ W, $P_{50} = 62.50$ W, $P_{j50} = -375.0$ W

11. (a) $R_{TH} + j0$; (b) $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_{TH}^* = R_{TH} - jX_{TH}$; (c) $\mathbf{Z}_L = R_L - jX_{TH}$; (d) $R_L = \sqrt{R_{TH}^2 + (X_{TH} + X_L)^2}$;
(e) $R_L = \sqrt{R_{TH}^2 + X_{TH}^2} = |\mathbf{Z}_{TH}|$

13. $R_L = 16.13\ \Omega$, $P_L = 119.4$ W

15. (a) $28.8 - j38.4\ \Omega$; (b) 250 W

17. $8.94\ \Omega$, 38.6 W

19. (a) 1.667 A, 5 A, 5.093 A; (b) 41.67 A^2, 66.67 A^2, 32 A^2

21. (a) 12.59 V rms; (b) 12.25 V rms; (c) 10 V

23. (a) 8.5; (b) 12.42

25. (a) 42.7; (b) 25.0; (c) 7.32; (d) 55.2; (e) 80.2 W

27. (a)30 V; (b) $V_{eff,1}$ = 34.64 V, $V_{eff,2}$ = 34.16 V

29. 9.879 V

31. (a)655 W; (b)320 W; (c)335 W; (d)800 VA; (e)320 VA; (f)568 VA; (g)0.590 滞后

33. AP_A = 1.229 kVA, AP_B = 773 VA, AP_C = 865 VA, AP_D = 865 VA, AP_S = 3.022 kVA

35. (a)0.872 滞后; (b)692 μF

37. 79.48 μF

39. (a)70 kW; (b)81.36 kVA; (c)0.860 4 滞后

41. − 824 + j294, 0 − j765, 588 + j0, 0 + j471, 235 + j0 VA

43. (a)375 − j331 VA; (b)500 − j441 VA; (c)567 − j500 VA

45. (a)15.62 A rms; (b) 0.919 滞后; (c)3.30 + j1.417 kVA

47. (a) 5.087 A rms; (b) 1.219 kW; (c) − 1.219 kW; (d) 1.219 kWA; (e) 1.219 kVAR; (f) j1.219 kVA

49. (a)$\mathbf{S}_{20}$ = 37.83 kVA, $\mathbf{S}_{250}$ = 483.3 kVA, $\mathbf{S}_C = 49.57\angle -90°$ kVA, $\mathbf{S}_L = 77.34\angle 90°$ kVA; (b) $\mathbf{S}_{source} = 521.9\angle 3.049$ kVA; (c)无; (d)521.2 kW; (e)27.76 kVAR(感性)

第 12 章

1. V_{bc} = − 9.3 V, V_{eb} = − 0.7 V, V_{cb} = 9.3 V

3. (a) $V_p\angle 0°$, $V_p\angle -60°$, $V_p\angle -120°$, $V_p\angle -180°$, $V_p\angle -240°$, $V_p\angle -300°$; (b) $V_p\angle 0°$, $Vp\angle 60°$, $V_p\angle 120°$, $V_p\angle 180°$, $V_p\angle 240°$, $V_p\angle 300°$

5. (a)$56.67\angle -11.53°$ V; (b)$212.2\angle 57°$ V

7. (a)22.8, 0 A; (b)34.4, 22.8, 12 A

9. (a)91.5 μF; (b)6.68 kVA

11. (a)1.042 kW; (b)$81.29\angle 143.9°$ V

13. (a)1.182 Ω; (b)$282\angle 20.77°$ V; (c)$450.3\angle 172.6°$ V(d)15.82 − j6.000 kVA

15. $6.803\angle -96.14°$ A rms

17. (a)$2.97\angle 16.99°$ A; (b)52.8 W; (c)1.991 kW; (d)0.956 超前

19. (a)0.894 滞后; (b)22.2 μF; (c) + 541 VAR

21. (a)$346.4\angle -30°$ V; (b)48 − j24 Ω; (c)$11.18\angle 86.57°$ A rms

23. (a)5.447 A rms; (b)3.162 A rms; (c)236.8 V rms

25. (a)$40.15\angle 45°$ A rms; (b)$60.47\angle -170.1°$ A rms; (c)$36.00\angle -30°$ A rms

27. (a)$242\angle 30°$ V; (b)$24.0\angle -0.964°$ A; (c)$41.6\angle -31.0°$ A

29. (a)$33.9\angle 45.2°$ A; (b)$53.0\angle -157.0°$ A; (c)$25.2\angle -7.64°$ A; (d)6.10 + j3.34 kVA

31. (a)1.493 kW, 不需颠倒; (b)2.153 kW, 不需颠倒; (c)615.8 W, 不需颠倒

33. − 23.37 W(所以接点需要颠倒)

35. A:861.9 W, B:861.9 W, C:861.9 W

37. (a)见图 P12.37(a)(b)见图 P12.37(b)

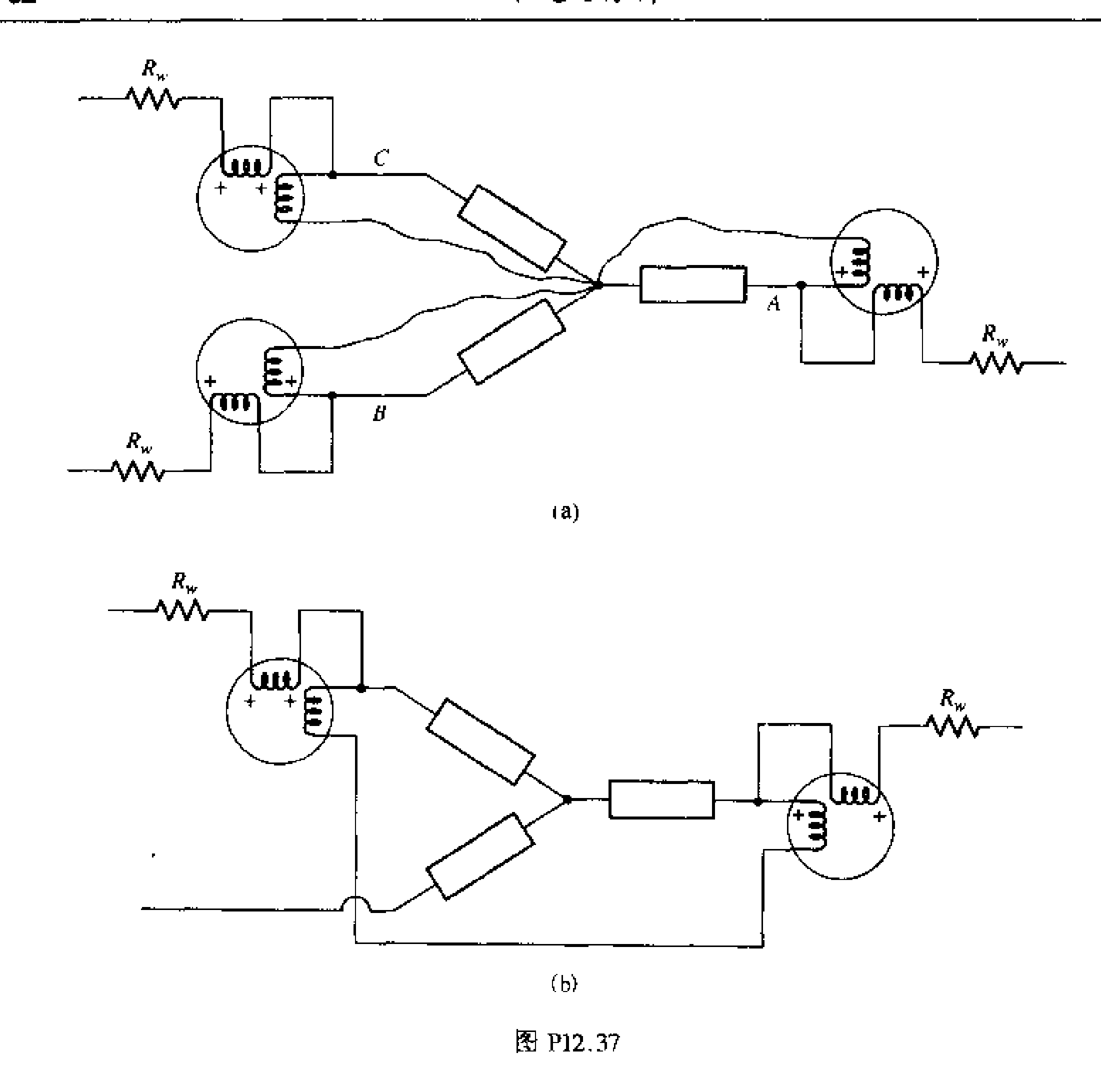


图 P12.37

第13章

1. (a)1 和 4,2 和 3;(b)3 和 1,2 和 4;(c)1 和 3,2 和 4

3. (a) − 10.40 W;(b) $P_{50} = 5.63$, $P_{2000} = 4.77$ W;(c)均为 0;(d)0

5. (a) $\mathbf{V}_{oc} = 145.5\underline{/-166.0°}$ V, $\mathbf{Z}_{th} = 105.9 + j76.5\ \Omega$;(b)25.0 W

7. $30t/(t^2 + 0.01)^2\ \mu A$

9. (a) $100 = (6+5s)\mathbf{I}_1 - 2s\mathbf{I}_2 - 6\mathbf{I}_3$, $-2s\mathbf{I}_1 + (4+5s)\mathbf{I}_2 - 4s\mathbf{I}_3 = 0$, $-6\mathbf{I}_1 - 4s\mathbf{I}_2 + (11+6s)\mathbf{I}_3 = 0$;(b) − 5 A

11. (a) $\mathbf{Z}_{in}(j\omega) = 0.02(1\ 000 - \omega^2 + j150\omega)/(10 + j\omega)$;(b)见图 P13.11;(c) $3\underline{/22.62°}\ \Omega$

13. (a) $27.34\cos(10t + 69.44°)$ V;(b) $23.64\cos(10t + 66.04°)$ V;(c) $P_{S1} = 9.601$ W; $P_{S2} = 5.760$ W

15. $1.260\underline{/-60.2°}$ A

17. $2.16k^2/(k^4 - 1.82k^2 + 1.188)$ W

19. (a)0.842 W;(b)0.262 W;(c)1.104 W

21. (a) $1.661\underline{/41.6°}$;(b) $0.392\underline{/-79.7°}$;(c) $2.22\underline{/0.051°}$

23. $\mathbf{V}_2 = -12\ 000\pi k/[-360\pi + j(25 - 1\ 152\pi^2 + 1\ 152\pi^2 k^2)]$,见图 P13.23

25. (a) 1 H;(b)600 mH;(c)875 mH;(d)750 mH

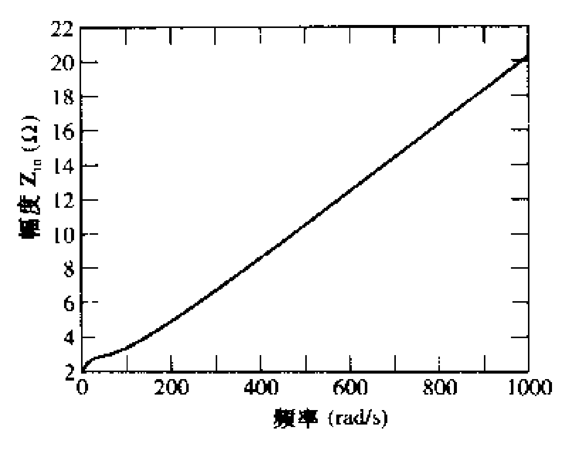


图 P13.11

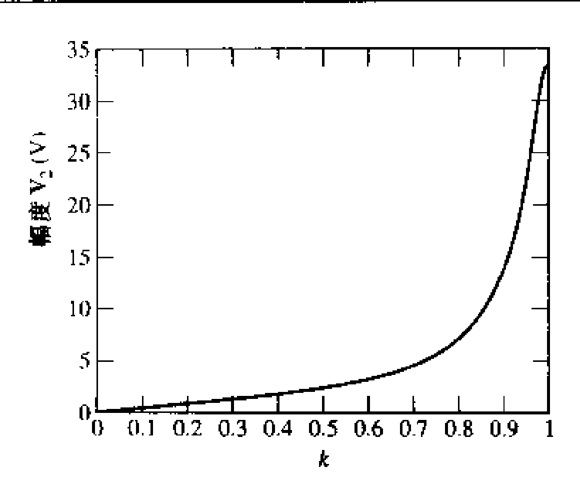


图 P13.23

27. 两种情况下,(a)4 mH;(b)444 μH;(c)对匹配点 1.33 mH,其他情况 210.5 μH
29. $\mathbf{Z}(j\omega) = j10\omega/(2.055 + j\omega)$ Ω
31. (a)24.98 + j0.624 6 Ω;(b)j24.39 Ω;(c) − j25.46 Ω
33. (a)20 + j31.42 Ω;(b)20.21 + j33.97 Ω;(c)20.69 + j39.70 Ω;(d)20.85 + j41.64 Ω
35. 191.4 W,73.2 W,61.0 W,549 W
37. (a)8 W;(b)2.082 W(负反馈);(c)5 kW(正反馈)
39. $a = 5, b = 0.894\,4$
41. −9.231 V
43. 4.819 V
45. 见图 P13.45
47. (a)抱歉,没有办法知道这一点。(b)50 岁;(c)也许 19.95 美元,但是这可能取决于答案(a)以及你的道德水准……
49. 为完成设计还需要更多一些信息:电机是 Δ 还是 Y 形接法的?假定它是 Y 形接法,需要一个三相 Y-Y 形变压器,使得每一相的匝数比都等于 1.92(初级:次级)

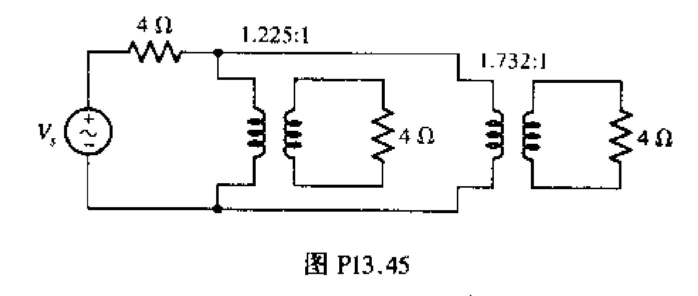


图 P13.45

第 14 章

1. (a)0;(b)$s_1 = j9\ s^{-1}, s_2 = -j9\ s^{-1}$;(c)$s = -8\ s^{-1}$;(d)$s_1 = 1\,000 + j1\,000\ s^{-1}, s_2 = 1\,000 - j1\,000\ s^{-1}$;(e)$s_1 = +j\ s^{-1}, s_2 = -j\ s^{-1}$
3. (a)$8.06e^{-3t}\cos(15t - 60.3°)$ A;(b)$8.06e^{-3t}\cos(15t - 60.3°)$ A;(c) −4.13 A;(d) −4.13 A
5. (a)$29.52\angle -129.8°$ V;(b)$36.06e^{-2t}\cos(50t - 56.13°)$ V;(c) −18.91 V;(d) $-2 + j50\ s^{-1}$;(e) $-2 - j50\ s^{-1}$

7. (a)$353.6\angle -105^\circ$ mA; (b)$353.6e^{-2t}\cos(10t-105^\circ)$ A

9. (a)$185.1\angle -47.6^\circ$ V; (b)$185.1e^{-3t}\cos(4t-47.6^\circ)$ V

11. K/s

13. (a)$5/s$; (b)$3/(s+8)$; (c)0; (d)K/s

15. (a)$5/s-5s^{-1}e^{-2s}$ V; (b)$5/s-5s^{-1}e^{-2s}$ A

17. (a)$\frac{8}{s+2}[1-e^{-3(s+2)}]$; (b)$\frac{8}{s-2}[1-e^{-3(s-2)}]$; (c)$\frac{8}{s+2}[1-e^{-3(s+2)}]$

19. (a)$e^{-3t}u(t)$; (b)$\delta(t)$; (c)$tu(t)$; (d)$275\delta(t)$; (e)$u(t)$

21. (a)$0.046\,55+j0.111\,7$; (b)$-0.176\,9+j0.204\,8$; (c)$(0.424+j6.458)\times10^{-3}$

23. (a)$s^{-1}(e^{-2s}-e^{-5s})$; (b)$4s^{-1}e^{-2s}$; (c)$4(s+3)^{-1}e^{-2s-6}$; (d)$4e^{-2s}$; (e)2.939

25. (a)$s^{-1}(e^{-s}-e^{-3s})$; (b)$2s^{-1}e^{-4s}$; (c)$3(s+2)^{-1}e^{-4s-8}$; (d)$3e^{-5s}$; (e)$-4e^{-s}$

27. 2.5 mA

29. (a)$\delta(t)+u(t)+2e^{-t}u(t)$; (b)$\delta(t-2)+2\delta(t-1)+\delta(t)$; (c)$2e^{-1}\delta(t-1)$; (d)$\delta(t-1)+\delta(t-5)$

31. (a)$5e^{-t}u(t)$; (b)$(5e^{-t}-2e^{-4t})u(t)$; (c)$6(e^{-t}-e^{-4t})u(t)$; (d)$6(4e^{-4t}-e^{-t})u(t)$; (e)$18\delta(t)+6(e^{-t}-16e^{-4t})u(t)$

33. (a)$(2-3e^{-t})u(t)$; (b)$2\delta(t)+4e^{-3t}u(t)$; (c)$3\delta(t-0.8)$; (d)$3[e^{-2t}-e^{-6t}]u(t)$; (e)$[3te^{-2t}-0.75e^{-2t}+0.75e^{-6t}]u(t)$

35. (a)$\delta(t)+0.667[1-e^{-3t}]u(t)$; (b)$f(t)=\{0.25+0.5t-0.25[\cos 2t+\sin 2t]\}u(t)$

37. $[1.875-5.542e^{-4t/3}]u(t)$

39. (a)50 V 和 50 V; (b)$0.1v_C'+0.3v_C=2$; (c)$\frac{50s+20}{s(s+3)}$, $\frac{1}{3}(20+130e^{-3t})u(t)$ V

41. $\frac{12+40s}{s(20s+3)}$, $(4-2e^{0.15t})u(t)$

43. $[6e^{-t}-1]u(t)$

45. (a)-600 mA; (b)$40=100i_C+50\int_{0^-}^{\infty} i_C\,dt+100$; (c)$600e^{-0.5t}u(t)$ mA

47. (a)$\frac{1}{4}$ Ω, 1 F, $\frac{1}{3}$ H; (b)$(75e^{-3t}-12.5e^{-t}-62.5e^{-5t}u(t)$ V

49. $4u(t)+i_C+10\int_{0^-}^{\infty} i_C\,dt+4[i_C-0.5\delta(t)]=0$, $\frac{2s-4}{5s+10}$, $0.4\delta(t)-1.6e^{-2t}u(t)$

51. (a)5, 不确定; (b)0, 不确定; (c)1, 不确定

53. (a)5; (b)$f(0^+)=0$, $f(\infty)=5$(极点 OK); (c)$f(0^+)=0$, $f(\infty)=3$(无极点)

55. (a)$f(0^+)=8$, $f(\infty)=0$; (b)∞, -0.5; (c)8, 不确定; (d)0, 0

第 15 章

1. 见图 P15.1

3. (a)$\frac{20s^2+11\,000s+200\,000}{s^2+700s+100\,000}$; (b)$-10.95$ Ω; (c)$4.709+j6.585$ Ω; (d)$\frac{200+s}{20s}$ S; (e)$\frac{1\,000+2s}{2\,000}$ S; (f)用基本代数证明

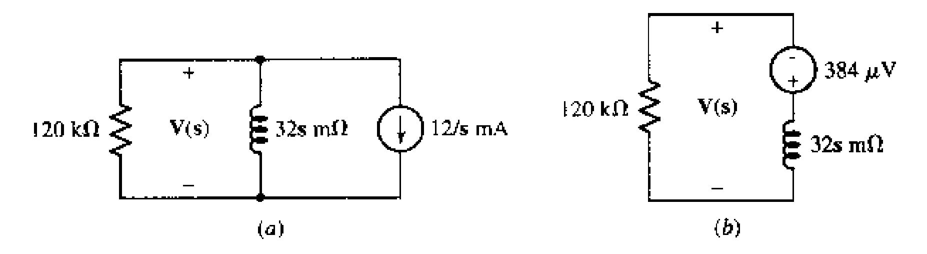


图 P15.1

5.(a)$(16s^2+50s+4\,000)/(s^2+80s)$ Ω;(b)0.158 4 − j4.67 Ω;(c)$6.85\angle -114.3^\circ$ Ω;(d) 909 mΩ;(e)1 Ω

7.$(r_\pi R_B R'_L C_\mu s + r_\pi R_B)/\{r_\pi R_B R'_L C_\mu C_\pi s^2 + [g_m R'_L r_\pi R_B C_\mu + (C_\mu + C_\pi) r_\pi R_B + (r_\pi + R_B) R'_L C_\mu] s + r_\pi + R_B\}$,且 $R'_L \equiv R_C \parallel R_L$

9. $4.545e^{-0.275\,5t}$ μA

11.(a)$\mathbf{I}_x = (34.64s - 130.72)/[(s^2+4s+104)(s^2+12s+40)]$; (b) $-91.5e^{-2t}\cos 10t + 341.5e^{-2t}\sin 10t + 91.5e^{-6t}\cos 2t - 1\,525e^{-6t}\sin 2t$ mA, $t>0$

13.$[0.627e^{-0.609t} - 0.791e^{-0.546t}\cos(0.336t + 80.8^\circ)]u(t)$ A

15.(a)$200s(s^2+9s+12)/(2s^4+17s^3+90s^2+185s+250)$; (b)$[-24.9e^{-1.25t}\cos 1.85t - 82.6e^{-1.25t}\sin 1.85t + 125e^{-3t}\cos 4t + 137e^{-3t}\sin 4t]u(t)$ V

17.对于 $t>0$, $i_1(t) = -30.8\cos 2t + 270\sin 2t$ A, $i_2(t) = 6.6\times 10^{-5}\delta(t) - 0.842e^{-142.9t}\cos 742.3t + 0.20e^{-142.9t}\sin 742.3t - 30.8\cos 2t + 270\sin 2t$ A

19.$p(t) = [-4.67\times 10^{-2}e^{-142.9t}\cos 742.3t - 1.622e^{-142.9t}\sin 742.3t + 4.24\cos 2t + 4.24\times 10^{-3}\sin 2t]^2$W, $t>0$

21.(a)用(3/s) A 电源替换原电路中的电流源,1 Ω 阻抗替换 1 Ω 电阻,5 Ω 阻抗替换 5 Ω 电阻,$(10^{-3}s)$ Ω 阻抗替换 1 mH 电感,(500/s) Ω 阻抗替换 2 mF 电容;(b)$\mathbf{V}_{TH} = 3\,000(0.5s+2\,500)/[s(s^2+5\,000s+5\times 10^5)]$V,$\mathbf{Z}_{TH} = 1\,000(0.5s+2\,500)/(s^2+5\,000s+5\times 10^5)$Ω;(c)$[2.5 - 2.5e^{-2\,750t}\cosh 2\,136t - 2.516e^{-2\,750t}\sinh 2\,136t]u(t)$ A

23.$v_1(t) = [3.50 + 3.80\times 10^{-3}e^{-1.66\times 10^5 t} - 0.862e^{-739t} - 2.65e^{-0.340t}]u(t)$, $v_2(t) = [3.50 - 1.37\times 10^{-3}e^{-1.66\times 10^5 t} + 0.309e^{-739t} - 2.65e^{-0.340t}]u(t)$

25.(a)$\mathbf{I}_N(s) = 443.8(5s-3)/[(s^3 + 1.67\times 10^5 s^2 + 1.23\times 10^8 s + 4.18\times 10^7)s]$, $\mathbf{Z}_N(s) = 4.7\times 10^4)(s^3 + 1.67\times 10^5 s^2 + 1.23\times 10^8 s + 4.18\times 10^7)/(s^3 + 1.67\times 10^5 s^2 + 1.23\times 10^8 s + 2.09\times 10^7)$;(b)200.5μA

27.(a)$65\,s/(13\times 10^{-3}s^2 + 83s^2 + 13\times 10^3 s + 83\times 10^8)$;(b) $-0.764\,4e^{-6.385\times 10^3 t}u(t) + 0.774\cos(10^3 t - 8.907^\circ)u(t)$A;(c)$0.774\cos(10^3 t - 8.907^\circ)u(t)$ A

29.(a)零点位于 −25 和 −12.5,极点位于 0 和 −16.7,(b)零点位于 −9.09 和 -10^5,极点位于 -1.55×10^5 和 −3.23

31.(a)$5(s+1)(s+4)/[6(s+1.5)]$ Ω;(b)极点:−1.5,±∞;零点:−1,$-4s^{-1}$

33.见图 P15.33

35.见图 P15.35

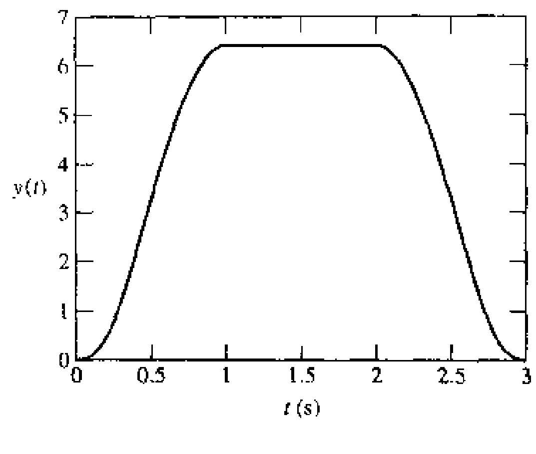


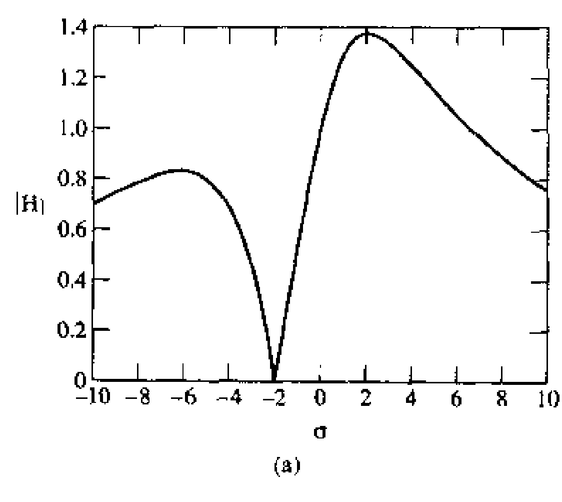
图 P15.33

图 P15.35

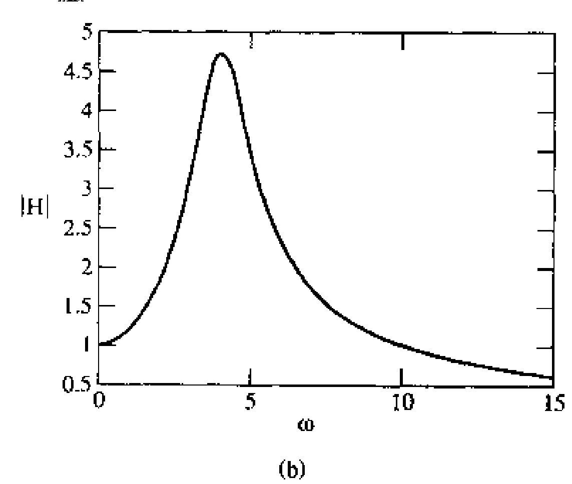
37.(a)$15[1-e^{-2s}]/s$,$15[u(t)-u(t-2)]$V;(b)$15[1-e^{-2s}]/s^2$,$15[tu(t)-(t-2)u(t-2)]$V;(c)$15[1-2e^{-2s}+e^{-4s}]s^{-2}$,$15[tu(t)-2(t-2)u(t-2)+(t-4)u(t-4)](d)15[1/(s^2+9)-e^{-2s}/(s^2+9)]$,$5\sin 3tu(t)-5\sin(3t-6)u(t-2)$V



39.(a)见图 P15.39a;(b)见图 P15.39b;(c)$|\mathbf{H}|_{max}=4.729$



(a)



(b)

图 P15.39

41.(a)零点位于 $\mathbf{s}=-2.5$ 和 -3,极点位于 $s=\pm j4$;(b)4.69,10;(c)15.15 cm;(d)见图 P15.41

43.(a)$\mathbf{H}(\mathbf{s})=(10\mathbf{s}^3+30\mathbf{s}^2-10\mathbf{s}-30)/(\mathbf{s}^2+6\mathbf{s}+13)$;(b)$\mathbf{H}(0)=-2.308$,$\mathbf{H}(\infty)=\infty$;(c)1:$2.236\angle 116.6^\circ$,$-1$:$2.236\angle 63.43^\circ$,$-3$:$3.606\angle 33.69^\circ$,$-3-j2$:$5\angle 53.13^\circ$,$-3+j2$:$3\angle 0^\circ$

45.(a)-2,$-1\pm j2$;(b)$100(2+j\omega)/[(5-\omega^2)+j2\omega]$;(c)$100\sqrt{\dfrac{\omega^2+4}{\omega^4-6\omega^2+25}}$;(d)见图 P15.45;(e) 2.016 rad/s

47.(a)$-5e^{-6t}$A(所有 t);(b)$[-5e^{-6t}+e^{-2t}(5\cos 4t+3\sin 4t)]u(t)$A

49.(a)-1.729 和 $-24.1s^{-1}$;(b)$10-0.886e^{-1.729t}-2.11e^{-24.1t}$A,$t>0$

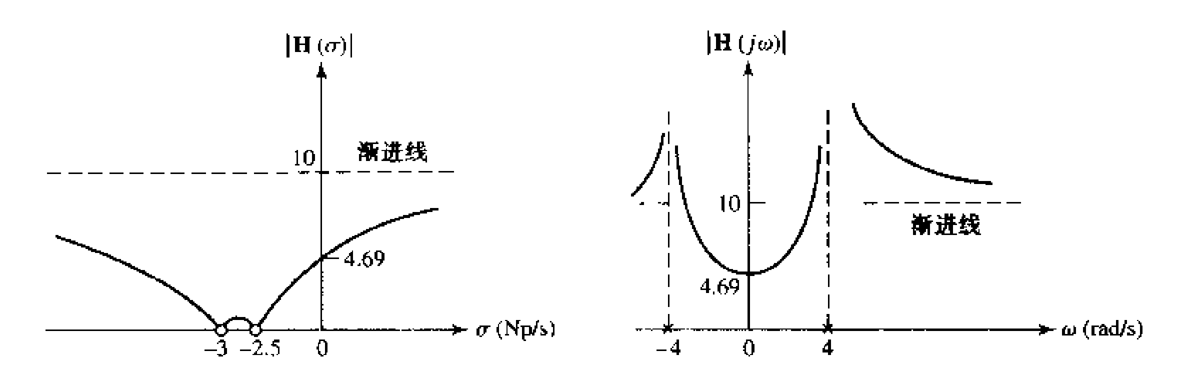


图 P15.41

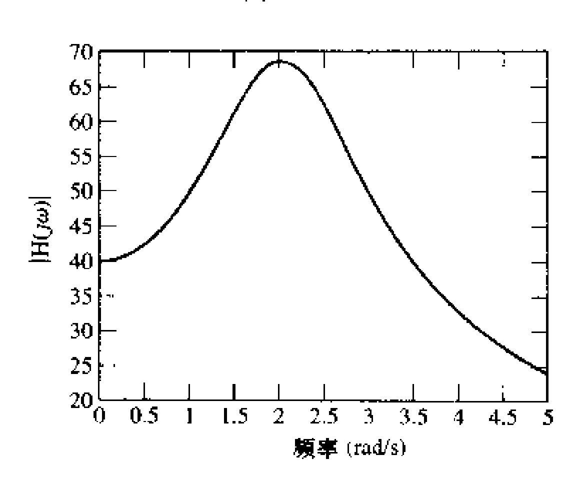


图 P15.45

51. (a)$2.5/(s^2+6.75s+2.5)$;(b)$[1-1.066e^{-0.393t}+0.0659e^{-6.36t}]u(t)$V

53. (a)$\mathbf{H}(s)=-5s/(s+10^5)$;(b)$-(s+10^5)/(5s)$;(c)$-(10s+10^5)/(s+10^5)$

55. (a)0 F,400 Ω;(b)5 nF,200 kΩ;(c)50 nF,2 kΩ;(d)0 F,20 kΩ 和 0.5 nF,20 MΩ

57. $R=1$ kΩ, $C=159$ nF, $R_1=1$ kΩ, $R_f=2.2$ kΩ

59. $R=1$ kΩ, $C=362$ nF, $R_1=1$ kΩ, $R_f=2.2$ kΩ.

第 16 章

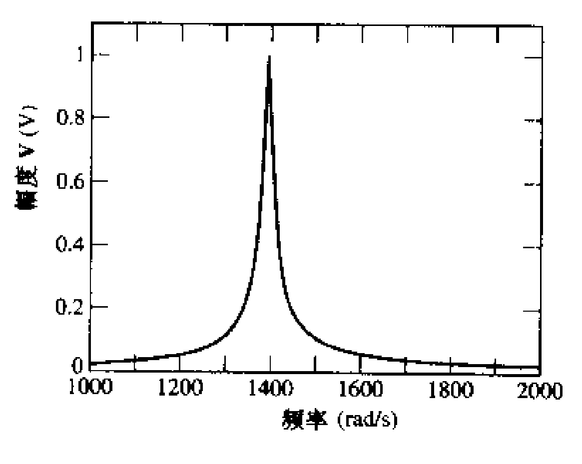


图 P16.1

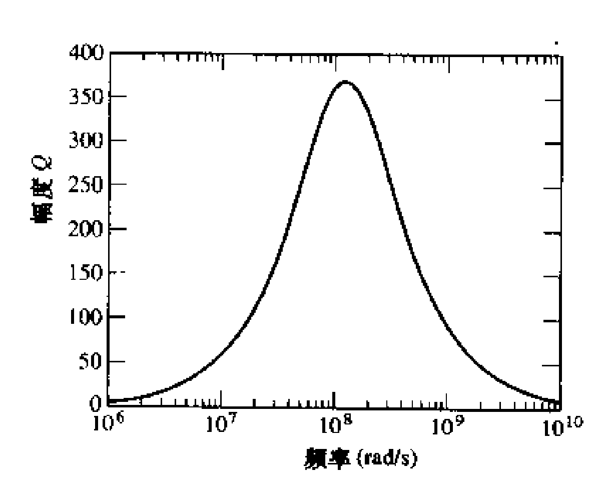


图 P16.3

1.(a)65.37;(b)221.3 Hz;(c)见图 P16.1

3. 见图 P16.3;(b)$\omega_0 = 1.294 \times 10^8$ rad/s, $Q_0 = 366$

5. 7.52,397 Ω,44 mH,15.75 μF

7.(a)$\omega_0 = 1\,000$ rad/s, $Q_0 = 1\,000$;(b)见图 P16.7

9.(a)0.998 H,10 kΩ;(b)9.997 $\angle 1.432^\circ$ kΩ

11.(a)$(1\,000 - 48.4 \times 10^{-8}\omega^2 + j4.4 \times 10^{-4}\omega)/j4.4\omega$;(b)45.5 krad/s,$10^4$ Ω

13.(a)12.30 Ω,15.19 mH,5.42 mF

15.(a)443 和 357 Hz;(b) 497 和 303 Hz

17.(a)10^4 rad/s;(b)15 $\angle 90^\circ$ V;(c)8.32 $\angle 33.7^\circ$ V

19.(a)1.562 $\angle -38.7^\circ$ kΩ;(b)900Hz 到 1 100 Hz

21.(a) 见图 P16.21;(b)204.9 $\angle -13.33^\circ$ V

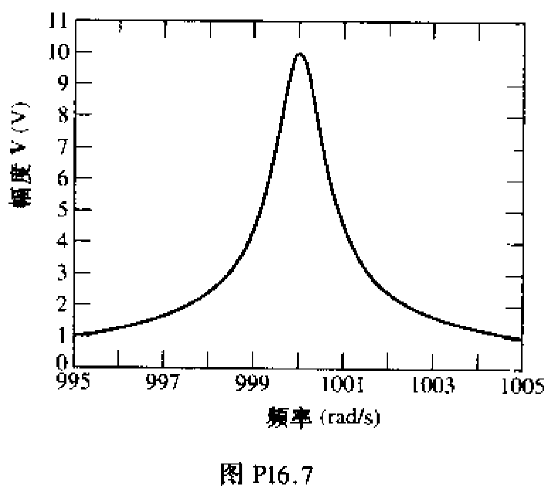


图 P16.7

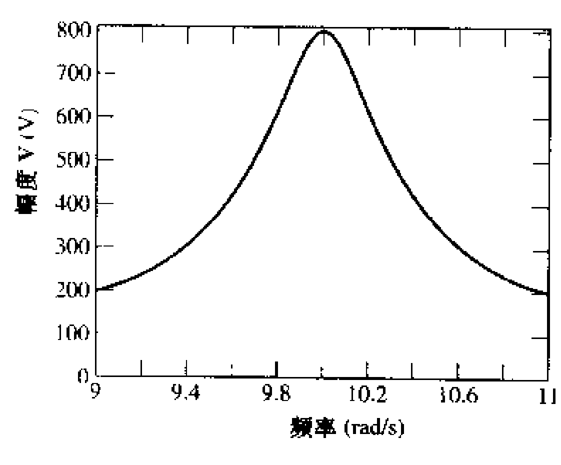


图 P16.21

23.(a)346.4 krad/s;(b)34.64

25.(a)636.6 nF,159.2 mH,50Ω;(b)4.757 V,10,4.218 V

27. 10^5 rad/s,83.3,1 200 rad/s,8.33 kΩ,4.29 $\angle 59.0^\circ$kΩ

29. 10 krad/s 下 208 mΩ

31.(a)16.667 V;(b)16.673 V

33.(a)(s+10)/[20(s+5)];(b)(s+50)/[10(s+25)];(c)图中电流和元件相应变为 $\mathbf{I}_1$,200 mΩ,50 mF,400 mΩ,0.5$\mathbf{I}_1$

35.(a) $\mathbf{I}_x$ 1 μF,1.250 kΩ,1.25 H,$10^3\mathbf{I}_x$;(b)$\mathbf{Z}_{th} = -j5$ kΩ,$\mathbf{V}_{oc} = 0$

37.(a) −13.98 dB;(b)34.0 dB;(c)6.45 dB;(d)75.9;(e)0.398;(f)1.001

39.幅度:$\omega \leqslant 1$;26 dB,$1 < \omega < 10$: −20 dB/dec,$10 \leqslant \omega \leqslant 100$:6 dB,$\omega > 100$: −20 dB/dec;相位:$\omega \leqslant 0.1$:0°,$0.1 < \omega < 1$; −45°/dec,$1 \leqslant \omega \leqslant 100$: −45°,$100 < \omega < 1\,000$: −45°/dec,$\omega > 1\,000$: −90°

41.(a)$\omega \leqslant 2$:90°,$2 < \omega < 10$: −45°/dec,$10 \leqslant \omega \leqslant 100$:58.5°,$100 < \omega < 200$: −135°/dec,$200 < \omega < 1000$: −90°/dec,$1000 < \omega < 10^4$: −135°dec,$\omega \geqslant 10^4$: −180°;(b)(2 rad/s,90°),(10,58.5°),(100,58.5°),(200,17.9°),(10^3, −45°),(10^4, −180°);(c)2:85.1°,10:67.4°,

100:39.2°,200:35.2°,10^3: −49.6°,10^4, −163.3°

43.(a)$25s/(10s^2+25s+1\,000)$;(b)幅度:$\omega=1$: −32 dB,$\omega<10$:20 dB/dec,$\omega>10$: −20 dB/dec,$\omega=10$:0 dB(经过舍入处理);相位:见图 P16.43;(c) −15.68 dB, −80.5°

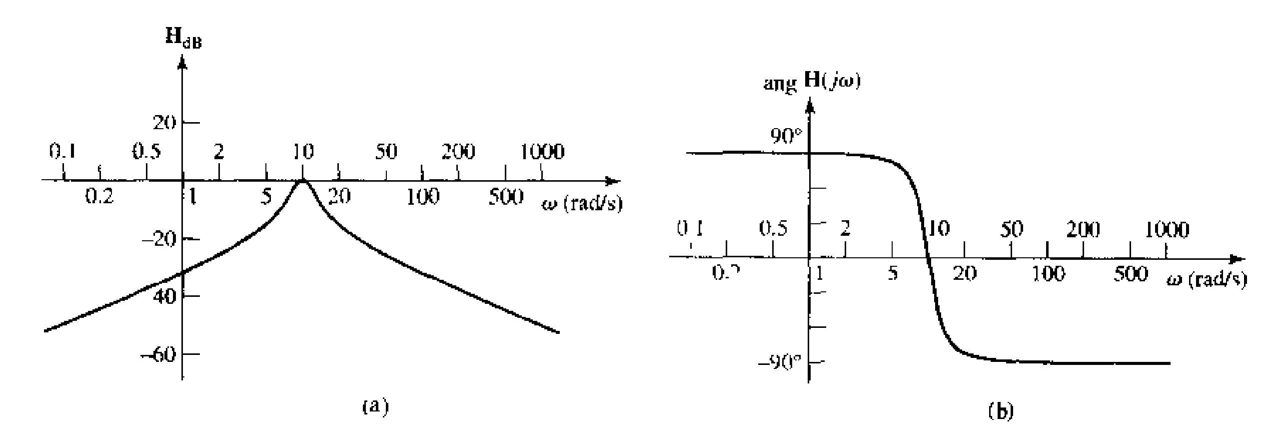


图 P16.43

45.(a) $-0.01s/(1+0.1s)^2$;(b)$\omega<10$: +20 dB/dec,$\omega=10$: −20 dB,$\omega>10$: −20 dB/dec;(c)$\omega<1$:270°,$1\leqslant\omega\leqslant100$: −90°/dec,$\omega>100$:90°

47. 一个(相当笨拙的)基于运放的解决方案见图 P16.47

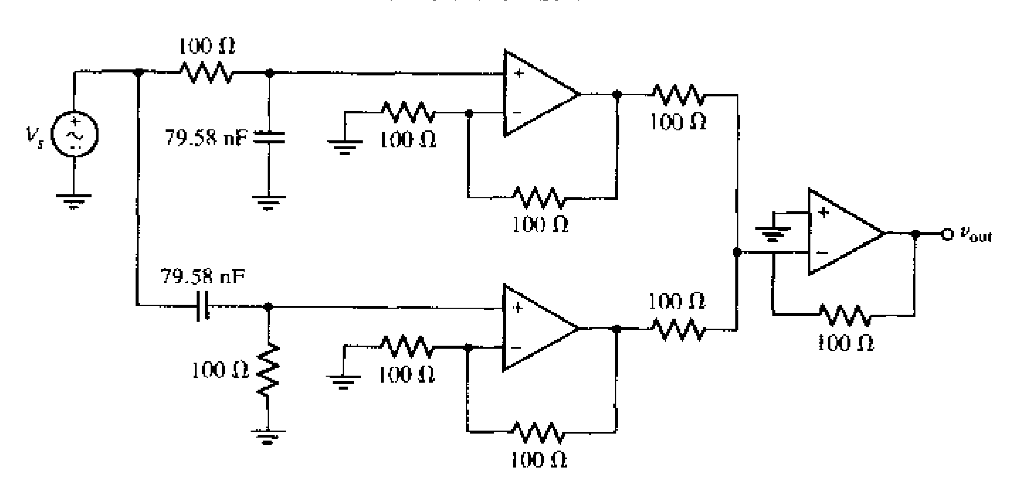


图 P16.47

49. 假定麦克风和连线的电阻可以忽略不计,如图 P16.49 那样的简单电路就足够了

51. 一个可能的解见图 P16.51

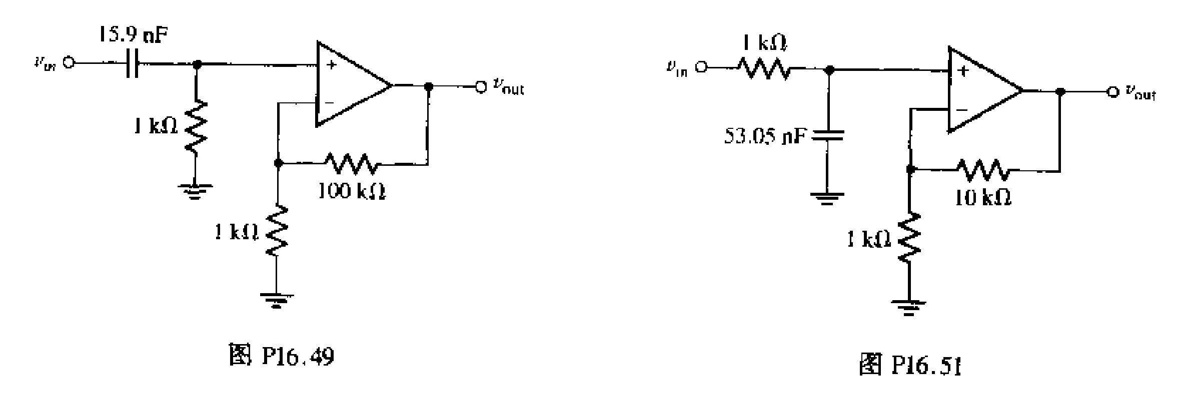


图 P16.49

图 P16.51

53. 图 16.37 给出了一个很好的“陷波”滤波器的拓扑结构，但现在输出不是取自电阻上而是取自电感－电容串联电路的两端。使用不太实际的数值 $R = 1\ \Omega$，$L = 1/120\pi\ H$，$C = 1/120\pi$ F，可以对任何 60 Hz 信号都具有非常好的陷波作用

第 17 章

1. (a)851 W；(b)873 W；(c)701 W

3. 2.21 Ω

5. (a)6.71 Ω；(b)6.71 Ω

7. $-R_s$

9. 141.8 和 −76.6mS

11. $\begin{bmatrix} 0.04 & -0.04 \\ 0.04 & -0.03 \end{bmatrix}$(S)

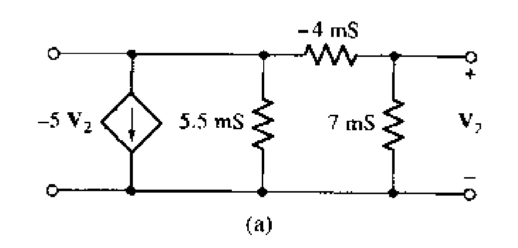
13. (a)32，−320 和 50 Ω；(b)60 Ω

15. Exp 3：4 A，−8 A；Exp 4：−8.33 V，−22.2 V；Exp 5：−58.3 V，−55.6 V；
$\begin{bmatrix} 0.2 & -0.3 \\ -0.4 & 0.15 \end{bmatrix}$(S)

17. 9.90 Ω

19. (a)55.6；(b)−9.62；(c)534；(d)3.46 Ω；(e)34.6 Ω

21. (a)见图 P17.21(a)；(b)见图 P17.21(b)，$[\mathbf{y}]_{new} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$(mS)



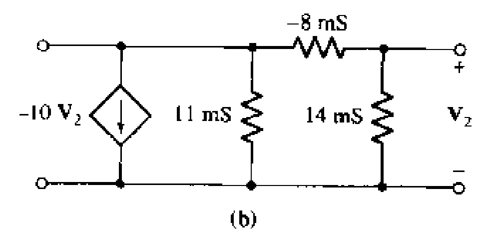


图 P17.21

23. $\begin{bmatrix} 7.55 & 1.132 \\ -4.53 & 11.32 \end{bmatrix}$(Ω)

25. (a)−2；(b)4；(c)8；(d)1 Ω；(e)1.333 Ω

27. $\begin{bmatrix} 133.1\angle -47.6^\circ & 94.2\angle -2.64^\circ \\ 9\,420\angle 86.8^\circ & 565\angle -3.60^\circ \end{bmatrix}$(Ω)

29. (a)$\begin{bmatrix} 10\ \Omega & -2 \\ 20 & 0.2\ \mathrm{S} \end{bmatrix}$；(b)$\begin{bmatrix} 42.33\ \Omega & -1.667 \\ 16.67 & 0.1667\ \mathrm{S} \end{bmatrix}$

31. (a)1.2；(b)96 Ω；(c)−0.24 S

33. (a)$\begin{bmatrix} 1\,000\ \Omega & 0.01 \\ 10 & 200\ \mu\mathrm{S} \end{bmatrix}$；(b)8.57 kΩ

35. (a) $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 8 & 38 \end{bmatrix}$；(b) $\begin{bmatrix} 22 & 16 \\ 14 & 22 \end{bmatrix}$；(c) $\begin{bmatrix} 0 & 26 & 46 & -4 \\ -13 & 13 & 21 & 1 \end{bmatrix}$；(d) $\begin{bmatrix} -3 & -2 & 9 \\ -3 & -19 & 22 \end{bmatrix}$；

(e)$\begin{bmatrix} -6 & 64 & -34 \\ -138 & -738 & 908 \end{bmatrix}$

37. $\begin{bmatrix} 2.12 & 3.85\ \Omega \\ 0.350\ \text{S} & 1 \end{bmatrix}$

39. (a)$\begin{bmatrix} 1 & 2\ \Omega \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;(b)证明(略),$\begin{bmatrix} 1 & 10\ \Omega \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

41. (a)$\begin{bmatrix} 3.33 & 133.3\ \Omega \\ 0.166\ 7\ \text{S} & 9.17 \end{bmatrix}$;(b)$\begin{bmatrix} 10 & 133.3\ \Omega \\ 0.625\ \text{S} & 9.17 \end{bmatrix}$

第 18 章

1. (a)3.00 V;(b)4.96 V;(c)0.02 s;(d) −2.46 V
3. (a)1.200;(b)1.932;(c) −0.045 8
5. 0,1.061,1.061
7. (a)$\frac{1}{8}$ s;(b)0.079 6
9. $\frac{2V_m}{\pi}+\frac{4V_m}{3\pi}\cos 10\pi t-\frac{4V_m}{15\pi}\cos 20\pi t+\frac{4V_m}{35\pi}\cos 30\pi t-\frac{4V_m}{63\pi}\cos 40\pi t+\cdots$
11. (a)$0.2\sin 1\,000\pi t-0.6\sin 2\,000\pi t+0.4\sin 3\,000\pi t$;(b)0.529;(c)1.069
13. (a)5.09;(b) −0.679, −2.72;(c) $-4<t<0$ ms, $8\sin 125\pi|t|$;(d)0, −3.40
15. $b_{even}=0$, $b_1=0.246$, $b_3=0.427$, $b_5=0.134$
17. (a)$1.25+\sum_{(n=1,odd)}^{\infty}\frac{0.255}{n^2+0.16}\left(\frac{1}{n}\sin 5nt-2.5\cos 5nt\right)$;(b) $-0.554e^{-2t}+1.25+\sum_{(n=1,odd)}^{\infty}\frac{0.255}{n^2+0.16}\left(\frac{1}{n}\sin 5nt-2.5\cos 5nt\right)$
19. (a)$5+\frac{20}{\pi}\sum_{(n=1,odd)}^{\infty}\frac{1}{1+400n^2}\left(\frac{1}{n}\sin 5nt-20\cos 5nt\right)$;(b)$Ae^{-t/4}$;(c) $-4.61e^{-t/4}+5+\frac{20}{\pi}\sum_{(n=1,odd)}^{\infty}\frac{1}{1+400n^2}\left(\frac{1}{n}\sin 5nt-20\cos 5nt\right)$
21. $c_n=2\times 10^4\left\{\frac{1}{160n^2\pi^2}[e^{-j0.4n\pi}(1+j0.4n\pi)-1]+\frac{j}{400n\pi}(e^{-j0.8n\pi}-e^{-j0.4n\pi})\right\}$, $c_0=30$, $\mathbf{c}_{\pm 1}=24.9\angle\mp 88.6^\circ$, $\mathbf{c}_{\pm 2}=13.31\angle\pm 177.4^\circ$
23. (a)$1+0.4\cos\omega_0 t+\cos 2\omega_0 t-2\cos 3\omega_0 t+0.4\sin\omega_0 t-0.5\sin 2\omega_0 t+4\sin 3\omega_0 t$, $\omega_0=400\pi$ rad/s;(b) −332 mV
25. (a) $-j4.244$ V;(b)15.75 W
27. (a)见图 P18.27;(b)$\frac{10}{\omega}(\sin 3\omega+\sin 2\omega)$
29. $10[(\sin 2\omega)/\omega]^2$
31. (a)1.59;(b)0.549;(c)0.399
33. (a)0.9 J;(b)0.041 6 rad/s
35. (a)32 J;(b)$32/(4+\omega^2)$;(c)2.72 rad/s

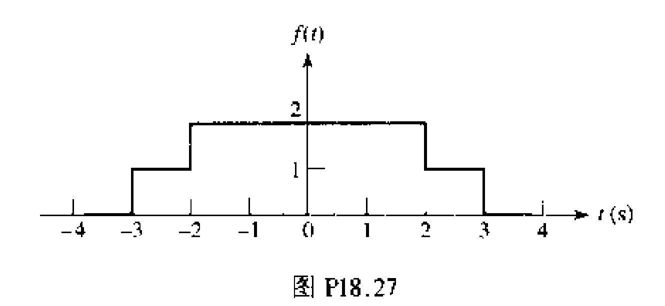


图 P18.27

37. (a)$4e^{-j\omega}$; (b) -4; (c) $-j4\pi[e^{-j\pi/6}\delta(\omega-10)-e^{j\pi/6}\delta(\omega+10)]$

39. (a)$0.1039\angle -106.5°$; (b) $-0.1039\angle -106.5°$; (c)$0.362\angle 15.99°$

41. $2\pi\sum_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{j10}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{j20}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right]\delta\left(\omega-\frac{\pi n}{2}\right)$

43. 1.386

45. 0, 0, 4, 10, 6, 0

47. (a) $\frac{20}{3}\int_2^5(5-z)dz$; (b)30

49. (a)0.335; (b)0.741; (c)0.221

51. $100te^{-2t}u(t)$

53. (a)$\frac{1}{3}$ J; (b)0.5

55. (a)$\frac{2}{1+j\omega}$; (b)见图 P18.55; (c)2

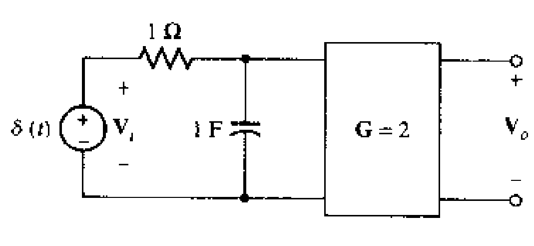
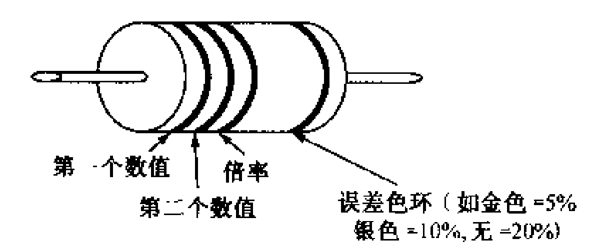


图 P18.55

电阻的色环表示法

色环	黑	棕	红	橙	黄	绿	蓝	紫	灰	白
数值	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9



1. 左边第一个色环表示电阻值最高位的相应数值。
2. 左边第二个色环表示电阻值第二位的相应数值。
3. 倍率色环表示数值后零的个数(对应 10 种颜色的 10 个数(如黑 = 无;棕 = 1,等等)。而金色表示将小数点左移一位,银色表示将小数点左移两位)。
4. 误差色环表示电阻的精度,如 100 Ω 误差为 5% 的电阻,其测量值应在 95 Ω ~ 105 Ω 之间。

举例

如电阻色环为(从左至右):

红、红、橙、金	= 22 000	即 22×10^3	= 22 kΩ,5% 误差
蓝、灰、金	= 6.8	即 68×10^{-1}	= 6.8 Ω,20% 误差

误差为 5% 电阻的标称值

1.0	1.1	1.2	1.3	1.5	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9	4.3	4.7	5.1	5.6	6.2	6.8	7.5	8.2	9.1	Ω
10.	11	12.	13	15.	16.	18.	20.	22	24.	27.	30.	33	36	39.	43.	47.	51.	56.	62.	68.	75.	82.	91.	Ω
100	110	120	130	150	160	180	200	220	240	270	300	330	360	390	430	470	510	560	620	680	750	820	910	Ω
1.0	1.1	1.2	1.3	1.5	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9	4.3	4.7	5.1	5.6	6.2	6.8	7.5	8.2	9.1	kΩ
10.	11.	12.	13	15.	16.	18	20.	22.	24.	27.	30	33	36.	39.	43.	47.	51.	56.	62.	68	75.	82.	91.	kΩ
100	110	120	130	150	160	180	200	220	240	270	300	330	360	390	430	470	510	560	620	680	750	820	910	kΩ
1.0	1.1	1.2	1.3	1.5	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9	4.3	4.7	5.1	5.6	6.2	6.8	7.5	8.2	9.1	MΩ

积分速查表

$$\int \sin^2 ax\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int \cos^2 ax\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int x \sin ax\, dx = \frac{1}{a^2}(\sin ax - ax\cos ax)$$

$$\int x^2 \sin ax\, dx = \frac{1}{a^3}(2ax\sin ax + 2\cos ax - a^2x^2\cos ax)$$

$$\int x\cos ax\, dx = \frac{1}{a^2}(\cos ax + ax\sin ax)$$

$$\int x^2\cos ax\, dx = \frac{1}{a^3}(2ax\cos ax - 2\sin ax + a^2x^2\sin ax)$$

$$\int \sin ax\sin bx\, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)};\ a^2 \neq b^2$$

$$\int \sin ax\cos bx\, dx = -\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)};\ a^2 \neq b^2$$

$$\int \cos ax\cos bx\, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)};\ a^2 \neq b^2$$

$$\int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1)$$

$$\int x^2e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2)$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\ \sin bx - b\cos bx)$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\ \cos bx - b\sin bx)$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi;\ a > 0 \\ 0;\ a = 0 \\ -\frac{1}{2}\pi;\ a < 0 \end{cases}$$

$$\int_0^\pi \sin^2 x dx = \int_0^\pi \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\pi \sin mx\sin nx dx = \int_0^\pi \cos mx\cos nx dx = 0;\ m \neq n,\ m \text{ and } n \text{ integers}$$

$$\int_0^\pi \sin mx\cos nx dx = \begin{cases} 0;\ m-n \text{ even} \\ \frac{2m}{m^2-n^2};\ m-n \text{ odd} \end{cases}$$

三角恒等式速查表

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm 90^\circ) = \mp \sin\alpha$$

$$\sin(\alpha \pm 90^\circ) = \pm \cos\alpha$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha - \beta)$$

$$\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos2\alpha)$$

$$\sin\alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{j2}$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$

$$e^{\pm j\alpha} = \cos\alpha \pm j\sin\alpha$$

$$A\cos\alpha + B\sin\alpha = \sqrt{A^2 + B^2}\cos\left(\alpha + \tan^{-1}\frac{-B}{A}\right)$$

教学支持说明

McGraw-Hill公司是美国著名的教育图书出版公司，出版了很多著名的计算机、工程类以及经营类图书。

我们十分重视教师手册等教学课件以及网上资源的使用。如果您确认将本书作为指定教材，请您务必填好以下表格并经系主任签字盖章后寄回我们的联系地址，McGraw-Hill公司将免费向您提供英文原版的教师手册或其他教学课件。

情况调查表如下所示（复印有效）：

证　　明

兹证明________大学________系／院________专业______学年（学期）开设的____________课程，共______学时，现采用电子工业出版社出版的英文原版／简体中文版____________（书名／作者）作为主要教材。任课教师为________，学生___个班共___人。

任课教师需要与本书配套的教师指导手册和习题解答

电　　话：________________

传　　真：________________

E-mail：________________

联系地址：________________

邮　　编：________________

建议和要求：

系／院主任：__________（签字）

（系／院办公室章）

_____年___月___日

Publishing House of Electronics Industry
电子工业出版社：www.phei.com.cn
联系电话：010-68270519/68273874
传　　真：010-68270516
E-mail: Te_service@phei.com.cn

McGraw-Hill Beijing Office
麦格劳－希尔北京代表处
地址：100086 北京市海淀区知春路76号
翠宫饭店写字楼607室
Fax: 8610-62638354
E-mail: mghchina@mcgraw-hill.com.cn
http://www.mheducation.com